# Elementos de Análisis Funcional

**Fernando Galaz Fontes**
Centro de Investigación en Matemáticas

galaz@cimat.mx

CIMAT

Elementos de Análisis Funcional

QA320
G147

Galaz Fontes, Fernando
Elementos de análisis funcional / Fernando Galaz Fontes. – México : Centro de Investigación en Matemáticas, A.C., 2006.
xiv, 370 p.; 23 cm.
ISBN 968-5733-07-4

MSC: 46-XX

1. Análisis Funcional

ISBN 968-5733-07-4

©D.R. Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

Jalisco s/n, Mineral de Valenciana,

36240 Guanajuato, Gto., México

Este libro no puede ser reproducido total ni parcialmente, por ningún medio electrónico o de otro tipo, sin autorización escrita del editor.

*This book may not be reproduced, whole or in part, by any means, without written permission from the publisher.*

Cuidado de edición: *Hernán González Aguilar*
Diseño de portada: *Galileo Martínez*

ISBN 968-5733-07-4

Impreso por: *S y G Editores, S.A. de C.V.*
Cuapinol 52, Santo Domingo de los Reyes, Coyoacán
04369 - México, D.F.

a EDITH

# Índice general

# Una Nota del Consejo Editorial

Desde la fundación misma del Centro de Investigación en Matemáticas (CIMAT) hubo un claro interés por tener un medio para la difusión del trabajo científico de sus investigadores, y las "Comunicaciones Técnicas del CIMAT", que iniciaron sistemáticamente hacia 1988, fueron la primera serie de publicaciones producidas en el Centro en forma estructurada.

Más recientemente, y en concreto desde hace cinco años, el CIMAT ha editado varios libros de matemáticas, algunos de ellos en colaboración con la Sociedad Matemática Mexicana bajo un esquema de financiamiento compartido. Estos libros ya fueron editados bajo un sistema riguroso de arbitraje por pares, conforme a los estándares de excelencia que hoy día se exigen.

Pero ahora el CIMAT quiere dar un paso adelante en esta dirección, y el libro que el lector tiene ahora entre sus manos es el primer fruto de este nuevo proyecto editorial del Centro. El propósito de este proyecto es la producción de libros, escritos fundamentalmente por investigadores del Centro, pero continuando con una política editorial que contempla un arbitraje de primera calidad; y el objetivo es llegar a difundir estos trabajos en un mercado internacional, primordialmente el iberoamericano.

Para conseguir dar inicio a esta ambiciosa empresa, se buscó y obtuvo apoyo del Consejo de Ciencia y Tecnología del Estado de Guanajuato (CONCyTEG); es un placer expresar aquí nuestro agradecimiento al CONCyTEG por haber asistido nuestros esfuerzos, mediante el financiamiento proveniente del convenio 06-02-K119-074.

Estamos convencidos de que este proyecto editorial tiene un considerable potencial de tener éxito para la difusión de la matemática mexicana, y estamos orgullosos de presentar este libro, escrito por el Dr. Fernando Galaz Fontes, como primer volumen de esta colección; esperamos contar pronto con muchos más de la misma calidad.

Por el Consejo Editorial del CIMAT

Helga Fetter Nathansky

# Prefacio

Originalmente, este libro estaba pensado únicamente para cubrir el material correspondiente a un primer curso sobre análisis funcional, que sirviera tanto a estudiantes de licenciatura como de maestría en Matemáticas. Sin embargo, poco a poco y de manera natural, los temas fueron ampliándose hasta alcanzar el tamaño que se presenta y que, más o menos, se puede desarrollar en dos semestres. Su contenido y exposición es el producto de los cursos respectivos que he tenido oportunidad de impartir en diversas ocasiones dentro de la Maestría en Matemáticas que ofrece el Centro de Investigación en Matemáticas. Su objetivo es iniciar y encaminar al lector en el estudio del análisis funcional, particularmente en los espacios de Banach y en la teoría de operadores.

A fines del siglo XIX, resultó significativo el comprender que diversos problemas, la mayoría de los cuales se traducía en ecuaciones diferenciales, se podían interpretar en términos de resolver una ecuación de la forma $Fx = b$, donde el dato $b$ pertenecía a cierto conjunto $B$ y la incógnita $x$ se buscaba en otro conjunto $A$. Una primera aproximación a este problema es tratar de estudiar el comportamiento de $F$ como en el caso de funciones en $\mathbb{R}^N$, el espacio formado por los vectores con $N$ componentes reales. De manera natural, esto conduce a buscar propiedades de un conjunto que permitan hacer en él análisis "como" el que conocemos en $\mathbb{R}^N$. Se llega así a distinguir tres características de $\mathbb{R}^N$: su estructura de espacio vectorial, su norma y su completez. Estas tres propiedades motivan el concepto de espacio de Banach.

El trabajo está organizado en 9 capítulos. En el primero se introducen los espacios de Banach clásicos, $B(D)$, $C(K)$, $\ell^p$ y $L^p(\mathbb{R}^N)$, los cuales están formados, respectivamente, por las funciones acotadas en un conjunto $D$, las funciones continuas en un compacto $K$, las sucesiones $p$-sumables y las clases de equivalencia de funciones $p$-integrables. También se inicia aquí el estudio de los espacios de Hilbert, de importancia fundamental en las aplicaciones. A lo largo del texto siempre se busca analizar si los espacios anteriores tienen las propiedades que se van introduciendo.

