

valores para  $h$  y  $k$ , y luego se sustituyen los valores obtenidos en  $f(x) = a(x - h)^2 + k$ . Por ejemplo, para la función  $f(x) = -2x^2 - 10x - 13$  del ejemplo 8,  $a = -2$ ,  $b = -10$  y  $c = -13$ ; entonces

$$h = -\frac{b}{2a} = -\frac{-10}{2(-2)} = -\frac{5}{2}$$

$$k = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4(-2)(-13) - (-10)^2}{4(-2)} = -\frac{1}{2}$$

Por lo tanto,

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

$$= -2\left[x - \left(-\frac{5}{2}\right)\right]^2 - \frac{1}{2}$$

$$= -2\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$$

Esta respuesta coincide con la que se obtuvo en el ejemplo 8.

## CONJUNTO DE EJERCICIOS 8.5



### Ejercicios de concepto/redacción

- ¿Cómo se denomina la gráfica de una ecuación cuadrática?
- ¿Cuál es el vértice de una parábola?
- ¿Qué es el eje de simetría de una parábola?
- ¿Cuál es la ecuación para determinar el eje de simetría de la gráfica de  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ?
- ¿Cuál es el vértice de la gráfica de  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ?
- ¿Cuántas intersecciones con el eje  $x$  tiene una función cuadrática si el discriminante es **a)**  $< 0$ , **b)**  $= 0$ , **c)**  $> 0$ ?
- ¿La función  $f(x) = ax^2 + bx + c$  tendrá un máximo o un mínimo si **a)**  $a > 0$ , **b)**  $a < 0$ ? Explique.
- Explique cómo determinar las intersecciones con el eje  $x$  de la gráfica de una función cuadrática.
- Explique cómo determinar las intersecciones con el eje  $y$  de la gráfica de una función cuadrática.
- Considere la gráfica de  $f(x) = ax^2$ . Explique cómo cambia la forma de  $f(x)$  conforme  $|a|$  aumenta y conforme  $|a|$  disminuye.
- Considere la gráfica de  $f(x) = ax^2$ . ¿Cuál es la forma general de  $f(x)$ , si **a)**  $a > 0$ , **b)**  $a < 0$ ?
- Las gráficas de  $f(x) = ax^2$  y de  $g(x) = -ax^2$ , ¿tienen el mismo vértice para cualquier número real,  $a$ , distinto de cero? Explique.
- ¿La función  $f(x) = 3x^2 - 4x + 2$  tiene un valor máximo o mínimo? Explique.
- ¿La función  $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 7$  tiene un valor máximo o mínimo? Explique.

### Práctica de habilidades

En cada caso, determine: **a)** si la parábola abre hacia arriba o hacia abajo; **b)** la intersección con el eje  $y$ ; **c)** el vértice; **d)** las intersecciones con el eje  $x$  (si las hay), y **e)** dibuje la gráfica.

15.  $f(x) = x^2 + 8x + 15$

16.  $g(x) = x^2 + 2x - 3$

17.  $f(x) = x^2 - 4x + 3$

18.  $h(x) = x^2 - 2x - 8$

19.  $f(x) = -x^2 - 2x + 8$

20.  $p(x) = -x^2 + 8x - 15$

21.  $g(x) = -x^2 + 4x + 5$

22.  $n(x) = -x^2 - 2x + 24$

23.  $t(x) = -x^2 + 4x - 5$

24.  $g(x) = x^2 + 6x + 13$

25.  $f(x) = x^2 - 4x + 4$

26.  $r(x) = -x^2 + 10x - 25$

27.  $r(x) = x^2 + 2$

28.  $f(x) = x^2 + 4x$

29.  $l(x) = -x^2 + 5$

30.  $g(x) = -x^2 + 6x$

31.  $f(x) = -2x^2 + 4x - 8$

32.  $g(x) = -2x^2 - 6x + 4$

33.  $m(x) = 3x^2 + 4x + 3$

34.  $p(x) = -2x^2 + 5x + 4$

35.  $y = 3x^2 + 4x - 6$

36.  $y = x^2 - 6x + 4$

37.  $y = 2x^2 - x - 6$

38.  $g(x) = -4x^2 + 6x - 9$

39.  $f(x) = -x^2 + 3x - 5$

40.  $h(x) = -2x^2 + 4x - 5$

Utilizando como guía las gráficas de las figuras 8.13 a 8.16, grafique cada función y determine el vértice.

