**Solución de Problema 15, por José Hernández Santiago**

a) Encuentra los últimos dos dígitos de $2^{1998}$.

b) Encuentra los últimos tres dígitos de $2^{1998}$.

a) Encuentra los últimos cinco dígitos de $2^{1998}$.

**Solución.**[1] Es suficiente con resolver c). Empezamos entonces con la identidad

$$2^{10} = 1024 = (5^2 \cdot 41 - 1).$$

Elevando el binomio $(5^2 \cdot 41 - 1)$ a la potencia 199 y reduciendo el resultado módulo $5^5$ se obtiene que

$$(2^{10})^{199} \equiv \binom{199}{197}(5^2 \cdot 41)^2(-1)^{197} + \binom{199}{198}(5^2 \cdot 41)(-1)^{198} + (-1)^{199} \pmod{5^5}.$$

Dado que la expresión en el lado derecho de la congruencia es

$$-(199)(99)(5^4)(5 \cdot 8 + 1)^2 + (199)(5^2)(41) - 1$$

se sigue que

$$\begin{aligned}
2^{1990} &\equiv -(199)(99)(5^4) + (199)(5^2)(41) - 1 \pmod{5^5} \\
&\equiv -(200-1)(100-1)(5^4) + (200-1)(5^2)(40+1) - 1 \pmod{5^5} \\
&\equiv -5^4 + (200 - 40 - 1)(5^2) - 1 \pmod{5^5} \\
&\equiv (5^2)(200 - 40 - 1 - 5^2) - 1 \pmod{5^5} \\
&\equiv (25)(134) - 1 \pmod{5^5} \\
&\equiv 3349 \pmod{5^5} \\
&\equiv 224 \pmod{5^5}
\end{aligned}$$

y por tanto $2^{1998} \equiv (256)(224) \pmod{10^5}$.

Como $(256)(224) = 57344 \in [1, 10^5]$, el teorema chino del resto asegura que no hay otro número $X \in [1, 10^5]$ tal que $2^{1998} \equiv X \pmod{10^5}$. Ergo, los últimos cinco dígitos de $2^{1998}$ son $5, 7, 3, 4$ y $4$.

$\square$

[1] J. H. S.