La generalización de las nociones de convergencia para sucesiones y de continuidad para funciones en $\mathbb{R}^N$ se realiza inmediatamente a un espacio $X$ con una norma. Sin embargo, con frecuencia sucede que el dominio de la función $F$ en la cual estamos interesados no es todo $X$, sino un subconjunto que no es un subespacio vectorial. Esto lleva a buscar un marco más flexible, dentro del cual se incluya cualquier subconjunto de un espacio normado. El marco más cercano es el de espacios métricos. Sin embargo, tomando en cuenta que la mayoría de los conceptos necesarios admiten una formulacíon más general y que las pruebas de los resultados involucrados no resultan ser más complicadas, en este trabajo partimos del concepto de espacio topológico. Así, en el capítulo 2 se introducen los conceptos de espacio topológico, de espacio métrico y se establecen aquellas propiedades y resultados necesarios para nuestra presentación. Para mostrar el funcionamiento de las ideas desarrolladas, en las secciones 4 y 5 se establece la existencia y unicidad de la solución para una clase de ecuaciones diferenciales. Se estudia después el concepto de compacidad, que es fundamental en el análisis y en sus aplicaciones. Aunque la compacidad en espacios normados cae en el marco de espacios métricos, el desarrollo en términos de espacios topológicos permite la construcción de los espacios de Banach clásicos en situaciones más generales. Por ejemplo, se consideran ahora espacios $C(K)$, donde el conjunto compacto $K$ puede no ser un espacio métrico. Para concluir este capítulo se discute la separabilidad de los espacios de Banach clásicos.

Entre las funciones de interés definidas entre espacios normados, los operadores lineales son de las más sencillas; los capítulos restantes de este trabajo se refieren a esta clase de funciones. En el capítulo 3 se introduce el concepto de operador lineal acotado y se establece su equivalencia con la continuidad. Si $X$ y $Y$ son espacios normados, lo anterior permite definir una norma en $\mathcal{L}(X, Y)$, el espacio formado por aquellos operadores lineales $T : X \to Y$ que son continuos. En este capítulo también se estudian varias construcciones de espacios normados a partir de otros espacios normados. Así, se define una norma en un espacio cociente, una norma en un espacio producto. Asímismo, se construye la extensión lineal y continua a la cerradura del dominio de un operador lineal y continuo que toma valores en un espacio de Banach.

Las últimas secciones de este capítulo están desarrolladas en el contexto de espacios de Hilbert y en ellas se establecen conceptos y resultados básicos como los de complemento ortogonal, proyección ortogonal, proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt, base ortonormal y teorema de Riesz-Fischer. En particular, se estudia el caso de la base ortonormal clásica para $L^2(-\pi, \pi)$.

En los siguientes dos capítulos se presentan los llamados principios del análisis funcional: teorema del mapeo abierto, teorema de la gráfica cerrada, principio del acotamiento uniforme y teorema de Hahn-Banach. Los tres primeros requieren de la propiedad de completez y, a partir del teorema de categoría de Baire, se establecen en el capítulo 4. Se presentan además dos aplicaciones y se construye la completación de un espacio normado.

El capítulo 5 trata sobre el teorema de Hahn-Banach y sus consecuencias. Dado un espacio normado $X$, se estudia con detenimiento su espacio dual $X^*$ y la idea de propiedades "débiles". En particular, la convergencia débil se discute en la sección 5 y la sección 3 trata con la identificación canónica $J : X \to X^{**}$. Se analiza después la representación del espacio dual de un espacio de Hilbert, de $\ell^p$ y de $L^p(\mathbb{R}^N)$. El concepto de operador transpuesto se introduce en la sección 6 y se establecen relaciones entre las propiedades de un operador lineal acotado y las de su operador transpuesto. En la última sección se demuestran las propiedades fundamentales de los espacios de Banach reflexivos y se analiza la reflexividad de los espacios de Banach clásicos.

En el capítulo 6, motivado por las importantes propiedades de los valores propios de una matriz, comienza el estudio del espectro de un operador lineal acotado $T \in \mathcal{L}(X)$, donde $X$ es un espacio de Banach. En este punto la composición de operadores en $\mathcal{L}(X)$, que en adelante llamaremos producto, desempeña un papel esencial y lleva, naturalmente, a introducir otras estructuras abstractas, como son la de álgebra (no- conmutativa) y la de álgebra de Banach. Los polinomios, reales o complejos según sea el caso, constituyen un álgebra y desempeñan un papel relevante en el estudio de cualquier otra álgebra de Banach. Cuando el espacio de Banach $X$ es complejo, se prueba que el espectro de $T$ es un conjunto compacto no-vacío y se establece una fórmula muy importante para el radio del disco más pequeño que lo contiene. Para ello se estudia antes un poco acerca de funciones holomorfas con valores en un espacio de Banach $X$.

