# Medida e integral de lebesgue en $\mathbb{R}^N$

**Fernando Galaz Fontes**

Centro de Investigación en Matemáticas

OXFORD
UNIVERSITY PRESS

OXFORD
UNIVERSITY PRESS
Antonio Caso 142, San Rafael,
Delegación Cuauhtémoc, C.P. 06470, México, D.F.
Tel.: 5592 4277, Fax: 5705 3738, e-mail: oxford@oupmex.com.mx

Oxford University Press es un departamento de la Universidad de Oxford.
Promueve el objetivo de la Universidad relativo a la excelencia en la investigación, erudición
y educación mediante publicaciones en todo el mundo en

Oxford México

Auckland Bangkok Buenos Aires Calcuta Chennai
Ciudad del Cabo Dar-es-Salaam Delhi Estambul Hong Kong
Karachi Kuala Lumpur Madrid Melbourne Mumbai Nairobi Nueva York
São Paulo Shanghai Singapur Taipei Tokio Toronto

Con compañías afiliadas en Berlín

Oxford es una marca registrada de Oxford University Press en el Reino Unido y otros países.
Publicado en México por Oxford University Press México, S.A. de C.V.

División: Universitaria
Área: Matemáticas

*Sponsor editor:* Jorge Alberto Ruiz González
*Edición:* Ester Alizeri Fernández
Sergio Gerardo López Hernández
*Producción:* Jorge A. Martínez Jiménez

MEDIDA E INTEGRAL DE LEBESGUE EN $I\!R^N$



Miembro de la Cámara Nacional de la Industria
Editorial Mexicana, registro número 723

ISBN 970-613-703-3

Impreso en México — Printed in Mexico

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 — 0 6 0 5 0 4 0 3 0 2

En la composición de esta obra,
realizada en Edigraphos, S.A. de C.V.,
Andador Frambuesa Núm. 24, Col. Jardines de Ecatepec,
Ecatepec, Edo. de México, 55040,
se usaron tipos Kabel (8, 9.5, 11, 12 y 24 pts.),
Century Latex (8 y 11 pts.).
Se terminó de imprimir en el mes de enero de 2002 en
Impresora Castillo Hnos., S.A. de C.V.
Fresno No. 7
Col. del Manto
09830, México, D.F.
sobre papel Bond Editor Alta Opacidad de 75 g

El tiraje fue de 1 000 ejemplares.

# Contenido

# Prefacio

Este libro está pensado como texto para un primer curso sobre medida e integral de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$ y se originó a partir de la cátedra respectiva que el autor ha tenido oportunidad de impartir en varias ocasiones tanto en la licenciatura como en la maestría en Matemáticas en el Centro de Investigación en Matemáticas (CIMAT). Su intención no es desarrollar exhaustivamente la teoría correspondiente, sino buscar una presentación interesante, constituida por temas básicos, que sirva como motivación para un posterior tratamiento abstracto y que en su mayor parte pueda cubrirse a lo largo de un semestre. Aunque esta última condición obliga a dejar a un lado algunos temas importantes, creemos que es útil, ya que, durante su preparación académica, el contacto formal de muchos estudiantes con la integral de Lebesgue es únicamente a lo largo de un curso.

Son seis los capítulos en que se divide el presente trabajo: Preliminares, Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$, Integral de Lebesgue en $\mathbb{R}$, Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$, Integral de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$ y los espacios $\mathcal{L}^1(E)$ y $L^1(E)$. El paso de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^N$ permite hacer la observación fundamental de que la construcción de la integral en $\mathbb{R}$ sólo depende de un número reducido de propiedades sencillas de la medida de Lebesgue, lo cual motiva el concepto abstracto de *medida*. La comparación de una medida abstracta con la medida de Lebesgue lleva naturalmente hacia algunos conceptos en la teoría de la medida que se examinan en los capítulos 4 y 5. Gran parte del desarrollo presentado en los capítulos 4, 5 y 6 es válido en un contexto abstracto. Sin embargo, también se destacan propiedades específicas de la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$. Por ejemplo, en el capítulo 4 se analiza el comportamiento de la medida de Lebesgue respecto a las traslaciones y a las transformaciones lineales. Asimismo, en el capítulo 6 se usa de forma esencial de la estructura topológica en $\mathbb{R}$, es decir, de las propiedades de sus conjuntos abiertos, cerrados y compactos.

