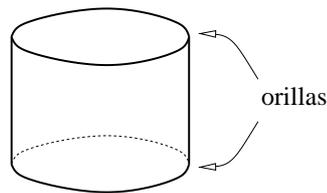


Un Vistazo hacia la Geometría Moderna

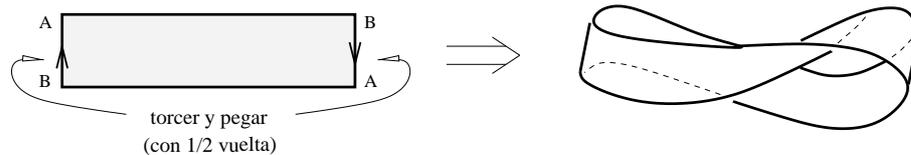
(“El zoológico topológico”)

En el taller vimos algunos ejemplos de objetos geométricos con propiedades “topológicas” curiosas. Estas propiedades son las que no cambian aun cuando se deforme el objeto (pero sin romperlo). Recapturamos aquí en estas notas algunos de estos ejemplos y dejamos algunos retos.

El **cilindro** es una superficie que tiene dos **caras** (“afuera” y “adentro”) y dos **orillas** (el círculo superior, lo de la tapa, y el círculo inferior, lo de la base.)



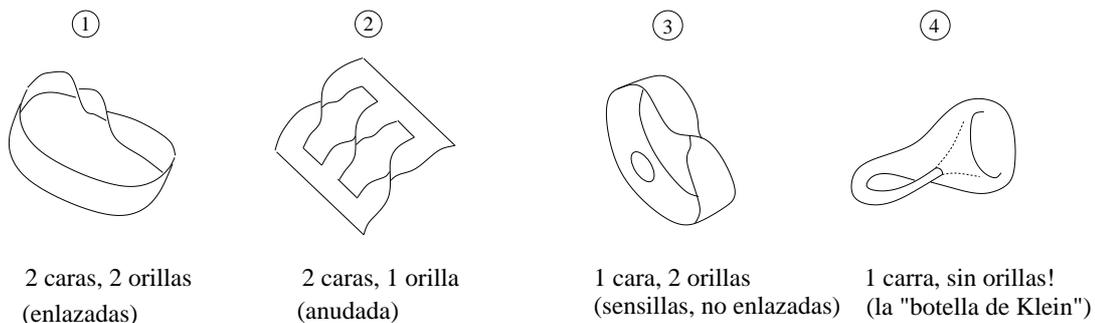
¿Existe una superficie con **una** cara y **una** orilla? La respuesta es **sí**, y es la banda de Möbius:



Construye una banda de Möbius de papel, y examinala con cuidado para convencerte de que tiene solo una cara y solo una orilla. (“Una cara” quiere decir que puedes viajar continuamente de un lado del papel al otro, sin tener que cruzar una orilla; “una orilla” quiere decir que los puntos de la orilla forman solo una pieza (curva cerrada) y no digamos dos piezas, como en el caso del cilindro.)

Podemos seguir de la misma manera: existe una superficie con dos caras y una orilla? con una cara y dos orillas? con una cara y **ninguna** orilla?

La respuesta a todas estas preguntas (y muchas mas) es “sí”, y vimos algunos ejemplos de tales cosas en la plástica. Aquí estan:

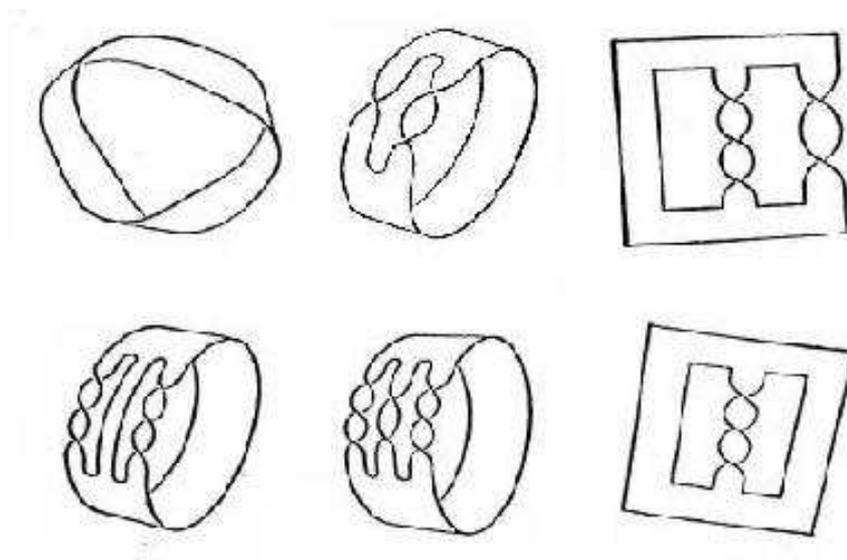


Estas propiedades (número de caras y orillas) son ejemplos de propiedades topológicas, y no cambian aun si deformamos los objetos (sin romperlos). De hecho, hay otra propiedad interesante de estas superficies: en el cilindro, las dos orillas estan separadas, mientras uno puede preguntar si existe una superficie con digamos dos caras y dos orillas, tal que las dos orillas estan **enlazadas** (“enredadas”).

El ejemplo (1) arriba es un ejemplo de tal superficie.

Tambien puede pasar, cuando una superficie tiene una sola orilla, que esta orilla esté **anudada** (hecha un nudo). Esto ocurre en el ejemplo (2) arriba.

Ahora intente a decidir, para cada uno de los siguientes ejemplos, si las orillas estan enredadas o no, y en caso de una sola orilla si forma un nudo.



Tomando una de estas superficies raras, hay otra cosa “irresistible” que uno pueda hacer: hacer un modelo de ellas en papel y cortarlas con tijeras. Para algunas de ellas obtenemos resultados bastante sorprendentes. Por ejemplo: es bastante famoso que si cortas a la banda de Möbius a lo largo de su “ecuador” obtienes una sola pieza (y no dos, como en el caso del cilindro). Pero que pasa si la cortamos no a lo largo del ecuador sino a lo largo de una linea que esta a una distancia de la orilla que es un tercio de la anchura de la banda? Te recomendamos intentarlo.

Hay un “truco de magia” asociado con estos cortes que lo puedes hacer facilmente. Hay una superficie que se contruye de manera similar a la banda de Möbius, pero que antes de pegarla, en lugar de darle solamente media vuelta (como en la banda de Möbius), uno le da mas vuelta. Si la construyes correctamente, y luego la cortas a lo largo del ecuador, lo que se obtiene es una sola pieza, pero con nudo! Puedes encontrar esta superficie?

Armado con papel, tijeras, diurex, curiosidad e imaginación, puedes así seguir explorando las propiedades topológicas de superficies. Si te gusta este tipo de actividad también te sugerimos consultar la hoja de internet del “Rincon de Problemas” del Centro de Investigación en Matemáticas en Guanajuato, en [http : //www.cimat.mx/ciencia_para_jovenes/rincon/](http://www.cimat.mx/ciencia_para_jovenes/rincon/).

Gil Bor
CIMAT, Gto.
gil@ciamat.mx