“Buscando los mecanismos del caos”

“Taller de ciencia para jóvenes, UNAM-Morelia, 2004”

Notas por Jesús Muciño Raymundo,
con la colaboración de Juan Bañuelos López.

Instituto de Matemáticas, UNAM, Campus Morelia.

Índice General

0.1 Introducción.

Un fenómeno que cambia con el tiempo es *“caótico”* si a primera vista no podemos hallar un “patrón”en su comportamiento a lo largo del tiempo. Por ejemplo: la posición de la luna respecto a la tierra no es caótica pues guarda un patrón. Un segundo ejemplo es: el número de bacterias en una caja de Petri tampoco es caótico, primero aumenta y al agotarse los nutrientes en la caja su número decae a cero. Mientras que las fechas en las que ocurre un temblor de magnitud significativa en la Cd. de México si es un fenómeno caótico. Los lugares y fechas en los que se presentan huracanes, también forman un fenómeno caótico.

Una de las (des)agradables sorpresas en las matemáticas de los últimos treinta años ha sido el descubrimiento de que fenómenos descritos por reglas muy, pero muy, sencillas resultan ser caóticos. Es apasionante el problema de decidir cuando un fenómeno (tomado de la matemática o de la naturaleza) presentará un comportamiento caótico.

– Desde el punto de vista de las matemáticas; se quiere entender los mecanismos que originan que un fénomeno sea caótico.

– No se tiene una respuesta nítida hoy en día sobre cuales son los mecanismos que originan el comportamiento caótico.

– Es interesante en aplicaciones el predecir cuando fenómenos tomados de; física, economía, ecología, manejo de recursos naturales, etc., presentarán comportamientos caóticos.

El objetivo de las notas es describir fenómenos no caóticos y fenomenos caóticos, usando objetos matemáticos sencillos; rectas, parábolas, y bichos así. Nuestro laboratorio esta formado por hojas de papel, regla y lápiz. Cuando haga falta usaremos la computadora para mirar los fenómenos a escalas grandes o pequeñas; con ello la computadora a veces es como un telescopio y otras como un microscopio (lo que resulta ser un laboratorio más de acuerdo a nuestros tiempos).

El "Chaos Lab" de la Universidad de Bremen, tiene programas gratuitos que corren con Java y permiten explorar el comportamiento caótico, ver:
www.cevis.uni-bremen.de/fractals/nsfpe/
Chaos_Lab/CLresources/BFdirections.html

o bien buscar con google "Chaos Lab Bremen".

0.2 La matemática como ciencia de los modelos.

¿ Qué es la matemática ?, sin duda es una pregunta complicada. ¡ Quizá hay tantas respuestas como matemáticos hay ! Considerando el objetivo de estas notas nos conviene decir que:

"la matemática es la ciencia de los modelos".

La primera consecuencia de esto es que:

"la matemática es la ciencia donde los experimentos son más baratos".

¿ Qué significado tiene "la ciencia de los modelos" ?

Ejemplo 0.1. Los números naturales; 1, 2, 3,... etc. son un modelo.

Ejemplo 0.2. El calcular el área del piso de una habitación rectángular mediante $(base) \times (altura)$ es un modelo (este modelo siempre ayuda a ahorrar tiempo y dinero, v.g. al comprar una alfombra o mandar hacer un piso con losetas).

Evidentemente los modelos y su estudio constituyen algo útil. Un ejemplo dramático de esto es el siguiente:

Ejemplo 0.3. *El modelo de Erastótenes para calcular la longuitud del ecuador terrestre.*
El problema de Erastótenes (hacia el siglo III A. C.) consiste en estimar la longitud E del ecuador terreste.
Se tiene como *hipótesis* el hecho de que la tierra es esférica. Naturalmente la hipótesis de que es esférica no es fácil de obtener/verificar, pues la tierra a priori podría tener otra forma, ver figura 0.1.

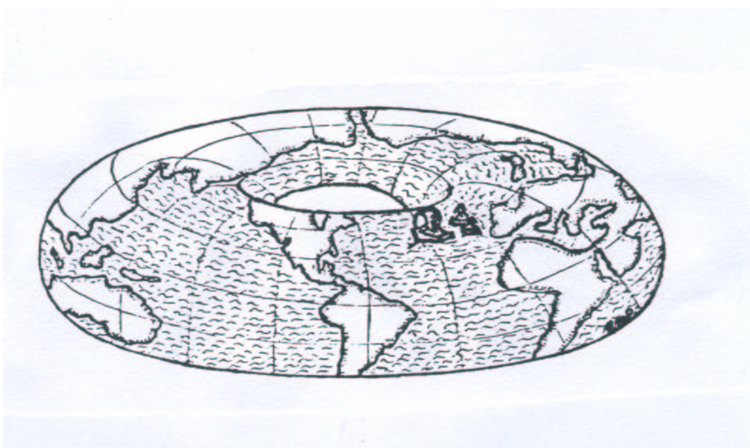

Figura 0.1: ¿ La tierra era plana hace 2300 años ?

La solución rudimentaria para conocer la longitud del ecuador terrestre sería recorrer un ecuador y medir su distancia. Evidentemente esta solución requiere de medios prácticos mucho más avanzados de los que disponia Erastótenes. El lector recordará que los primeros viajeros en dar la vuelta a la tierra fueron el portugués Fernando de Magallanes $(1480-1521)$ y el español Juan Sebastian Elcano $(1476-1526)$, en su expedición marítima del siglo XVI.

La solución con el modelo de Erastótenes es como sigue:
Erastótenes usa como hipótesis el hecho de que los rayos solares llegan paralelos a la tierra, ver figura 0.2.

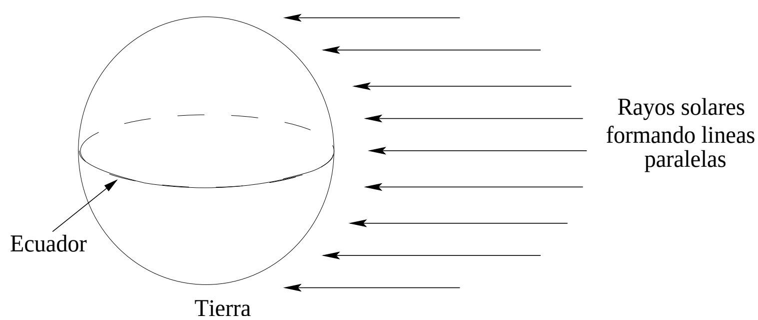

Figura 0.2: Rayos solares llegando a la tierra.

