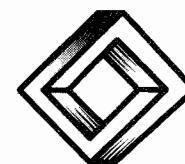


Un paseo a Hiperbolia

Michael Barot

Instituto de Matemáticas, UNAM

barot@matem.unam.mx



CIMAT

Matemática Aplicada y su Enseñanza
- Licenciatura -

Editores:

Dr. Fernando Brambila Paz
Departamento de Matemáticas,
Facultad de Ciencias. UNAM.

Dr. Alejandro J. Díaz Barriga Casales
Instituto de Matemáticas,
UNAM.

QA685
B267

Barot, Michael.

Un Paseo a Hiperbolía / Michael Barot ; Editado por Brambila Paz, Fernando y Díaz Barriga Casales, Alejandro J. - México :
Centro de Investigación en Matemáticas : Sociedad Matemática Mexicana, 2005.
viii, 117 p. ; 23 cm. il. -- (Matemática Aplicada y su Enseñanza,
Nivel Licenciatura; Tema Geometría)
ISBN 968-5733-04-X

1. Geometría Hiperbólica.
MSC: 51M10, 51M09, 51M15

©D.R. Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

Jalisco s/n, Mineral de Valenciana,
36240 Guanajuato, Gto., México

©D.R. Sociedad Matemática Mexicana

Circuito exterior s/n, área de la investigación científica,
Ciudad Universitaria. C.P. 04510 MEXICO D.F.

Este libro no puede ser reproducido total ni parcialmente, por ningún medio electrónico o de otro tipo, sin autorización escrita del editor.

This book may not be reproduced, whole or in part, by any means, without written permission from the publisher.

Cuidado de edición: *Hernán González Aguilar*
Diseño de portada: *Odalmira Soto Alvarado*
Color de la ilustración: *Galileo Martínez*

Impreso por: *S y G Editores, S.A. de C.V.*
Cuapinol 52, Santo Domingo de los Reyes, Coyoacán
04369 - México, D.F.



Contenido

Presentación de la Serie “Matemática Aplicada y su Enseñanza”	v
Prólogo	vii
1 Introducción	1
1.1 El “Museion” en Alejandría	1
1.2 “Los Elementos” de Euclides	2
1.3 El quinto axioma	3
1.4 N. I. Lobachevski y J. Bolyai	5
1.5 La geometría y la realidad	6
2 Un nuevo mundo se presenta	7
2.1 El modelo de Poincaré	7
2.2 La cuestión de las paralelas	9
2.3 El papel de las reflexiones	10
3 Los primeros pasos	13
3.1 La h -perpendicular	13
3.2 La h -mediatriz	14
3.3 La h -bisectriz	16
4 Construcciones elementales	19
4.1 Transportar una distancia	19
4.2 La h -regla	20
4.3 El h -círculo	21

4.4	La h -equidistante	24
4.5	Las h -tangentes	26
5	h -Congruencia	29
5.1	Dos h -triángulos con los mismos lados	29
5.2	Composiciones de h -reflexiones	30
5.3	Dos casos particulares	31
5.4	La suma de los h -ángulos en un h -triángulo	31
5.5	Teoremas de h -congruencia de h -triángulos	32
6	Problemas en Hiperbolia	39
6.1	La mamá con sus niños	39
6.2	¿Cómo arar un campo?	40
6.3	Los azulejos	40
6.4	Planear una ciudad	44
6.5	La mesa	45
6.6	El rascacielos	47
6.7	El problema con los mapas y planos	48
6.8	El matemático	48
7	La visión hiperbólica	53
7.1	La geometría del ver	53
7.2	Ver en diferentes direcciones	55
7.3	¿Cómo se ve un plano?	58
7.4	El problema de la escala	62
7.5	Midiendo distancias en Hiperbolia	64
7.6	Viendo segmentos desde lejos	65
7.7	Diferentes escalas	68
7.8	Algunos cuadros	69
8	Apéndice	81
8.1	Los Elementos de Euclides	81

8.2	Geometría euclidiana	83
8.3	La inversión en el círculo	89
8.4	La medición de h -distancias	94
8.5	Otros Modelos	97
	Soluciones de los Ejercicios	105
	Bibliografía	115

Presentación de la Serie

“Matemática Aplicada y su Enseñanza”

Maestro ¿y esto para qué sirve?... Es la pregunta que muchas veces se oye en un salón de clase de Matemáticas. La Sociedad Matemática Mexicana a través de su Comité de Educación trata de colaborar a que la enseñanza de las matemáticas sea cada vez mejor, a que los que las estudian se convenzan de que el esfuerzo que tienen que realizar para aprenderlas no es solamente para pasar de año, sino que los procesos de pensamiento que enfrentan, las habilidades que adquieren y sobre todo la actitud que deben tener frente a los problemas es útil en su formación, en su desarrollo profesional, incluso en su vida cotidiana.

Por saber matemáticas entendemos participar del quehacer matemático; es decir, tener habilidad para resolver problemas, conjeturar, hacer demostraciones.

Gracias al apoyo del CONACYT, la Sociedad Matemática Mexicana (SMM) ha podido sostener el proyecto “Matemática Aplicada y su Enseñanza”, que ha colaborado y estamos seguros colaborará a que los profesores nos podamos enfrentar a ofrecer a nuestros estudiantes un producto, las matemáticas, más interesante, más lúdico, de más calidad. A que los alumnos puedan tener a la mano respuestas a la pregunta que hacemos al inicio de esta presentación.

