valores para h y k, y luego se sustituyen los valores obtenidos en $f(x) = a(x-h)^2 + k$. Por ejemplo, para la función $f(x) = -2x^2 - 10x - 13$ del ejemplo 8, $a = -2$, $b = -10$ y $c = -13$; entonces

$$h = -\frac{b}{2a} = -\frac{-10}{2(-2)} = -\frac{5}{2}$$

$$k = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4(-2)(-13) - (-10)^2}{4(-2)} = -\frac{1}{2}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x-h)^2 + k \\ &= -2\left[x - \left(-\frac{5}{2}\right)\right]^2 - \frac{1}{2} \\ &= -2\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Esta respuesta coincide con la que se obtuvo en el ejemplo 8.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 8.5

Ejercicios de concepto/redacción

1. ¿Cómo se denomina la gráfica de una ecuación cuadrática?
2. ¿Cuál es el vértice de una parábola?
3. ¿Qué es el eje de simetría de una parábola?
4. ¿Cuál es la ecuación para determinar el eje de simetría de la gráfica de $f(x) = ax^2 + bx + c$?
5. ¿Cuál es el vértice de la gráfica de $f(x) = ax^2 + bx + c$?
6. ¿Cuántas intersecciones con el eje x tiene una función cuadrática si el discriminante es **a)** < 0, **b)** $= 0$, **c)** > 0?
7. ¿La función $f(x) = ax^2 + bx + c$ tendrá un máximo o un mínimo si **a)** $a > 0$, **b)** $a < 0$? Explique.
8. Explique cómo determinar las intersecciones con el eje x de la gráfica de una función cuadrática.
9. Explique cómo determinar las intersecciones con el eje y de la gráfica de una función cuadrática.
10. Considere la gráfica de $f(x) = ax^2$. Explique cómo cambia la forma de $f(x)$ conforme $|a|$ aumenta y conforme $|a|$ disminuye.
11. Considere la gráfica de $f(x) = ax^2$. ¿Cuál es la forma general de $f(x)$, si **a)** $a > 0$, **b)** $a < 0$?
12. Las gráficas de $f(x) = ax^2$ y de $g(x) = -ax^2$, ¿tienen el mismo vértice para cualquier número real, a, distinto de cero? Explique.
13. ¿La función $f(x) = 3x^2 - 4x + 2$ tiene un valor máximo o mínimo? Explique.
14. ¿La función $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 7$ tiene un valor máximo o mínimo? Explique.

Práctica de habilidades

En cada caso, determine: **a)** *si la parábola abre hacia arriba o hacia abajo;* **b)** *la intersección con el eje y;* **c)** *el vértice;* **d)** *las intersecciones con el eje x (si las hay), y* **e)** *dibuje la gráfica.*

15. $f(x) = x^2 + 8x + 15$
16. $g(x) = x^2 + 2x - 3$
17. $f(x) = x^2 - 4x + 3$
18. $h(x) = x^2 - 2x - 8$
19. $f(x) = -x^2 - 2x + 8$
20. $p(x) = -x^2 + 8x - 15$
21. $g(x) = -x^2 + 4x + 5$
22. $n(x) = -x^2 - 2x + 24$
23. $t(x) = -x^2 + 4x - 5$

24. $g(x) = x^2 + 6x + 13$

25. $f(x) = x^2 - 4x + 4$

26. $r(x) = -x^2 + 10x - 25$

27. $r(x) = x^2 + 2$

28. $f(x) = x^2 + 4x$

29. $l(x) = -x^2 + 5$

30. $g(x) = -x^2 + 6x$

31. $f(x) = -2x^2 + 4x - 8$

32. $g(x) = -2x^2 - 6x + 4$

33. $m(x) = 3x^2 + 4x + 3$

34. $p(x) = -2x^2 + 5x + 4$

35. $y = 3x^2 + 4x - 6$

36. $y = x^2 - 6x + 4$

37. $y = 2x^2 - x - 6$

38. $g(x) = -4x^2 + 6x - 9$

39. $f(x) = -x^2 + 3x - 5$

40. $h(x) = -2x^2 + 4x - 5$

Utilizando como guía las gráficas de las **figuras 8.13** *a* **8.16**, *grafique cada función y determine el vértice.*