Erastótenes observa que los rayos solares en la ciudad de Cirene (también llamada Asuán) al sur de Egipto, cierta fecha de verano a mediodía, caen perpendiculares a la superficie terrestre. La misma fecha de otro año, hace una observación similar desde Alejandría (ciudad al norte de Cirene), estableciendo ahora que la inclinación de los rayos solares era ahí de 9^o grados. La distancia entre Alejandría y Cirene era conocida, apróximadamente 1000 kilómetros actuales, ver figura 0.3.

Una regla de tres le permite ordenar la información:

$$\frac{1000}{9^o} = \frac{E}{360^o} .$$

Esta forma de acomodar la información es realmente un punto crucial en la construcción del modelo, una vez ordenados los datos así todo será sencillo. ¿ Por qué Erastotenes está en lo cierto al escribir esta igualdad ? Trate el lector de explicarlo por sí mismo.

Finalmente se obtiene la respuesta despejando

$$E = \frac{1000 \times 360}{9} = 40000 \text{ kilómetros.}$$

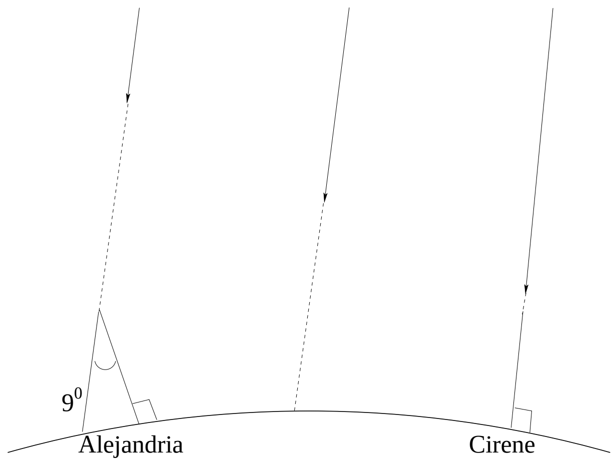

Figura 0.3: La medición de Erastótenes.

El modelo de Erastótenes exhibe claramente las virtudes y defectos de la matemática como “ciencia de los modelos”.

Virtudes:
– El modelo nos ahorra trabajo.
– El modelo nos permite “predecir” (Erastótenes no requirio dar la vuelta a la tierra).
– El modelo capta solo algunos aspectos del problema que nos interesa, es una simplificación (por ejemplo, no necesitamos considerar a las montañas o valles de la tierra).
– El modelo es universal, esto es, aplíca a muchas otras situaciones (un marciano o un selenita pueden usar el modelo, para medir el ecuador de Marte, la Luna etc.).
– El modelo ahorra dinero, pues es mucho más barato que dar la vuelta a la tierra para hacer la medición.
Etc.

Defectos:
– El modelo puede ocultar algunos aspectos esenciales del problema (ahora sabemos que la tierra no es perfectamente esférica, es achatada por los polos).
– Los resultados del modelo deben contrastarse con los resultados experimentales; hoy sabemos que el ecuador terrestre mide 40076 kilómetros

apróximadamente. Cabe notar que diversas fuentes, dan distintos valores a las mediciones de Erastótenes con respecto a grados y distancias.
– El modelo resulta inexacto a ciertas escalas (haciendo la segunda medición no en Alejandría, sino solo a 10 kilómetros al norte de Cirene, el modelo predice que la tierra es plana, esto es una esfera de radio infinito, trate el lector explicarlo por sí mismo).
– Al buscar mejorar las predicciones del modelo; se complican las matemáticas (queda de tarea al lector meditar como mejorar el modelo). Etc.

Ejercicio. Considera un mapa plano de los cinco continentes de la tierra, pensado como un modelo de la esfera terrestre. Determina algunas virtudes y defectos del modelo.

La paradoja del Dr. Frankenstein. Quizá lo más relevante para el estudioso de las matemáticas es que: una vez que hemos creado el modelo; *"el modelo posee "vida" propia, y no tiene por que predecir lo que apriori deseamos, no nos obedece".* A esto le llamamos la paradoja del Dr. Frankenstein. Esta es una novela de Mary W. Shelley, el argumento es; el sabio Dr. Frankenstein osa corromper a la vida y a la muerte el crear a un monstruo de partes de cuerpos sin vida. Una vez con vida el monstruo no obedece a su creador el Dr. Frankenstein. La novela llevada al cine en 1931, es una película clásica de horror.

La paradoja de Pablo Picasso. La idea de "ciencia de los modelos" no es única de la matemática, aparece en muchas otras actividades humanas, en las que se desea describir un fenómeno del mundo real. Por ejemplo en las artes, más precisamente en la pintura; el artista observa el objeto ó fenómeno del mundo real (un paisaje, una persona, etc). Hace una abstracción de ello y lo lleva a su lienzo. Lo que ha pintado no necesariamente corresponde con el objeto ó fenómeno observado, sino que ha enfatizado algunas de sus propiedades y ocultando a su vez otras. Por ejemplo en la figura 0.5 mostramos dos cuadros de Pablo Picasso (1881 – 1973) correspondientes a la misma persona y donde es evidente la diferencias cualitativas de ambos lienzos como modelo del mismo fenómeno. La paradoja es: "*un mismo objeto ó fenómeno del mundo real admite muchos modelos*". Esto se repite también en las matemáticas, como "ciencia de los modelos", al codificar un objeto ó fenómeno y llevarlo al "lienzo matemático" enfatizamos y ocultamos diversas propiedades, del mismo.

Figura 0.4: Cartel de la película "Frankenstein".

