

Tarea 7

Esta tarea está pensada como una guía para el examen del jueves 1 de octubre. El examen tendrá exactamente el mismo formato pero 1) tendrá menos incisos en cada ejercicio, y 2) los ejercicios serán seguramente más fáciles.

1.- Haz una gráfica de las siguientes funciones. Si hay puntos importantes, indícalos en la gráfica. Explica todo lo que hagas.

a) $f(x) = 7 \cdot \text{sen}(2 - 3x) - 9$.

b) $g(x) = 2 + 5x - x^2$.

c)

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \leq 1 \\ 2 + x^2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

2.- Encuentra la derivada de las siguientes funciones.

a) $i(x) = \tan(x^2 - \tan^2(x))$

b)

$$j(x) = \frac{x - \cos(x)}{x \cdot \cos(x) - \frac{1}{x}}$$

c) $k(x) = \text{sen}(e^x) \cdot e^{\text{sen}(x)}$

d) $l(x) = x^x$

3.- Encuentra la ecuación de la recta tangente a la gráfica para las funciones y los puntos indicados.

a) La función i del inciso anterior, en $x = 3$.

b) La función j del inciso anterior, en $x = -1$.

c) La función k del inciso anterior, en $x = 7$.

d) La función l del inciso anterior, en $x = 3$.

4.- Aproxima, utilizando lo que encontraste en el ejercicio anterior, los valores de las funciones en los puntos indicados. ¿Qué tan buenas son estas aproximaciones?

a) El valor de la función i en los puntos $x = 3.01, 3.1$ y 4 .

b) el valor de la función j en los puntos $x = -0.99, -0.9$ y 0 .

c) El valor de la función k en los puntos $x = 7.01, 7.1$ y 6 .

d) El valor de la función l en los puntos $x = \pi$ y e .

5.- **Problema Extra.** En este ejercicio vamos a aproximar el valor de π .

a) En este inciso no debes hacer nada. Es más bien un recordatorio de que, como vimos en clase:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Usaremos este hecho en los siguientes incisos.

b) Recuerda la fórmula

$$\cos(a + b) = \cos(a) \cdot \cos(b) - \sin(a) \cdot \sin(b)$$

De esta fórmula, deduce que para cualquier número x , se cumple

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{x}{2}\right) &= \sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{2}} \\ \cos\left(\frac{x}{2}\right) &= \sqrt{\frac{1 + \cos(x)}{2}} \end{aligned}$$

[Pista: sustituye $a = b = \frac{x}{2}$, y usa la identidad $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$]

c) ¿Cuánto valen $\sin(\pi)$ y $\cos(\pi)$?

d) Utilizando las fórmulas del inciso b) y los valores del inciso anterior, puedes calcular (con ayuda de una calculadora o de mucho tiempo libre) los valores de $\sin(x)$ y $\cos(x)$ para $x = \pi/2$, $x = \pi/4$, $x = \pi/8$ y así sucesivamente, para $x = \pi/2^n$. Conforme el denominador se hace más grande, el valor de x se parece más y más a 0, así que por el límite en el inciso a), si n es muy grande

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{\frac{\pi}{2^n}} \approx 1$$

Por lo tanto, el valor de π es aproximado por

$$\pi \approx 2^n \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$$

Calcula estas aproximaciones para distintos valores de n . ¿Qué tan grande debe ser n para que esta aproximación sea correcta hasta 6 dígitos después del punto decimal?