41.  $f(x) = (x - 3)^2$

42.  $f(x) = (x - 4)^2$

43.  $f(x) = (x + 1)^2$

44.  $f(x) = (x + 2)^2$

45.  $f(x) = x^2 + 3$

46.  $f(x) = x^2 + 5$

47.  $f(x) = x^2 - 1$

48.  $f(x) = x^2 - 4$

49.  $f(x) = (x - 2)^2 + 3$

50.  $f(x) = (x - 3)^2 - 4$

51.  $f(x) = (x + 4)^2 + 4$

52.  $h(x) = (x + 4)^2 - 1$

53.  $g(x) = -(x + 3)^2 - 2$

54.  $g(x) = (x - 1)^2 + 4$

55.  $y = -2(x - 2)^2 + 2$

56.  $y = -2(x - 3)^2 + 1$

57.  $h(x) = -2(x + 1)^2 - 3$

58.  $f(x) = -(x - 5)^2 + 2$

En los ejercicios 59 a 68, **a)** exprese cada función en la forma  $f(x) = a(x - h)^2 + k$ , y **b)** dibuje la gráfica de cada función y determine el vértice.

59.  $f(x) = x^2 - 6x + 8$

60.  $g(x) = x^2 + 6x + 2$

61.  $g(x) = x^2 - x - 3$

62.  $f(x) = x^2 - x + 1$

63.  $f(x) = -x^2 - 4x - 6$

64.  $h(x) = -x^2 + 6x + 1$

65.  $g(x) = x^2 - 4x - 1$

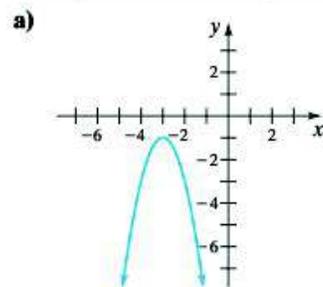
66.  $p(x) = x^2 - 2x - 6$

67.  $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$

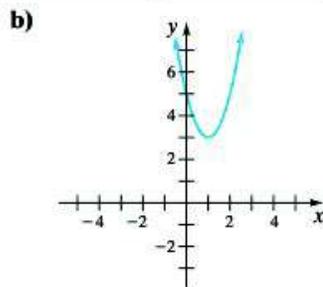
68.  $k(x) = 2x^2 + 7x - 4$

### Resolución de problemas

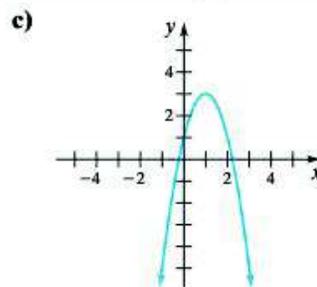
De las funciones de los ejercicios 69 a 72, identifique cuál corresponde a cada una de las gráficas marcadas **a)** a **d)**.



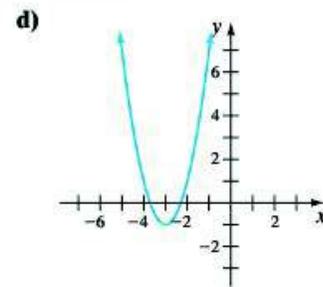
69.  $f(x) = 2(x + 3)^2 - 1$



70.  $f(x) = -2(x + 3)^2 - 1$

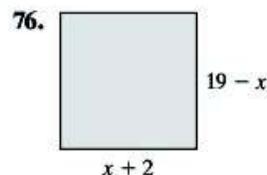
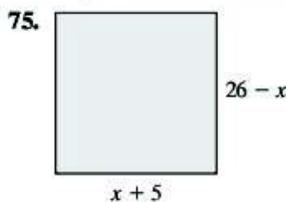
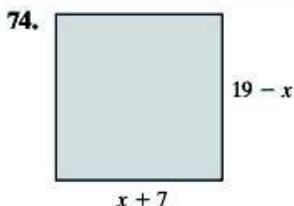
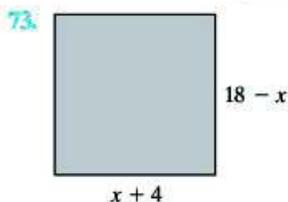


71.  $f(x) = 2(x - 1)^2 + 3$



72.  $f(x) = -2(x - 1)^2 + 3$

**Área** Para cada rectángulo, **a)** determine el valor de  $x$  que da el área máxima, y **b)** determine el área máxima.



77. **Venta de pilas** La función para calcular el ingreso por la venta de  $n$  pilas es  $R(n) = n(8 - 0.02n) = -0.02n^2 + 8n$ . Determine **a)** el número de pilas que deben venderse para obtener el ingreso máximo, y **b)** el ingreso máximo.