0.3 Sobre la dificultad de hablar de matemáticas: decodificar y codificar.

Una de las dificultades naturales para hablar de matemáticas (y para hacer uso de ellas), es que sus objetos y modelos son (muy) abstractos, esto es; *estan codificados.*

Para comunicarnos mejor debemos a aprender a decodificiarlos.

Veamos algunos ejemplos, empezemos con uno realmente elemental.

Ejemplo 0.4. *Decodificando la suma* $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$. Impulsados de cierta decidia la respuesta (equivocada) usual es

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3} \stackrel{?}{=} \frac{1+1}{2+3} = \frac{2}{5}.$$

Cualquier persona que haya cortado (al menos mentalmente) un pastel en mitades o en tercios, sabrá que la respuesta anterior es errónea.
¡ Necesitamos hacer un *experimento* para hallar la respuesta !

El experimento es obvio; partir un pastel en piezas de tipo $1/k$ tal que $1/2$ y $1/3$ de pastel, puedan expresarse como múltiplos enteros de la

 

Figura 0.5: Dos retratos de Ambroise Vollard pintados por Pablo Picasso en $1909-1910$ y 1915 respectivamente.

pieza $1/k$. El experimento ha decodificado el problema y la expresión, finalmente es nítido que $1/k = 1/6$ es la pieza buscada y

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{2}{6}+\frac{3}{6}=\frac{5}{6}\ .$$

Ejemplo 0.5. *Decodificando* $(x+y)^2$. De nuevo un alumno decidioso ó temeroso del álgebra se sentirá impulsado con cierto simplismo a escribir

$$(x+y)^2 \stackrel{?}{=} x^2+y^2.$$

Sorprendentemente lo anterior puede ser verdadero; si $x=0$ ó $y=0$ ó ambos $x=y=0$. Pero para los casos donde $x \neq 0$ y $y \neq 0$ no es verdadero lo anterior. Lo verificamos con un *experimento*, si $x=2$, $y=3$, tenemos

$$(2+3)^2 = 5^2 = 25 \neq 13 = 4+9 = 2^2+3^2.$$

De nuestro primer curso de álgebra sabemos que

$$(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2,$$

¿ qué significa lo anterior ? Evidentemente hay "algo" codificado ahí. Decodificarlo es explicarlo. Una forma de decodificarlo con álgebra es

$$
\begin{aligned}
(x+y)^2 &= (x+y)(x+y)\\
&= x(x+y)+y(x+y)\\
&= x^2+xy+yx+y^2\\
&= x^2+2xy+y^2.
\end{aligned}
$$

Reescribiendo el *experimento* anterior, si $x=2$, $y=3$, entonces

$$(2+3)^2 = 2^2+2(2\times 3)+3^2 = 25 = (5)^2 = (2+3)^2$$

y ¡ el experimento verifica la fórmula algebráica !

Otra forma de decodificarlo con geometría es como sigue:

¡ Hagamos un *experimento* con hojas de papel ! Imaginemos dos segmentos de linea recta uno de longitud x y otro de longuitud y. Si alineamos ambos segmentos tenemos un nuevo segmento de longuitud $(x+y)$. ¿ Como interpretar $(x+y)^2$? Recordando que en un rectángulo

$$(\acute{a}rea) = (base)\times(altura),$$

construimos un cuadrado de base $(x+y)$ y altura $(x+y)$. Entonces $(x+y)^2$ es el área del cuadrado.

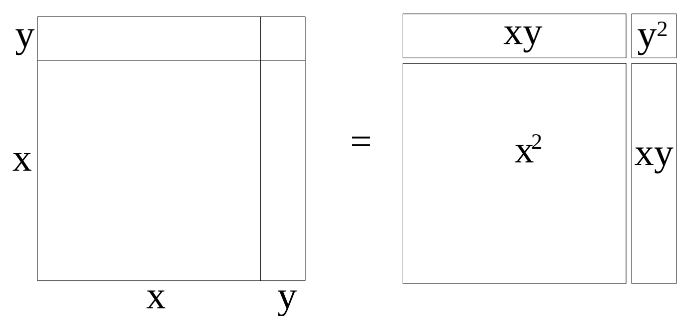

Figura 0.6: Decodificando a $(x+y)^2$.

Usando los rectángulos en la figura, $(x+y)^2$ puede verse como la suma de;
x^2, es el área de un cuadrado de lados x,
y^2, es el área de un cuadrado de lados y,
$2xy$, es el área de dos rectángulos de lados x, y.

La fórmula ha sido decodificada geométricamente, la figura describe el experimento. Ahora

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

es tan cierto para nosotros como que $1+1=2$. Podemos decir que:

"Hacer matemáticas es explicar".

Ejercicio 0.6. *Decodificar* $(x+y)^3$. De nuestro primer curso de álgebra sabemos que

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3.$$

Sugerencia para explicar lo anterior use:

$$(volumen) = (base) \times (profundidad) \times (altura),$$

y la figura 0.7.

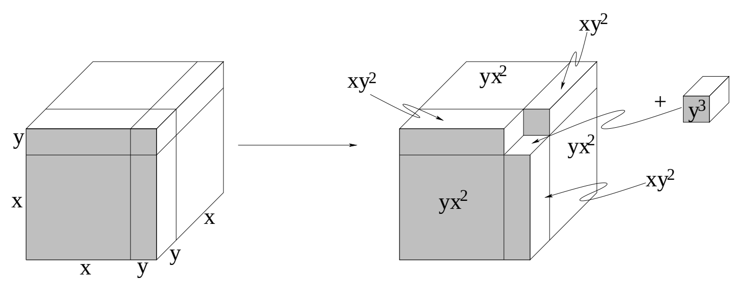

Figura 0.7: Decodificando a $(x+y)^3$.

La paradoja del Dr. Frankenstein se manifiesta en que $(x+y)^n$ codifica el n–volumen de un cubo n–dimensional de lados cuya longuitud es $(x+y)$.

¡ Hemos creado un objeto nuevo que existe independientemente de nuestra voluntad !

Para $n \geq 4$ no podemos dibujar $(x+y)^n$, pero este objeto existe.

Veamos ahora la dirección inversa; tomaremos un objeto cotidiano y trataremos de codificarlo con un objeto matemático.

