

Examen final de álgebra 1

Marco Figueroa, marcant@cimat.mx

8 de diciembre de 2016

Indicaciones: Para cada uno de los siguientes ejercicios, escribe su desarrollo y su solución. Tienes dos horas para este examen y no se vale usar calculadora. Toma tu tiempo, revisa bien tus soluciones y disfruta el examen.

1. Para los conjuntos $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ y $D = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ encuentra su unión, su intersección y las dos posibles restas.

Solución. Como $C \subset D$ tenemos que $C \cup D = D = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$, $C \cap D = C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$. Además, $C \setminus D = \{\} = \emptyset$ y $D \setminus C = \{2, 4, 6, 8, 10, 11, 12, \dots\}$.

2. Encuentra conjuntos E y F tales que su intersección sea $\{2, 3, 5\}$ y su unión sea $\{1, 2, 3, 5, 7, 8, 9\}$. Hay más de una opción de hacerlo.

Solución. Por ejemplo, $E = \{2, 3, 5\}$ y $F = \{1, 2, 3, 5, 7, 8, 9\}$. Hay 16 posibles parejas de conjuntos que cumplen esto. ¿Sabes por qué?

3. Escribe el conjunto $E = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, 5 < x^2 < 81\}$ de manera descriptiva (es decir, escribiendo explícitamente todos sus elementos). Recuerda que \mathbb{Z} es el conjunto de los números enteros.

Solución. Como x debe ser un número entero, la condición $5 < x^2 < 81$ es equivalente a $9 \leq x^2 \leq 64$, por lo que $E = \{-8, -7, -6, -5, -4, -3, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. No hay que olvidar los valores negativos de x .

4. Encuentra el valor de $|-2(-3+2) - 2(3-1)| - |(-2+5)(-3-5)|$.

Solución. $|-2(-3+2) - 2(3-1)| - |(-2+5)(-3-5)| = |-2(-1) - 2(2)| - |(3)(-8)| = |2-4| - |-24| = |-2| - |-24| = 2-24 = -22$.

5. Encuentra el valor de la suma $\frac{7}{84} + \frac{4}{105} + \frac{3}{140}$ y reduce la fracción resultante.

Solución. $\frac{7}{84} + \frac{4}{105} + \frac{3}{140} = \frac{35+16+9}{420} = \frac{60}{420} = \frac{1}{7}$.

6. Encuentra el valor de $\frac{\frac{3}{4} - \frac{7}{10}}{\frac{3}{4} + \frac{7}{10}}$.

Solución. $\frac{\frac{3}{4} - \frac{7}{10}}{\frac{3}{4} + \frac{7}{10}} = \frac{\frac{15-14}{20}}{\frac{15+14}{20}} = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{29}{20}} = \frac{1}{29}$.

7. Escribe el número $6.0\overline{31}$ en la forma $\frac{a}{b}$ con a y b enteros y reduce dicha fracción.

Solución. Si $a = 6.0\overline{31}$ tenemos que $10a = 60.3\overline{1}$ y $1000a = 6031.\overline{31}$. Restando estas dos últimas ecuaciones tenemos que $990a = 5971$ de donde $a = \frac{5971}{990}$ y esta fracción es irreducible.

8. Encuentra el valor de $(-3)^5 - 2^4 + 6^3 + 3^5 + (-4)^2$.

Solución. $(-3)^5 - 2^4 + 6^3 + 3^5 + (-4)^2 = -3^5 - 16 + 6^3 + 3^5 + 16 = 6^3 = 216$.

9. Encuentra el valor de $\frac{-9(5^2-3^2)}{3^3} + \frac{3(-5+10)-2^2(3)}{-5-(-9)}$.

Solución. $\frac{-9(5^2-3^2)}{3^3} + \frac{3(-5+10)-2^2(3)}{-5-(-9)} = \frac{-9(16)}{27} + \frac{15-12}{4} = \frac{-16}{3} + \frac{3}{4} = \frac{-64+9}{12} = -\frac{55}{12}$.

10. Evalúa el polinomio $(-x^2 + x - 1) + (2x^2 - x + 3)$ para $x = -3$ y $x = \frac{1}{2}$.

Solución. Antes de evaluar, podemos notar que $(-x^2 + x - 1) + (2x^2 - x + 3) = x^2 + 2$. Al evaluar en $x = -3$ obtenemos $(-3)^2 + 2 = 9 + 2 = 11$ y en $x = \frac{1}{2}$ obtenemos $(\frac{1}{2})^2 + 2 = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4}$.