78. **Venta de relojes** La función para calcular el ingreso por la venta de  $n$  relojes es  $R(n) = n(25 - 0.1n) = -0.1n^2 + 25n$ . Determine **a)** el número de relojes que deben venderse para obtener el ingreso máximo, y **b)** el ingreso máximo.

79. **Matrícula** El número de alumnos inscritos en una escuela puede calcularse mediante la función

$$N(t) = -0.043t^2 + 1.82t + 46.0$$

donde  $t$  es el número de años desde 1989 y  $1 \leq t \leq 22$ . ¿En qué año se obtendrá el máximo de alumnos inscritos?

80. **Escuelas sanas** En Estados Unidos, el porcentaje de estudiantes que afirman que en sus escuelas se consumen drogas puede calcularse mediante la función

$$f(a) = -2.32a^2 + 76.58a - 559.87$$

donde  $a$  es la edad del estudiante y  $12 < a < 20$ . ¿A qué grupo de edad pertenecen los estudiantes que representan el porcentaje más alto entre los que afirman que en sus escuelas se consumen drogas?

81. ¿Cuál es la distancia entre los vértices de las gráficas de  $f(x) = (x - 2)^2 + \frac{5}{2}$  y  $g(x) = (x - 2)^2 - \frac{3}{2}$ ?

82. ¿Cuál es la distancia entre los vértices de las gráficas de  $f(x) = 2(x - 4)^2 - 3$  y  $g(x) = -3(x - 4)^2 + 2$ ?

83. ¿Cuál es la distancia entre los vértices de las gráficas de  $f(x) = 2(x + 4)^2 - 3$  y  $g(x) = -(x + 1)^2 - 3$ ?

84. ¿Cuál es la distancia entre los vértices de las gráficas de  $f(x) = -\frac{1}{3}(x - 3)^2 - 2$  y  $g(x) = 2(x + 5)^2 - 2$ ?

85. Escriba la función cuya gráfica tiene la forma de la gráfica de  $f(x) = 2x^2$  y su vértice en  $(3, -2)$ .

86. Escriba la función cuya gráfica tiene la forma de la gráfica de  $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$  y su vértice en  $(\frac{2}{3}, -5)$ .

87. Escriba la función cuya gráfica tiene la forma de la gráfica de  $f(x) = -4x^2$  y su vértice en  $(-\frac{3}{5}, -\sqrt{2})$ .

88. Escriba la función cuya gráfica tiene la forma de la gráfica de  $f(x) = \frac{3}{5}x^2$  y su vértice en  $(-\sqrt{3}, \sqrt{5})$ .

89. Considere  $f(x) = x^2 - 8x + 12$  y  $g(x) = -x^2 + 8x - 12$ .  
**a)** Sin graficar, ¿puede comparar las gráficas de las dos funciones?

**b)** ¿Las gráficas tienen las mismas intersecciones con el eje  $x$ ? Explique.

**c)** ¿Las gráficas tienen el mismo vértice? Explique.

**d)** Grafique ambas funciones en los mismos ejes.

90. Analizando el coeficiente principal de una ecuación cuadrática y determinando las coordenadas del vértice de su gráfica, explique cómo se puede determinar el número de intersecciones con el eje  $x$  que tiene la parábola.

91. **Venta de boletos** El Club de Teatro de la preparatoria Johnson trata de establecer el precio de los boletos para una obra. Si el precio es muy bajo no recolectará suficiente dinero para cubrir los gastos, y si es muy alto tendrá poco público. Ellos creen que su ingreso total por representación,  $I$ , en cientos de dólares, puede calcularse mediante la fórmula

$$I = -x^2 + 24x - 44, 0 \leq x \leq 24$$

donde  $x$  es el costo de un boleto.



**a)** Dibuje una gráfica del ingreso contra el costo de un boleto.  
**b)** Determine el costo mínimo de un boleto para que el productor llegue al punto de equilibrio.

**c)** Determine el costo máximo que puede cobrar el productor por cada boleto para llegar al punto de equilibrio.

**d)** ¿Cuánto debe cobrar para recibir el ingreso máximo?

**e)** Determine el ingreso máximo.

92. **Lanzamiento de un objeto** Un objeto se lanza hacia arriba con una velocidad inicial de 192 pies por segundo. La distancia a la que se encuentra el objeto respecto del piso,  $d$ , después de  $t$  segundos, puede calcularse mediante la fórmula  $d = -16t^2 + 192t$ .

**a)** Determine la distancia que habrá entre el objeto y el piso después de 3 segundos.