Necesitamos primero un poco de lenguaje matemático, que será el lenguaje en el que vamos a codificar.

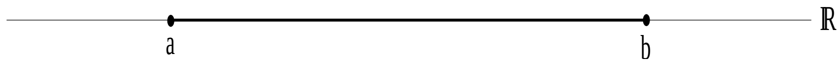

Figura 0.8: Un intervalo cerrado.

Definición 0.7. Un intervalo cerrado es un conjunto del tipo

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \ ,$$

donde $\mathbb{R}$ es la recta de números reales, ver figura 0.8.

Definición 0.8. Una función

$$\begin{aligned} f : [a, b] &\to [c, d] \\ x &\to f(x) \end{aligned}$$

es una ley o correspondencia tal que a cada número $x \in [a, b]$ le asocia un único número llamado $f(x) \in [c, d]$, ver figura 0.9.

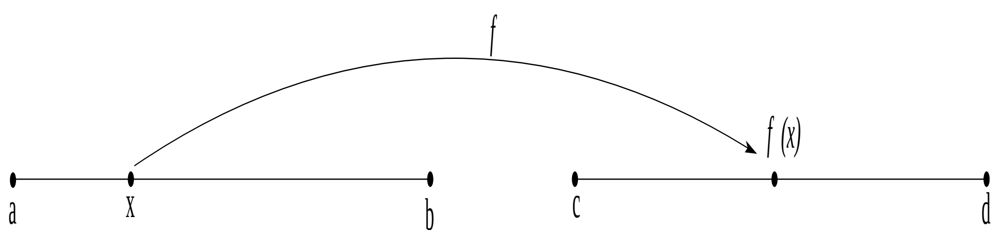

Figura 0.9: Una función.

Burdamente dicho una función $f : [a, b] \to [c, d]$ es como una máquina; introducimos un número $x \in [a, b]$ y obtenemos otro número $f(x) \in [c, d]$, ver figura 0.10.

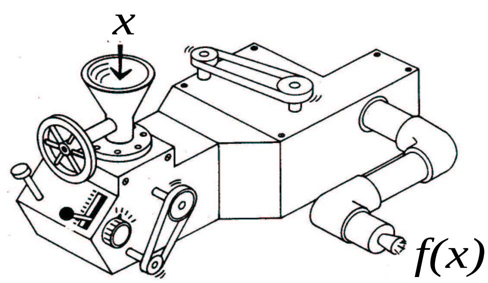

Figura 0.10: La función $f(x)$ vista como una máquina.

Ejemplo 0.9. *Codificando la distancia.* Consideremos un punto x en la recta de números reales $\mathbb{R}$, si le asignamos su distancia al origen $0 \in \mathbb{R}$, obtenemos una función

$$|x| : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \{\text{distancia de } x \text{ a } 0\} \ .$$

La gráfica de esta función es la figura 0.11.

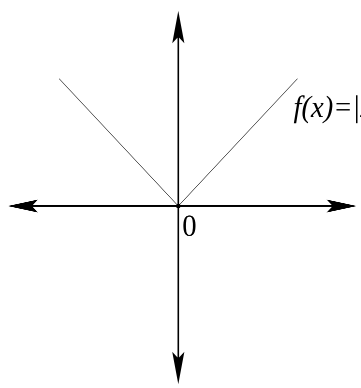

Figura 0.11: Gráfica de la función $f(x) = |x|$ distancia al origen.

La "fórmula algebráica" de esta función es

$$x \xrightarrow{f} |x| = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Podemos observar que la figura 0.9 y la fórmula han "codificado" a la distancia.

Ejemplo 0.10. *Codificando una liga.* Consideremos una liga de hule elástica. Supongamos que tomamos la liga y la estiramos al cuatrúple de su longitud. ¿ Cómo podemos expresar matemáticamente el desplazamiento de los puntos en la liga?

Una manera de hacerlo es como sigue: asignamos números de 0 a L en biyección con los puntos de la liga, donde L es la longitud de la liga esto es, a cada número $x \in [0, L]$ le corresponde un y un solo punto en la liga.

Al estirar la liga por el extremo L, dejando en su lugar a 0, obtenemos una función

$$x \overset{f}{\mapsto} 4x$$

cuya gráfica es una recta que pasa por el origen y tiene pendiente 4, ver figura 0.12.

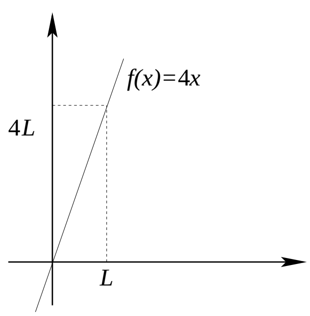

Figura 0.12: Gráfica de la función $f(x) = 4x$.

Tenemos el siguiente resultado (¡ codificado !):

Lema 0.11. La función $f(x) = mx + c$ (cuya gráfica es una recta);
– expande si $|m| > 1$,
– contrae si $1 > |m| \geq 0$,
– preserva distancias si $|m| = 1$.

Trate el lector de "decodificar" (o explicar) en sentido de las tres afirmaciones. "Hacer matemáticas es explicar".

Por ejemplo si $|m| > 1$, digamos para fijar ideas que $m = 3.7$ Si dos puntos x_1 y x_2 estan a distancia M entre sí en la recta, al aplicarles la función $f(x)$ los nuevos puntos $f(x_1)$ y $f(x_2)$ estan a distancia $(3.7)M$; esto es, la distancia entre ellos se ha expandido por un factor 3.7.

Queda como ejercicio al lector explicar completamente el significado del Lema.

Ejemplo 0.12. *Expander y doblar.* Consideremos una liga de longitud 1. Deseamos expanderla al doble, doblarla y volverla a colocar en su lugar original, ver figura 0.13 ¿ Cómo podemos codificar con matemáticas esta transformación ?

