

## Guía para el examen final

Fecha del examen: 5 dic, 2017

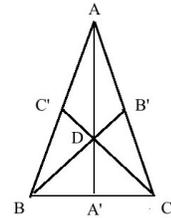
1. Construir, con regla y compás:

- a) Un triángulo rectángulo, dados su hipotenusa y uno de los catetos.
- b) Un triángulo isósceles, dados su base y el ángulo en frente de la base.
- c) Un paralelogramo, dados sus diagonales y uno de sus lados.
- d) Ángulos de: 15, 30, 45, 60, 75, 105 grados. Reto (opcional): 72 grados.
- e) El círculo circunscrito de un triángulo dado; i.e., el círculo que pasa por los 3 vértices del triángulo. (Sugerencia: su centro es la intersección de las mediatrices).
- f) El círculo inscrito de un triángulo dado; i.e., el círculo contenido en el triángulo que es tangente a los 3 lados. (Sugerencia: su centro es la intersección de las bisectrices).
- g) Reto (opcional): un triángulo, dados sus 3 alturas.

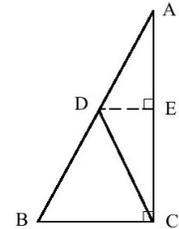
Nota: hay que dar en cada inciso una descripción formal y precisa, siguiendo el ejemplo de la tarea 2.

2. Demostrar:

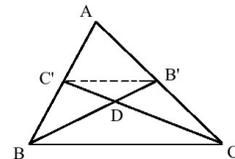
- a) Dado: un triángulo isósceles  $ABC$  con  $AB = AC$  y medianas  $AA', BB', CC'$ . Demuestra: (1)  $AA'$  es una bisectriz. (2)  $AA'$  es una altura. (3)  $BB' = CC'$ .  
(Sugerencia: demuestra que  $\triangle ABA' \cong \triangle ACA'$  por LLL y que  $\triangle ABB' \cong \triangle ACC'$  por LAL)



- b) Dado: un triángulo rectángulo  $ABC$  con hipotenusa  $AB$  y mediana  $CD$ . Demuestra:  $CD = BD$ .  
(Sugerencia: Pasa la perpendicular  $DE$  a la arista  $AC$ . Demuestra que  $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ . Concluya que  $AE = EC$ . Demuestra que  $\triangle ADE \cong \triangle CDE$ ).



- c) Dado:  $\triangle ABC$ , con medianas  $BB'$  y  $CC'$ , intersectando en  $D$ . Demuestra:  $BD = 2DB'$ .  
(Sugerencia: traza el segmento  $CB'$ . Demuestra que  $\triangle AC'B' \sim \triangle ABC$ . Concluye que  $BC = 2C'B'$  y  $BC \parallel C'B'$ . Demuestra que  $\triangle DC'B' \sim \triangle DCB$ . Concluye que  $BD = 2DB'$ .)



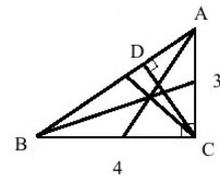
Nota: hay que dar en cada inciso una demostración formal y precisa, acompañada con un dibujo, siguiendo los ejemplos de la tarea 3.

3. Calcular:

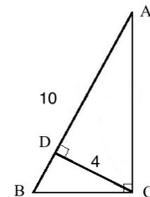
- a) Dados: dos triángulos semejantes,  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ,  $AB = 2$ ,  $BC = 3$ ,  $AC = 4$  y  $A'B' = 5$ . Calcula:  $B'C'$ ,  $A'C'$ .
- b) Dados: dos triángulos semejantes,  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ,  $AB = 2$ ,  $A'B' = 3$  y  $\text{Area}(\triangle ABC) = 10$ . Calcula:  $\text{Area}(\triangle A'B'C')$ .
- c) Dado: un triángulo equilátero, con una altura que mide 3. Calcula: la medida de sus aristas, su área.

d) Dado: un triángulo isósceles, cuya base mide 4 y los lados 8 cada uno. Calcula: la medida de las alturas, las medianas, las bisectrices y el radio de su círculo circunscrito.

e) Dado: un triángulo rectángulo  $ABC$ , catetos  $AC = 3$  y  $BC = 4$ . Calcula: las medidas de la hipotenusa  $AB$ , la altura  $CD$  y las medianas.