41. $f(x) = (x - 3)^2$

42. $f(x) = (x - 4)^2$

43. $f(x) = (x + 1)^2$

44. $f(x) = (x + 2)^2$

45. $f(x) = x^2 + 3$

46. $f(x) = x^2 + 5$

47. $f(x) = x^2 - 1$

48. $f(x) = x^2 - 4$

49. $f(x) = (x - 2)^2 + 3$

50. $f(x) = (x - 3)^2 - 4$

51. $f(x) = (x + 4)^2 + 4$

52. $h(x) = (x + 4)^2 - 1$

53. $g(x) = -(x + 3)^2 - 2$

54. $g(x) = (x - 1)^2 + 4$

55. $y = -2(x - 2)^2 + 2$

56. $y = -2(x - 3)^2 + 1$

57. $h(x) = -2(x + 1)^2 - 3$

58. $f(x) = -(x - 5)^2 + 2$

En los ejercicios 59 a 68, **a)** *exprese cada función en la forma* $f(x) = a(x - h)^2 + k$, *y* **b)** *dibuje la gráfica de cada función y determine el vértice.*

59. $f(x) = x^2 - 6x + 8$

60. $g(x) = x^2 + 6x + 2$

61. $g(x) = x^2 - x - 3$

62. $f(x) = x^2 - x + 1$

63. $f(x) = -x^2 - 4x - 6$

64. $h(x) = -x^2 + 6x + 1$

65. $g(x) = x^2 - 4x - 1$

66. $p(x) = x^2 - 2x - 6$

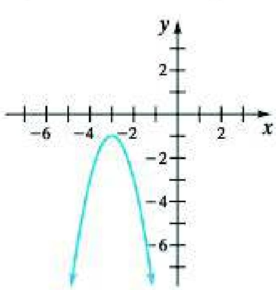
67. $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$

68. $k(x) = 2x^2 + 7x - 4$

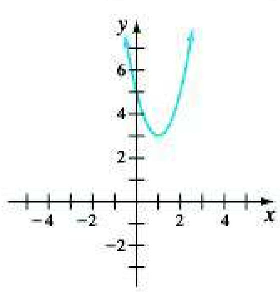
Resolución de problemas

De las funciones de los ejercicios 69 a 72, identifique cuál corresponde a cada una de las gráficas marcadas **a)** *a* **d)**.

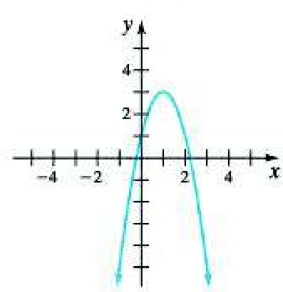
a)



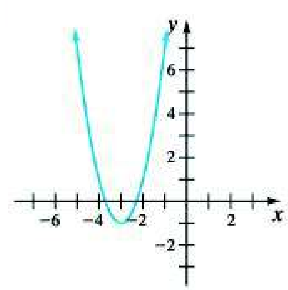
b)



c)



d)



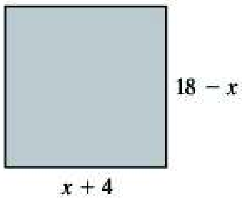
69. $f(x) = 2(x + 3)^2 - 1$

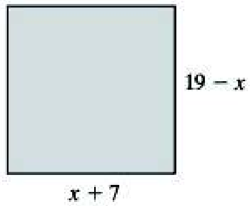
70. $f(x) = -2(x + 3)^2 - 1$

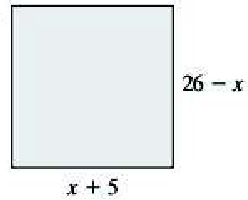
71. $f(x) = 2(x - 1)^2 + 3$

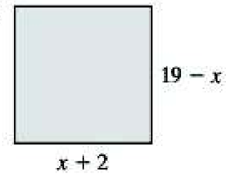
72. $f(x) = -2(x - 1)^2 + 3$

Área *Para cada rectángulo,* **a)** *determine el valor de x que da el área máxima, y* **b)** *determine el área máxima.*

73.


74.


75.


76.


77. **Venta de pilas** La función para calcular el ingreso por la venta de n pilas es $R(n) = n(8 - 0.02n) = -0.02n^2 + 8n$. Determine **a)** el número de pilas que deben venderse para obtener el ingreso máximo, y **b)** el ingreso máximo.

78. **Venta de relojes** La función para calcular el ingreso por la venta de n relojes es $R(n) = n(25 - 0.1n) = -0.1n^2 + 25n$. Determine **a)** el número de relojes que deben venderse para obtener el ingreso máximo, y **b)** el ingreso máximo.

79. **Matrícula** El número de alumnos inscritos en una escuela puede calcularse mediante la función

$$N(t) = -0.043t^2 + 1.82t + 46.0$$

donde t es el número de años desde 1989 y $1 \leq t \leq 22$. ¿En qué año se obtendrá el máximo de alumnos inscritos?

80. **Escuelas sanas** En Estados Unidos, el porcentaje de estudiantes que afirman que en sus escuelas se consumen drogas puede calcularse mediante la función

$$f(a) = -2.32a^2 + 76.58a - 559.87$$

donde a es la edad del estudiante y $12 < a < 20$. ¿A qué grupo de edad pertenecen los estudiantes que representan el porcentaje más alto entre los que afirman que en sus escuelas se consumen drogas?