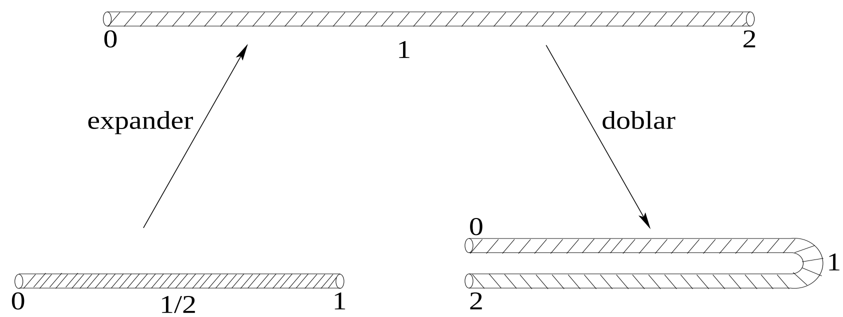

Figura 0.13: Expander y doblar.

Con nuestra experiencia anterior y un poco de geometría analítica, proponemos a la función, determinada por la siguiente fórmula algebráica.

$$x \overset{f}{\mapsto} \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \leq x \leq 1/2, \\ -2x+1 & \text{si } 1/2 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Trate el lector de explicarlo por sí mismo. Su gráfica se ve como en la figura 0.14.

¡ Con todo esto hemos codificado la transformación !

El *experimento* asociado es obvio; tomar una liga verdadera de longitud 1 (unidades), marcar en ella 5 ó 7 puntos arbitrarios, aplicarle a la liga la transformación de expander y doblar, finalmente, verificar que las nuevas posiciones de los puntos marcados están exactamente donde prescribe la fórmula algebráica para $f(x)$. Esto es, $f(x)$ "predice" las nuevas posiciones de los puntos.

"Hacer matemáticas es explicar".

Ejemplo 0.13. *Expander y enrrollar.* Consideremos una liga de longitud 1. Deseamos expanderla al doble y luego enrrollarla volviendola a

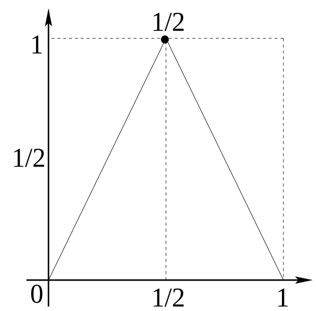

Figura 0.14: Función que expande y dobla.

colocar en el lugar original, ver figura 0.15 ¿ Cómo podemos codificar con matemáticas esta transformación ?

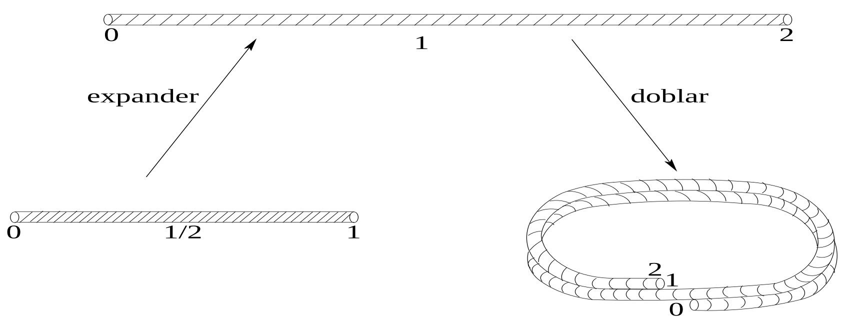

Figura 0.15: Expander y enrrollar.

Con nuestra experiencia anterior y un poco de geometría analítica, proponemos a la función, con la siguiente fórmula algebráica.

$$x \overset{f}{\mapsto} \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \leq x \leq 1/2, \\ 2x-1 & \text{si } 1/2 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

La gráfica de esta función es la figura 0.16.

De nuevo la fórmula y la gráfica de f, codifican nuestra transformación de "expander y enrrollar".

El experimento asociado es obvio; tomar una liga verdadera de longuitud 1 (unidades), marcar en ella 5 o 7 puntos arbitrarios, aplicarle a la liga la transformación de expander y enrollar, finalmente, verificar que las nuevas posiciones de los puntos estan exactamente donde prescribe la fórmula algebráica para $f(x)$.

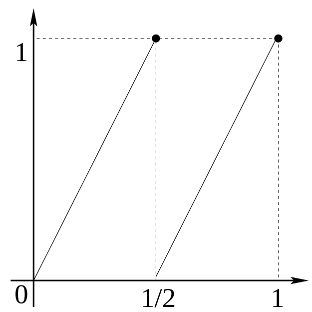

Figura 0.16: Función que expande y enrrolla.

"Hacer matemáticas es explicar".

0.4 Sistemas dinámicos discretos.

Estamos ya listos para:

> *" proponer un modelo matemático para*
> *fenómenos que cambian con el tiempo"*

Por simplicidad no vamos a deducir como surge el modelo, pero como es sencillo en los primeros ejemplos se apreciara que el modelo si cumple su cometido.

Los modelos matemáticos para "fenómenos que cambian con el tiempo" que consideramos estas notas son como sigue:

Elegimos un intervalo de "valores posibles que puede asumir el fenómeno que deseamos estudiar"

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \ ,$$

donde $\mathbb{R}$ son los números reales, al conjunto $[a, b]$ le llamamos *el espacio de estados del sistema.* Cada $x \in [a, b]$ representa un posible valor que puede asumir el fénomeno que deseamos estudiar, por ejemplo x puede ser; el número de habitantes en una población, una temperatura, la proporción de cierto tipo de átomos en una substancia etc.

Es permitido hacer observaciones de nuestro fenómeno en intervalos de tiempo Δt, donde Δt es una unidad de tiempo adecuada al fenómeno, con ello podemos pensar *el tiempo de sistema* como la colección de tiempos

$$\{0 \cdot \Delta t, 1 \cdot \Delta t, 2 \cdot \Delta t, 3 \cdot \Delta t, ...\}$$

o escrito de forma más abreviada

$$\{0, 1, 2, 3, ...\} \ = \{n\} = \mathbb{N} \cup \{0\} \ ,$$

donde $\mathbb{N}$ son los números naturales.