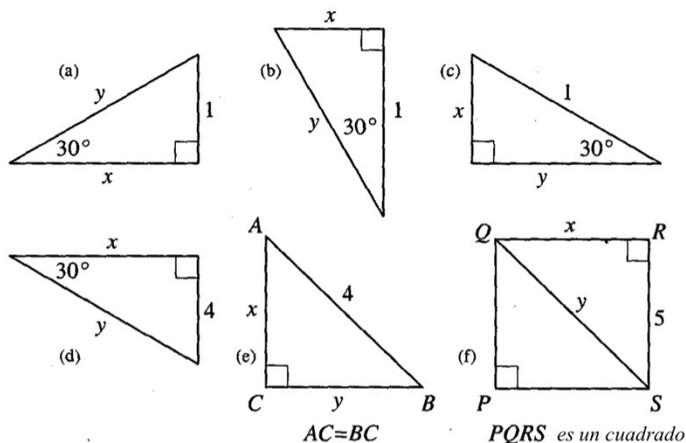


f) Dado: un triángulo rectángulo  $ABC$ , hipotenusa  $AB = 10$  y altura  $CD = 4$ . Calcula: las medidas de los catetos y el área del triángulo.

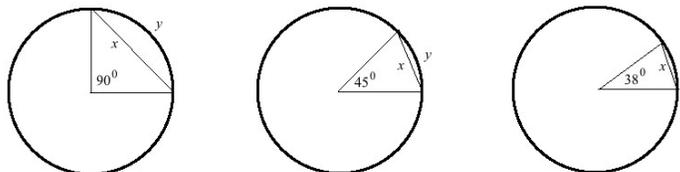


Nota: en cada inciso hay que justificar la cuenta con detalle y precisión, como hemos hecho en la clase.

4. En cada uno de los diagramas abajo, encuentra el valor de  $x$  y  $y$  (sin calculadora).



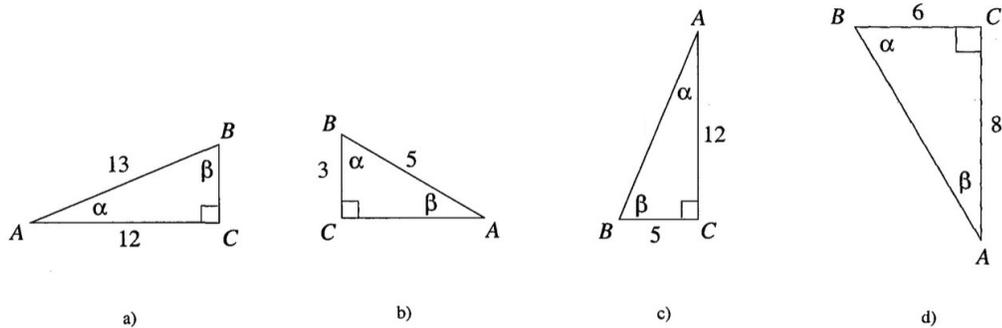
5. En un círculo de radio 7, ¿cuanto mide la cuerda  $x$  y el arco  $y$  de un ángulo central de (a)  $90^\circ$ , (b)  $45^\circ$ , (c)  $38^\circ$ ? (Usa calculadora para el inciso (c)).



6. En cada caso decide si es posible construir un triángulo con las medidas dadas de los lados, y en caso que sí, si el triángulo construido es agudo, rectángulo, o obtuso.

(a)  $\{6,7,8\}$    (b)  $\{3,4,8\}$    (c)  $\{6,8,10\}$    (d)  $\{6,8,9\}$    (e)  $\{5,12,14\}$    (f)  $\{5,12,17\}$

7. Encuentra, sin calculadora,  $\sin \alpha$ ,  $\sin \beta$ ,  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$ ,  $\tan \alpha$ ,  $\tan \beta$  en cada uno de los casos abajo. Después, usa calculadora para encontrar  $\alpha$ ,  $\beta$ .