11. Reduce al máximo la siguiente fracción $\frac{(2^3)^2(5^3)(3^2)^2}{(5^{-1+6})(4^3)(3^{-5+9})}$.

Solución. $\frac{(2^3)^2(5^3)(3^2)^2}{(5^{-1+6})(4^3)(3^{-5+9})} = \frac{(2^6)(5^3)(3^4)}{(5^5)(2^6)(3^4)} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$.

12. Escribe $2^{-2} + 2^{-4}$ como una fracción y redúcela.

Solución. $2^{-2} + 2^{-4} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{4+1}{16} = \frac{5}{16}$.

13. Escribe los siguientes números en notación científica: 145000, 0.000109 y 0.21. Escribe en notación normal los siguientes números 9.63×10^8 , 2.003×10^2 y 6.023×10^{-10} .

Solución. 1.45×10^5 , 1.09×10^{-4} y 2.1×10^{-1} . 963000000, 200.3 y 0.0000000006023.

14. Con ayuda de la notación científica, escribe en notación científica las siguientes expresiones: 203000×426000000 y $\frac{0.000045}{0.00000012}$.

Solución. $203000 \times 426000000 = (2.03 \times 4.26) \times 10^5 \times 10^8 = 8.6478 \times 10^{13}$. $\frac{0.000045}{0.00000012} = \frac{4.5}{1.2} \times \frac{10^{-5}}{10^{-7}} = 3.75 \times 10^2$.

15. De la ecuación $\frac{a+2b}{2a-1} = m$, despeja a y despeja b .

Solución. Pasando el $2a-1$ al lado derecho obtenemos $a+2b = 2ma-m$. Para despejar b queda $b = \frac{2ma-m-a}{2}$. Para despejar a , pasamos a al lado derecho para obtener $2b+m = 2ma-a$, de donde $a(2m-1) = 2b+m$ y $a = \frac{2b+m}{2m-1}$.

16. Factoriza completamente $x^2a - y^2a + 2x^2 - 2y^2$.

Solución. $x^2a - y^2a + 2x^2 - 2y^2 = a(x^2 - y^2) + 2(x^2 - y^2) = (a+2)(x^2 - y^2) = (a+2)(x+y)(x-y)$.

17. Factoriza completamente $x^6 - y^6$.

Solución. $x^6 - y^6 = (x^3 + y^3)(x^3 - y^3) = (x+y)(x^2 - xy + y^2)(x-y)(x^2 + xy + y^2)$.

18. Factoriza completamente $3x^7 - 6x^5y^4 + 3x^3y^8$.

Solución. $3x^7 - 6x^5y^4 + 3x^3y^8 = 3x^3(x^4 - 2x^2y^4 + y^8) = 3x^3(x^2 - y^4)^2 = 3x^3((x+y^2)(x-y^2))^2 = 3x^3(x+y^2)^2(x-y^2)^2$.

19. Resuelve la siguiente desigualdad $\frac{-2x+3}{5} < \frac{1}{2}$. Escribe la solución con notación de intervalos.

Solución. Multiplicando por 10 en ambos lados obtenemos que $-4x+6 < 5$ de donde $\frac{1}{4} < x$ o $x \in (\frac{1}{4}, \infty)$.

20. Resuelve la siguiente desigualdad doble $4(1-x) \leq -3(x-2) + 2$ y $5(x-2) + 15 \leq 4(x+1)$. Es decir, tienes que encontrar qué valores de x cumplen ambas desigualdades. Escribe la solución con notación de intervalos.

Solución. La primera desigualdad queda $4-4x \leq -3x+6+2$ o $-4 \leq x$. La segunda desigualdad queda $5x-10+15 \leq 4x+4$ o $x \leq -1$. Como queremos que se cumplan ambas tenemos que $-4 \leq x \leq -1$ o $x \in [-4, -1]$.

Acertijo final: Una niña vive en el décimo piso de un edificio. Cuando va a la escuela, toma el elevador desde su piso hasta la planta baja y se va. De regreso, toma el elevador desde la planta baja hasta el piso 8 y de ahí sube al piso 10 por las escaleras. ¿Por qué lo hace?

Solución. La niña no alcanza el botón del piso 10, por lo que oprime el botón del piso más alto que alcanza a oprimir y este es el del piso 8. De bajada no tiene ese problema pues el botón de la planta baja sí lo alcanza.

Muchas gracias por todo su esfuerzo durante el semestre... ¡nos vemos en álgebra 2!

:D