81. ¿Cuál es la distancia entre los vértices de las gráficas de $f(x) = (x - 2)^2 + \frac{5}{2}$ y $g(x) = (x - 2)^2 - \frac{3}{2}$?

82. ¿Cuál es la distancia entre los vértices de las gráficas de $f(x) = 2(x - 4)^2 - 3$ y $g(x) = -3(x - 4)^2 + 2$?

83. ¿Cuál es la distancia entre los vértices de las gráficas de $f(x) = 2(x + 4)^2 - 3$ y $g(x) = -(x + 1)^2 - 3$?

84. ¿Cuál es la distancia entre los vértices de las gráficas de $f(x) = -\frac{1}{3}(x - 3)^2 - 2$ y $g(x) = 2(x + 5)^2 - 2$?

85. Escriba la función cuya gráfica tiene la forma de la gráfica de $f(x) = 2x^2$ y su vértice en $(3, -2)$.

86. Escriba la función cuya gráfica tiene la forma de la gráfica de $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$ y su vértice en $\left(\frac{2}{3}, -5\right)$.

87. Escriba la función cuya gráfica tiene la forma de la gráfica de $f(x) = -4x^2$ y su vértice en $\left(-\frac{3}{5}, -\sqrt{2}\right)$.

88. Escriba la función cuya gráfica tiene la forma de la gráfica de $f(x) = \frac{3}{5}x^2$ y su vértice en $(-\sqrt{3}, \sqrt{5})$.

89. Considere $f(x) = x^2 - 8x + 12$ y $g(x) = -x^2 + 8x - 12$.
   a) Sin graficar, ¿puede comparar las gráficas de las dos funciones?
   b) ¿Las gráficas tienen las mismas intersecciones con el eje x? Explique.
   c) ¿Las gráficas tienen el mismo vértice? Explique.
   d) Grafique ambas funciones en los mismos ejes.

90. Analizando el coeficiente principal de una ecuación cuadrática y determinando las coordenadas del vértice de su gráfica, explique cómo se puede determinar el número de intersecciones con el eje x que tiene la parábola.

91. **Venta de boletos** El Club de Teatro de la preparatoria Johnson trata de establecer el precio de los boletos para una obra. Si el precio es muy bajo no recolectará suficiente dinero para cubrir los gastos, y si es muy alto tendrá poco público. Ellos creen que su ingreso total por representación, I, en cientos de dólares, puede calcularse mediante la fórmula

$$I = -x^2 + 24x - 44, \; 0 \leq x \leq 24$$

donde x es el costo de un boleto.

   a) Dibuje una gráfica del ingreso contra el costo de un boleto.
   b) Determine el costo mínimo de un boleto para que el productor llegue al punto de equilibrio.
   c) Determine el costo máximo que puede cobrar el productor por cada boleto para llegar al punto de equilibrio.
   d) ¿Cuánto debe cobrar para recibir el ingreso máximo?
   e) Determine el ingreso máximo.

92. **Lanzamiento de un objeto** Un objeto se lanza hacia arriba con una velocidad inicial de 192 pies por segundo. La distancia a la que se encuentra el objeto respecto del piso, d, después de t segundos, puede calcularse mediante la fórmula $d = -16t^2 + 192t$.
   a) Determine la distancia que habrá entre el objeto y el piso después de 3 segundos.

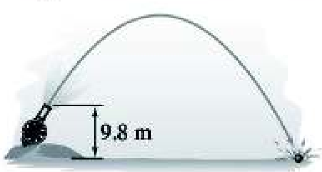
b) Haga una gráfica de la distancia contra el tiempo.
c) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el objeto?
d) ¿En qué momento alcanzará su altura máxima?
e) ¿En qué instante el objeto chocará contra el piso?

93. **Utilidad** Una compañía productora de alimento para aves obtiene una utilidad semanal de acuerdo con la función $f(x) = -0.4x^2 + 80x - 200$, donde x es el número de bolsas de alimento para aves fabricadas y vendidas.
a) Determine el número de bolsas de alimento para aves que debe vender la compañía para obtener la utilidad máxima.
b) Determine la utilidad máxima.

94. **Utilidad** Una mueblería especializada en mecedoras obtiene una utilidad semanal de acuerdo con la función $f(x) = -1.2x^2 + 180x - 280$, donde x es el número de mecedoras fabricadas y vendidas.
a) Determine el número de mecedoras que la mueblería debe vender en una semana para obtener la utilidad máxima.
b) Determine la utilidad máxima.