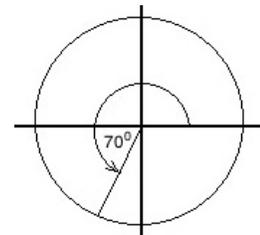
8. Encuentra los siguientes valores sin calculadora, o indica si la expresión dada no está definida.  
 (a)  $\sin 390^\circ$  (b)  $\cos 3720^\circ$  (c)  $\tan 1845^\circ$  (d)  $\sin 315^\circ$  (e)  $\cot 420^\circ$  (f)  $\tan(-30^\circ)$   
 (g)  $\tan 360^\circ$  (h)  $\sin 180^\circ$  (i)  $\cos 180^\circ$  (j)  $\tan 90^\circ$  (k)  $\tan(-270^\circ)$  (l)  $\cos 1140^\circ$ .
9. Resuelve, sin calculadora, las siguientes ecuaciones para el ángulo  $x$  en el rango  $0 \leq x < 360^\circ$ . Da tu respuesta en grados y radianes.  
 (a)  $\sin x = 0$  (b)  $\cos x = 0$  (c)  $\sin x = 1$  (d)  $\cos x = 1$  (e)  $\sin x = -1$   
 (f)  $\cos x = \frac{1}{2}$  (g)  $\sin x = -\frac{1}{2}$  (h)  $\sin^2 x = \frac{1}{2}$  (i)  $\cos^2 x = \frac{3}{4}$
10. Encuentra  $\sin$ ,  $\cos$  y  $\tan$  de los siguientes ángulos sin calculadora:  
 (a)  $\pi/6$  (b)  $\pi/3$  (c)  $\pi/2$  (d)  $2\pi/3$  (e)  $7\pi/6$  (f)  $5\pi/4$  (g)  $3\pi/2$  (h)  $11\pi/6$
11. Dibuja cada uno de los siguientes ángulos  $\alpha$  en posición estándar, y usa el dibujo para expresar  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$ ,  $\tan \alpha$  en términos de  $\sin$ ,  $\cos$  y  $\tan$  de ángulos en el rango  $0 \leq \theta \leq 90^\circ$ .  
 (a)  $160^\circ$  (b)  $320^\circ$  (c)  $-200^\circ$  (d)  $5\pi/7$  (e)  $999^\circ$

**Ejemplo:**  $\alpha = 250^\circ$

$$\sin 250^\circ = -\sin 70^\circ,$$

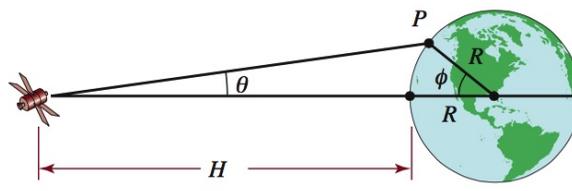
$$\cos 250^\circ = -\cos 70^\circ,$$

$$\tan 250^\circ = \tan 70^\circ.$$

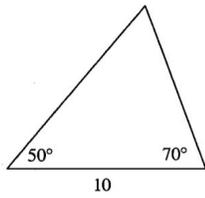


12. Un satélite en órbita sobre el ecuador terrestre, a una altura de  $H = 36,000$  km, localiza una tormenta en  $P$  a un ángulo de  $\theta = 6.5^\circ$ .  
 a) Suponiendo que el radio de la Tierra es (aprox.)  $R \approx 6370$  km, calcule la latitud  $\phi$  de la tormenta.  
 b) Demuestra que los ángulos  $\theta, \phi$  se relacionan por la fórmula

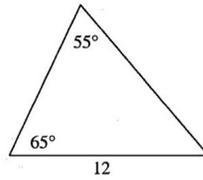
$$\tan \theta = \frac{R \sin \phi}{H + R(1 - \cos \phi)}.$$



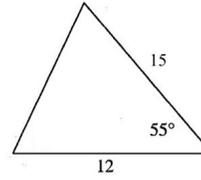
13. Determina las medidas de los lados y ángulos faltantes y el área de los triángulos. (Usa una calculadora).



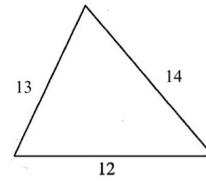
(a)



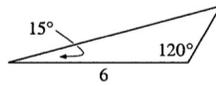
(b)



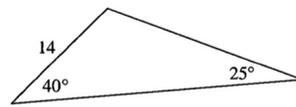
(c)



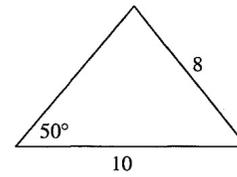
(d)



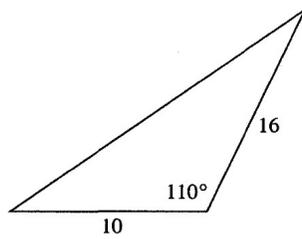
(e)



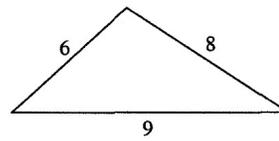
(f)



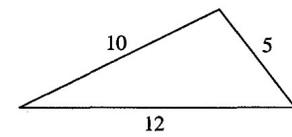
(g)



(h)



(i)



(j)