Consideraremos una función $f : [a, b] \to [a, b]$, y definimos que;
– si $x \in [a, b]$ es un estado del sistema al tiempo n, entonces
– $f(x) \in [a, b]$ nos proporciona el estado del sistema correspondiente al tiempo $n + 1$.
A $f(x)$ le llamamos *la ley de evolución del sistema.*

Con ello tenemos que si x_0 es el estado del sistema al tiempo $n = 0$, entonces;

$$\begin{array}{rl} f(x_0) & \text{es el estado del sistema al tiempo } n = 1, \\ f(f(x_0)) & \text{es el estado del sistema al tiempo } n = 2, \\ f(f(f(x_0))) & \text{es el estado del sistema al tiempo } n = 3, \\ \vdots & \qquad\qquad\qquad \vdots \end{array}$$

donde $f(f(x_0))$ significa que al valor $f(x_0)$ le aplicamos nuevamente la función, a esta operación le llamamos iteración.
Quizá es más gráfico escribir la evolución de un punto x_0 bajo el sistema dinámico como (ver figura 0.17):

$$x_0 \mapsto f(x_0) \mapsto f(f(x_0)) \mapsto f(f(f(x_0)))...$$

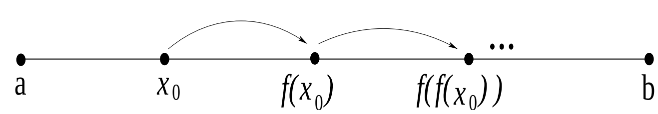

Figura 0.17: La evolución de un punto x_0 bajo $f(x)$.

Pensando a la ley de evolución como una máquina la figura 0.18 nos da otra explicación de lo que es un sistema dinámico.

Definición 0.14. Un *sistema dinámico discreto* es una terna

$$\{[a,b] \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, f(x)\},$$

donde

$[a,b]$	es un intervalo cerrado de números, que describe el espacio de estados del sistema,
n	son los tiempos en el sistema,
$f(x)$	es la función, que determina la ley de evolución del sistema.

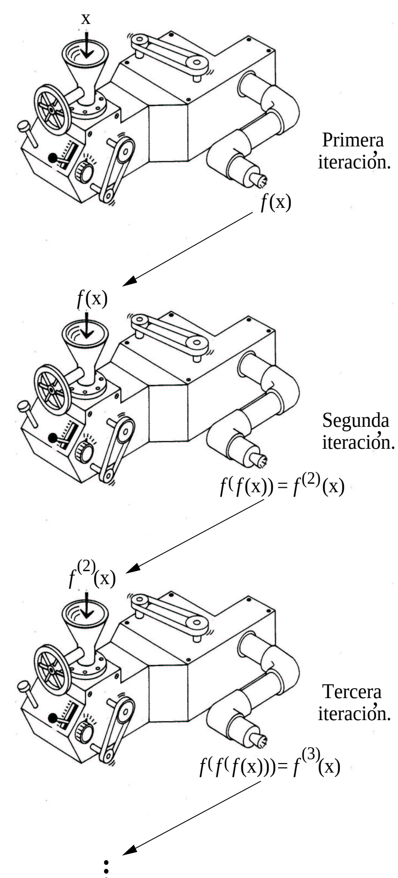

Figura 0.18: El sistema dinámico de la función $f(x)$.

Veamos algunos ejemplos “aplicados”.

Ejemplo 0.15. *El amigo incómodo.* Supongamos que tenemos un amigo que cada vez que nos encuentra nos pide la mitad del dinero que traemos en la bolsa. Si pensamos que $x \in \mathbb{R}$ es el dinero que traemos y la ley de evolución es

$$f(x) = x/2.$$

Podemos preguntarnos: ¿ empezando con \$ 1320, cuanto tardará nuestro “amigo” en dejarnos con menos de \$ 1 ? ¿ Si nuestro dinero fuese infinitamente divisible nuestro “amigo” podría dejarnos sin dinero en un tiempo finito n ?

Ejemplo 0.16. *Los inversionistas.* Tenemos \$10,000 en el banco el cúal nos paga 0.12 % anual, por tener nuestro dinero ahí. ¿ Cuanto dinero tenemos después de 3 años ? ¿ Cuantos años debemos esperar para tener \$15,000 ?

Ejemplo 0.17. *El calculista obsesivo.* Provisto de una calculadora un niño marca un número x y aprieta n veces la tecla raíz cuadrada $\sqrt{\ }$. La ley de evolución es

$$f(x) = \sqrt{x}.$$

¿ Si el niño empieza con $x = 64$ que número verá en la pantalla después de apretar la tecla de la raíz cuadrada cinco veces ?, ¿ después de cien veces ?

Ejemplo 0.18. *El modelo de Malthus para poblaciones.* Consideremos x como el número de individuos de una especie en un hábitat (peces, árboles, etc.). Supondremos (las siguientes hipótesis biólogicas del modelo, esto significa, cínicamente que no las explicaremos aquí) que:
- los recursos del hábitat son ilimitados,
- la población se encuentra aislada,
- la población es homogénea,
- el hábitat es homogéneo.
- la capacidad reproductiva de cada individuo es como rx, donde $r > 0$ es una constante biológica que depende de la especie.

Por ejemplo, si una especie de bacteria tarda $1 \cdot \Delta t$ unidades de tiempo en duplicar su número, entonces $r = 2$ para esa especie de bacteria.
El *modelo de Maltus*, describe el cambio en la población y es como sigue; si a tiempo $n \cdot \Delta t$ tenemos x individuos en la población, entonces al

transcurrir un intervalo de tiempo Δt tenemos que el nuevo número de individuos es:

$$f(x) = rx \ .$$

El modelo se debe al economista inglés Thomas Robert Malthus ($1776-1884$). Si la población de México paso de 96 millones de habitantes a 100 millones en un periódo Δt de $1995-2000$. ¿ Cuanto vale r para el modelo de Malthus respectivo ? ¿ Cuantos años son necesarios para que esa población alcanze los 150 millones ? (No hay por que, asustarse, el modelo de Malthus no predice bien para tiempos "grandes").