Como antecedentes, la mayor parte de este trabajo sólo requiere madurez matemática y familiaridad con los conceptos y las técnicas que se tratan usualmente en un primer curso de Análisis.

Esperamos, por consiguiente, que pueda ser útil tanto para estudiantes de licenciatura como de posgrado. Con este propósito se han incluido un poco más de 200 ejercicios, que se encuentran distribuidos, tanto en número como en dificultad, a lo largo de casi todas las secciones que conforman los distintos capítulos. La mayoría de ellos intenta ayudar en la comprensión de los conceptos y reforzar su manejo. Nunca está de más la recomendación de intentar hacerlos sistemáticamente.

Agradezco con gusto las correcciones y los comentarios realizados a este trabajo por un árbitro anónimo y por Helga Fetter N.

Para terminar, es una enorme satisfacción dedicar este trabajo a todos mis ex alumnos del curso, de quienes, en su momento, siempre he aprendido y sin cuya interacción no hubiera sido posible llevarlo a buen término.

*Fernando Galaz Fontes*
Guanajuato, Gto. 16 de diciembre de 2000

# Introducción

El concepto formal de *integral* fue iniciado por A. Cauchy (1789–1857) y desarrollado por B. Riemann (1826–1866) en la primera mitad del siglo XX. La *integral de Riemann* (como simplemente se le conoce) tiene propiedades muy útiles que permiten tratar satisfactoriamente con una clase grande de funciones, en particular con aquellas definidas sobre un intervalo compacto y son monótonas o continuas por pedazos. Sin embargo, por los dos puntos que comentaremos en seguida, el análisis requiere un conepto de integral más amplio y flexible que el de la integral de Riemann.

El primer punto es que la integración de Riemann sólo se realiza sobre intervalos. El segundo se refiere al comportamiento respecto al límite de funciones. Para fijar ideas, consideremos una sucesión de funciones $\{f_n\}$, donde $n \in \mathbb{N}$ y cada $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ es *R-integrable* (Riemann-integrable), $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Supongamos que la sucesión de funciones converge puntualmente, digamos

$$f_n(x) \to f(x), \quad a \leq x \leq b. \tag{1}$$

La cuestión fundamental estriba entonces en determinar si $f$ es *R-integrable* y, cuando así suceda, establecer si

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n; \tag{2}$$

es decir, si se puede sacar el "límite de la integral".

En general, la convergencia puntual (1) por sí sola no es una condición suficiente para que la función límite $f$ sea integrable y, en el caso en que lo sea, puede suceder que no se cumpla (2). Luego, para concluir que

$f$ es integrable y que (2) se satisface, además de (1) se requieren otras condiciones. Una condición suficiente es que la convergencia sea uniforme en el intervalo $[a, b]$. Desafortunadamente, en la mayoría de las aplicaciones la convergencia uniforme es una condición demasiado fuerte para utilizarse. Esto conduce a intentar establecer criterios adecuados para tratar con límites de funciones.

El concepto de integral introducido por H. Lebesgue (1875-1943) a fines del siglo XIX y principios del XX aparece como respuesta a las cuestiones anteriores.

# 1. Preliminares

El propósito de este capítulo es considerar algunos conceptos generales, relativos a conjuntos y funciones, indispensables para el estudio adecuado de la medida de Lebesgue y, más generalmente, de una medida abstracta. En particular, señalaremos las propiedades que más nos interesan y fijaremos la notación que emplearemos en adelante.

## 1.1. Operaciones con conjuntos

Dada una familia (no-vacía) de conjuntos, $\{A_\alpha : \alpha \in I\}$, su *unión* se denotará por $\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$, y su intersección por $\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha$. Es decir,

$$\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha = \{x \in A_\alpha, \text{ para algún } \alpha \in I\}$$

$$\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha = \{x \in A_\alpha, \text{ para cada } \alpha \in I\}.$$

Si $A$, $B$ y $E$ son conjuntos, observemos que se cumple

$$A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$$

y

$$(A \cup B) \cup E = A \cup (B \cup E), (A \cap B) \cap E = A \cap (B \cap E).$$