95. **Disparo de un cañón** Si un cañón se dispara desde una altura de 9.8 metros por arriba del suelo, a cierto ángulo, la altura de la bala respecto del suelo, h, en metros en el instante t, en segundos, se determina por medio de la función.

$$h(t) = -4.9t^2 + 24.5t + 9.8$$

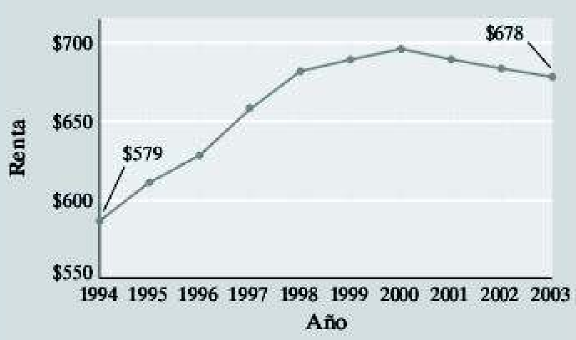


a) Determine la altura máxima que alcanza la bala del cañón.
b) Determine el tiempo que tarda la bala para llegar a su altura máxima.
c) Determine el tiempo que tarda la bala en chocar contra el suelo.

96. **Lanzamiento de un balón** Ramon Loomis lanza un balón al aire con una velocidad inicial de 32 pies por segundo. La altura del balón en cualquier instante, t, está dada por la fórmula $h = 96t - 16t^2$. ¿En qué instante el balón llega a su altura máxima? ¿Cuál es la altura máxima?

97. **Alquiler de una casa** La gráfica siguiente muestra la renta mensual promedio de un apartamento en el condado de Maricopa, Arizona (complejos de 50 o más apartamentos), de 1994 a 2003.

Renta promedio en el condado de Maricopa

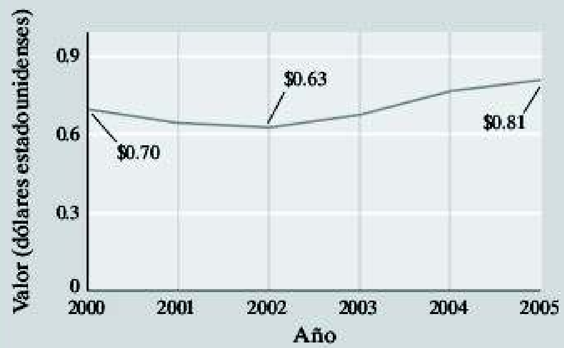


Fuente: RealData, Departamento de comercio de Estados Unidos, Oficina de Análisis Económico, *Arizona Republic* (12 de diciembre de 2004)

Se puede emplear la función $r(t) = -2.723t^2 + 35.273t + 579$ para calcular la renta mensual promedio de un apartamento en el condado de Maricopa, en donde t es el número de años desde 1994.
a) Si suponemos que la tendencia continúa, estime la renta mensual promedio de un apartamento en el condado de Maricopa en 2007.
b) ¿En qué año la renta mensual promedio de un apartamento fue máxima?

98. **Dólar canadiense** La gráfica siguiente muestra el valor de un dólar canadiense en dólares estadounidenses, el 22 de febrero de cada año, de 2000 a 2005.

Dólar canadiense en dólares estadounidenses
El 22 de febrero de cada año:



Fuente: Banco de Canadá, Oanda.com USA Today (23 de febrero de 2005)

Se puede usar la función $C(t) = 0.019t^2 - 0.074t + 0.702$ para calcular el valor de un dólar canadiense en dólares estadounidenses para el 22 de febrero de cada año, donde t es el número de años desde 2000.
a) Si suponemos que la tendencia continúa, estime el valor de un dólar canadiense, en dólares estadounidenses, el 22 de febrero de 2008.
b) ¿El 22 de febrero de qué año fue máximo el valor de un dólar canadiense, en dólares estadounidenses?

99. **Diseño de interiores** Jake Kishner está diseñando los planos de su casa. ¿Cuál es el área máxima posible de una habitación si su perímetro será de 80 pies?

100. **Área máxima** ¿Cuáles son las dimensiones que debe tener un jardín rectangular para alcanzar su área máxima, si el perímetro será de 70 pies?

101. **Producto mínimo** ¿Cuál es el producto mínimo de dos números que difieren en 8 unidades? ¿Cuáles son los números?

102. **Producto mínimo** ¿Cuál es el producto mínimo de dos números que difieren en 10 unidades? ¿Cuáles son los números?

103. **Producto máximo** ¿Cuál es el producto máximo de dos números cuya suma da por resultado 60? ¿Cuáles son los números?

104. **Producto máximo** ¿Cuál es el producto máximo de dos números cuya suma da por resultado 5? ¿Cuáles son los números?