El capítulo 7 trata sobre los operadores compactos, los cuales constituyen una clase de operadores muy importante, tanto por su simplicidad (relativa) como por las numerosas aplicaciones en que aparecen. La sección 2 se refiere a los operadores integrales y se prueba en ella que algunos de estos operadores son compactos. En la sección 4 se presenta la teoría espectral para un operador compacto y en la última sección se establece que cualquier operador compacto tiene un subespacio invariante no-trivial.

A partir del capítulo 8 todo el desarrollo es en el contexto de un espacio de Hilbert $H$. En este marco, el concepto de operador transpuesto de $T \in \mathcal{L}(H)$ toma una forma más sencilla y útil, la del operador adjunto $T^*$. Este permite distinguir aquellos operadores tales que $T = T^*$, llamados autoadjuntos. Esta clase de operadores, al igual que los operadores compactos, resulta ser de enorme importancia tanto por su simplicidad (relativa) como por las numerosas aplicaciones donde intervienen. Los capítulos 8 y 9 se dedican al estudio del espectro de un operador autoadjunto.

Cercano al concepto de operador autoadjunto, está el de operador normal, definido por la condición de que, bajo el producto, $T$ conmute con su adjunto $T^*$. A lo largo del capítulo 8 se establece que los operadores normales tiene algunas propiedades semejantes a las de los operadores autoadjuntos. La sección 4 es un punto culminante de este trabajo. Se establece ahí que un operador compacto autoadjunto tiene una representación en forma de serie, que corresponde a la diagonalización de una matriz hermitiana o simétrica. La cuestión de obtener una representación similar para cualquier operador autoadjunto es lo que explica el resto del trabajo.

En la sección 5 se define lo que es una función continua de un operador autoadjunto, asociando de esta manera a una función continua un operador. Esta asociación tiene propiedades muy útiles, a las cuales se les llama el cálculo funcional. Se define después un orden parcial en los operadores autoadjuntos, dando lugar así a los operadores positivos. Mediante el cálculo funcional, se prueba que todo operador positivo tiene una única raíz cuadrada con ciertas propiedades. Esto tiene dos consecuencias importantes. Por una parte, permite obtener para cualquier operador acotado una representación similar a la representación polar de un número complejo. Por otra, permite establecer que el cálculo funcional preserva el orden parcial usual que se tiene en las funciones continuas.

Con el propósito de extender el cálculo funcional, en lugar de trabajar con la convergencia bajo la norma de operadores, en el capítulo 9 se considera la convergencia puntual, que en adelante es llamada convergencia fuerte. El nuevo cálculo funcional permite construir una familia de proyecciones ortogonales llamada resolución de la identidad para el operador autoadjunto $T$. En la sección 4 se define la integral de una función continua respecto a esta familia, lo cual constituye otro punto culminante de este trabajo, y se prueba que $T$ tiene una representación en forma de integral respecto de la resolución de la identidad.

En la siguiente sección se caracteriza el espectro de $T$ en términos del comportamiento de su resolución de la identidad. Para concluir el capítulo, como una aplicación de los métodos desarrollados, se establece que, en el caso de un espacio de Hilbert separable, el único ideal cerrado de $\mathcal{L}(H)$, distinto de $\{0\}$ y de $\mathcal{L}(H)$, es el formado por los operadores compactos.

Como antecedentes para asimilar el material que se acaba de describir se requieren familiaridad con el álgebra lineal, así como un conocimiento del análisis básico en $\mathbb{R}^N$ y de la integral de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$. En la sección 6.3 se utilizan algunos resultados básicos relativos a funciones enteras (variable compleja). Sin embargo, su contenido no es esencial al resto del trabajo. Fuera de los temas anteriores, se ha tratado que el libro sea auto-contenido. Por ello, la exposición no presupone familiaridad con espacios métricos o espacios topológicos. Los conceptos y las propiedades correspondientes que son necesarias se discuten y se establecen gradualmente, siempre con cuidado, a lo largo del texto. Para ayudar a su comprensión se han incluido un poco más de 500 ejercicios. Estos se encuentran distribuidos, tanto en número como en dificultad, a lo largo de casi todas las secciones que conforman los distintos capítulos. Nunca sobra la recomendación de intentarlos hacer sistemáticamente.

Para hacer las referencias hemos empleado 1, 2 o 3 números. De derecha a izquierda, éstos indican el lugar, la sección y el capítulo donde se encuentran. Cuando uno o dos de ellos faltan, debemos entender que lo referido se encuentra en el capítulo o sección correspondiente. Por ejemplo, la proposición 2.2 es la proposición 2 de la sección 2 en el capítulo donde la referencia aparece. Asímismo, el lema 2 se refiere al lema 2 de la sección donde se está.

Quiero agradecer la generosidad que mostraron dos árbitros anónimos al revisar este trabajo y las observaciones realizadas. Para terminar, es un gusto reconocer la deuda que tengo con todos mis ex-alumnos de los distintos cursos, sin cuya interacción no hubiera sido posible emprender ni realizar este trabajo.

Fernando Galaz Fontes<br>Guanajuato, Gto., 31 de marzo, 2005