Desde su inicio el proyecto se dividió en dos niveles: el nivel de Bachillerato y el nivel de Licenciatura.

Algunos de los trabajos que presentamos en estos volúmenes fueron hechos a petición expresa y con muchas horas de discusión sobre lo que debía de ser el resultado del proyecto, luego éstos pasaron a arbitraje. Posteriormente hicimos un primer concurso para convocar a la comunidad matemática del País a que colaborara con este proyecto, poniendo en la página de la Sociedad ejemplos de qué es lo que estábamos esperando. La respuesta de la comunidad ha sido excepcionalmente buena y para iniciar la serie ya contamos con material para seis volúmenes de Bachillerato y seis de Licenciatura.

Cada volumen de Bachillerato cuenta con algunos fascículos que tratan temas de matemáticas con aplicaciones, a veces a la matemática misma, y en ocasiones la forma de cómo se puede desarrollar este contenido en clase a manera de una propuesta didáctica.

Para el nivel Licenciatura se tiene la idea de mostrar aplicaciones que sean susceptibles de enseñar en los primeros semestres de una Licenciatura como Biología, alguna Ingeniería, Economía, Química, desde luego Matemáticas, etc.

Para su presentación hay dos tipos de clasificaciones, una por áreas de las matemáticas, así hay volúmenes para Cálculo, para Álgebra Lineal, para Geometría, otra por la aplicación; Matemáticas Aplicadas a la Ciencias de la Vida y Matemáticas Aplicadas a la Negociación.

Sinceramente esperamos colaborar con maestros y alumnos en lograr un mejor y más profundo aprendizaje de las matemáticas.

“Provocar aprendizajes, es nuestra tarea en la enseñanza”.

Agradecemos a todos los que en algún momento han colaborado con este proyecto: escritores, árbitros, concursantes. Todo aquel que se ha enfrentado a la tarea de editar sabe que ésta es ardua. Ha sido importante la colaboración de María Teresa V. Martínez Palacios, Gricelda Cedillo Ramírez, Martha Cerrilla y Aranda, Alejandro Bravo Mojica, Graciela González Hita y Hernán González a ellos les damos las gracias. Por último queremos agradecer al CIMAT y a su director José Carlos Gómez Larrañaga por esta coedición con la SMM.

Afectuosamente,

Coordinadores del Proyecto “Matemática Aplicada y su Enseñanza” de la SMM.

Dr. Fernando Brambila Paz
Departamento de Matemáticas,
Facultad de Ciencias, UNAM.

Dr. Alejandro J. Díaz Barriga Casales
Instituto de Matemáticas
UNAM.

Octubre de 2005.

Prólogo

Nuestro entorno nos presenta la geometría euclidiana: nuestras casas son objetos muy geométricos y nadie duda que podemos llenar el espacio que queremos con cubos: pues así se apilan las cajas. Sabemos que los bordes de una calle que atraviesa un llano se aproximan a un punto en el horizonte, los cuadros de los renacentistas se pintaron basándose en los conocimientos de la perspectiva. La geometría euclidiana nos rodea y forma nuestro pensamiento.

Los matemáticos estudiaron esta geometría y de esta manera estudiaron el espacio real, al menos así lo pensaron hasta que se rompió esta feliz unión entre la matemática y la realidad, en una “revolución” que hizo temblar toda la comunidad matemática porque de repente se cuestionó lo que la matemática puede decirnos sobre la realidad. Einstein expresó esta ruptura de manera contundente: *“Insofern sich die Sätze der Mathematik auf die Wirklichkeit beziehen, sind sie nicht sicher, und insofern sie sicher sind, beziehen sie sich nicht auf die Wirklichkeit”* (a medida que los teoremas de las matemáticas se refieren a la realidad no son seguros y a medida que son seguros no se refieren a la realidad).

La ruptura entre la matemática y la realidad se dio por el descubrimiento de otras geometrías, en particular de la geometría hiperbólica. Este tomo introduce a la geometría hiperbólica, una geometría que comparte ciertos aspectos con la geometría euclidiana, pero en otros se comporta de manera muy diferente. También habrá triángulos pero no habrá semejanza, por dar sólo un ejemplo.

A través de construcciones geométricas sencillas se entra en las peculiaridades de este mundo bello y extraño. Al igual que la adquisición de un idioma nuevo hace reflexionar sobre nuestra lengua materna, espero, que esta incursión sirva para que contemplemos y repensemos la geometría que nos rodea. Sugiero acompañar esta lectura con un programa de cómputo de geometría dinámica, como es por ejemplo el *Geometer’s Sketchpad*, para poder experimentar en carne – más bien en mente – propia.

Agradezco a todos los maestros y alumnos, quienes con su crítica han ayudado a que el material tome la forma presente, a J. Bracho, G. Copetti, M. Mejía y C. Prieto por las enriquecedoras discusiones alrededor del tema y a Hernán González por la escrupulosa lectura y el cuidado en encontrar el formato adecuado. Agradezco especialmente a D. Baumgartner, con quien estuve en constante correspondencia durante la última etapa en la elaboración de este texto, por todas las aclaraciones, correcciones y sugerencias que me hizo.

Michael Barot