Ejemplo 0.19. *Un modelo de explotación forestal ó pesquera.* Supongamos que tenemos un amigo que cada vez que nos encuentra nos pide 12 pesos del dinero que traemos y después nos da 20 % el dinero que nos quedo, habiendo empezado con 50 pesos; ¿ después de muchas veces de encontrarlo cuanto dinero tenemos ?

Lo anterior, que parece un simple juego, nos lleva al modelo más simple de explotación forestal ó pesquera.

En efecto; supongamos que consideramos la explotación de un recurso forestal ó pesquero, cada año extraemos una cantidad fija H unidades del recurso, y cada año el recurso se restituye por sí mismo en 20 % de las unidades presentes al inicio del año. La ley de evolución del sistema es

$$f(x) = 1.20(x - H).$$

Empezando con $x_0 = 50000$ unidades y extrayendo cada año 12000 unidades, ¿ como se comporta el recurso cuando el tiempo va a infinito, aumenta o se extingue ?

Más importante aún ¿ cúal será la máxima cantidad del recurso que podemos extraer por año sin forzar la extinción del recurso?

0.5 El algoritmo de la telaraña.

Introducimos más lenguaje, asociado a un sistema dinámico tenemos los siguientes dos conjuntos.

– El conjunto de las funciones que resultan de aplicar la función n–veces,

$$\{f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), ..., \text{etc. }\},$$

usamos para ellas la notación

$$f^{(n)}(x) = f(...f(x)...), \quad \text{con } n \text{ repeticiones de } f.$$

A la función $f^{(n)}(x) : [a,b] \to [a,b]$ le llamamos la *n–ésima iterada de f*.
– Dado un punto $x_0 \in [a,b]$ tenemos el conjunto de todos los puntos que visita x_0 en $[a,b]$ bajo las iteradas de f, este conjunto se escribe como

$$\mathcal{O}(x) = \{x_0, f(x_0), f(f(x_0)), f(f(f(x_0))), ...\} \subset [a,b] \ ,$$

a este conjunto le llamamos la *órbita de x_0 bajo f*.

Nuestro problema es;

¿ como visualizar ó entender la órbita de x_0 bajo f ?

Dada $f : [a,b] \to [a,b]$, nos interesa dar un método gráfico que permita visualizar las órbitas de f. Tenemos el siguiente o algoritmo (ver figura 0.19):

Paso 1. Dibujamos la gráfica de f en el plano cartesiano, esto es dibujamos en el plano todos los puntos de la forma $\{(x, f(x))\} \subset \mathbb{R}^2_{xy}$.
Paso 2. Dibujamos la gráfica de la recta $y = x$, esta es una recta diagonal de pendiente uno que pasa por el origen en $\mathbb{R}^2_{xy}$.
Paso 3. Supongamos que partimos de $x_0 \in [a,b]$, gráficamos el punto $(0, x_0)$ en el eje x.
Paso 4. Trazamos el segmento de recta vertical que une el punto $(x_0, 0)$ con $(x_0, f(x_0))$.
Paso 5. Trazamos el segmento de recta horizontal que une el punto $(x_0, f(x_0))$ con $(f(x_0), f(x_0))$.
Paso 6. Trazamos el segmento de recta vertical que une el punto $(f(x_0), f(x_0))$ con $(f(x_0), f(f(x_0)))$.
Paso 7. Trazamos el segmento de recta horizontal que une el punto $(f(x_0), f(f(x_0)))$ con $(f(f(x_0)), f(f(x_0)))$.
Etc.

Al seguir el algoritmo obtenemos en el plano una poligonal (formada por segmentos verticales y horizontales) que describe como evoluciona x_0 bajo f cuando el tiempo n avanza a infinito.

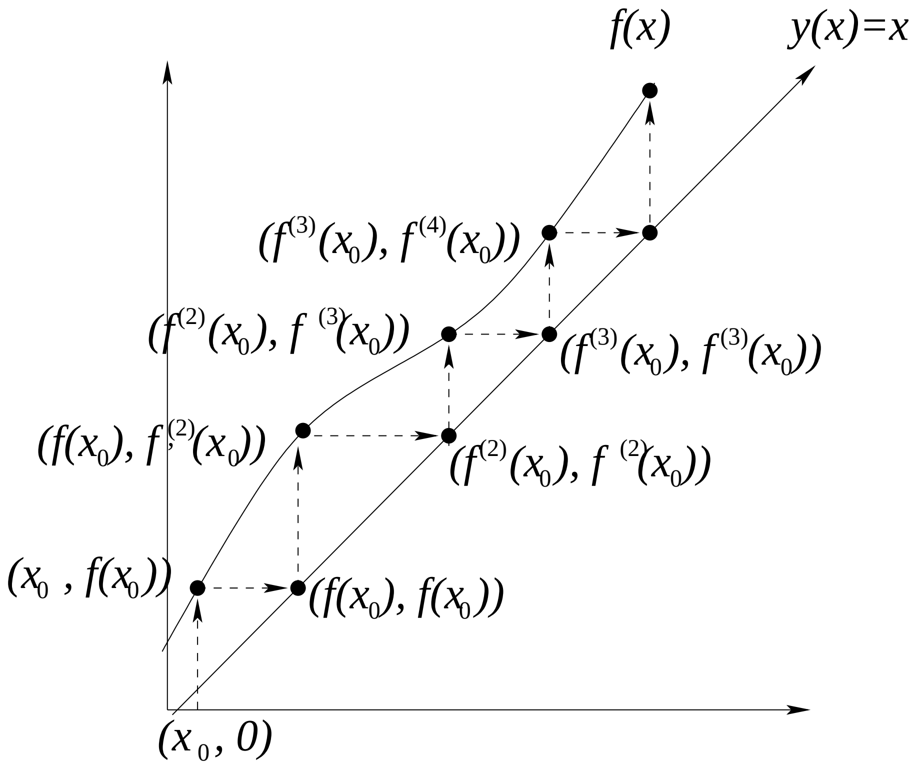

Figura 0.19: El algoritmo de la telaraña.

Ejemplo 0.20. El nombre del algoritmo es evidente cuando lo aplicamos para $f(x) = -(0.7)x$, ver figura 0.20.

Hablando con sinceridad el algoritmo de la telaraña trabaja bien para ciertos comportamientos de f pero es insuficiente para comportamientos complicados, como veremos más adelante.

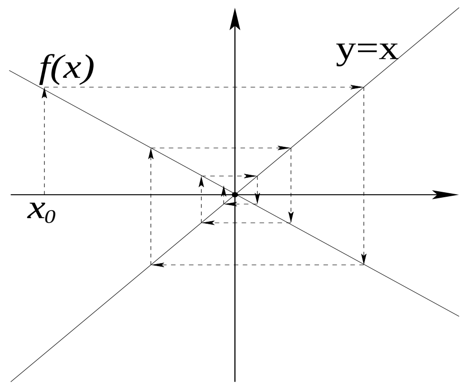

Figura 0.20: El algoritmo de la telaraña para $f(x) = -(0.7)x$.

0.6 El problema fundamental: predecir el comportamiento del sistema al futuro.

Dado un sistema dinámico cuya ley de evolución es $f : [a, b] \to [a, b]$, *el problema fundamental* es: describir para todo punto inicial x_0 como se comporta la órbita respectiva

$$\mathcal{O}(x_0) = \{x_0, f(x_0), f(f(x_0)), f(f(f(x_0))), ...\} \subset [a, b]$$

cuando el tiempo n va a infinto.

Coloquialmente una órbita es como un listado ó un papiro, ver figura 0.21, con una colección de números

$$\begin{aligned} x_0 &= x_0 \\ x_1 &= f(x_0) \\ x_2 &= f(f(x_0)) \\ x_3 &= f(f(f(x_0))) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Un sistema dinámico es una biblioteca de papiros (a cada condición inicial $x_0 \in [a, b]$ le corresponde un papiro)

$$x_0 \mapsto \mathcal{O}(x_0).$$

El problema fundamental es;
describir el último número al final de cada papiro.

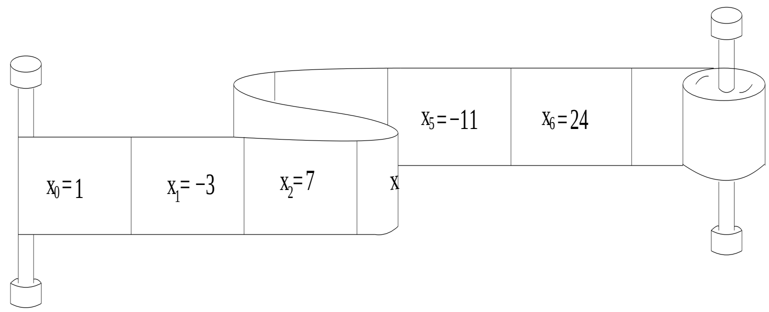

Figura 0.21: La órbita de x_0 bajo f, como un listado de números.

Con esta redacción es difícil decir que tipo de respuesta podemos esperar "al último número al final de cada papiro". Es más explícito mencionar algunos comportamientos típicos que pueden aparecer:
– puntos fijos; i.e. puntos que no se mueve bajo f.
– puntos periódicos de orden $k \geq 2$; i.e. puntos x_* que visitan k lugares de forma periódica bajo f,
– puntos que caen bajo f a un punto fijo,
– puntos con órbitas densas; i.e. son puntos errantes bajo f.
Vamos a describir estos cuatro casos en detalle.

0.7 Catálogo de comportamiento de las órbitas.

Definición 0.21. Decimos que $x_* \in [a, b]$ es un *punto fijo* de f si la órbita $\mathcal{O}(x_*)$ consta únicamente del punto x_*, esto es, $f(x_*) = x_*$.

Pictóricamente un punto fijo se queda sin moverse bajo f, ello se ve como en la figura 0.22.

Técnicas para detectar este comportamiento: Los puntos fijos pueden detectarse resolviendo la ecuación

$$f(x) = x,$$

donde x es la incógnita. Los puntos fijos los detectamos gráficamente como la intersección de la gráfica de $f(x)$ con la gráfica de $y = x$ (que es la recta de pendiente uno por el origen en el plano), ver figura 0.22.

Ejemplo 0.22. Los puntos fijos para $f(x) = x^2$ son dos 0 y 1. Los puntos fijos para $f(x) = x^3$ son tres -1, 0, y 1.

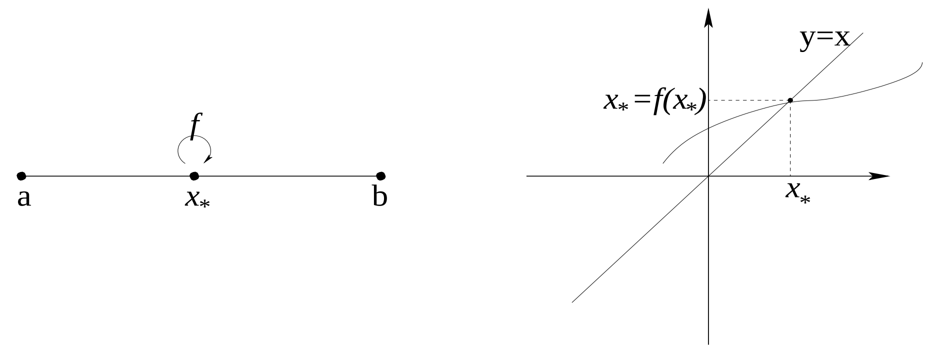

Figura 0.22: Un punto fijo.

Ejercicio. Calcula los puntos fijos de:
$f(x) = sen(x)$,
$f(x) = x^2 - 2x - 5$.

Definición 0.23. Decimos que x_* es un *punto périodico de orden* k de f si la órbita $\mathcal{O}(x_*)$ posee exactamente k (≥ 2) puntos distintos, esto es,

$$\begin{aligned} f(x_*) = & \quad x_1 \\ f(x_1) = & \quad x_2 \\ f(x_2) = & \quad x_3 \\ & \vdots \\ f(x_{k-1}) = & \quad x_* \end{aligned}$$

con $x_1, \ldots, x_{k-1}, x_*$ puntos distintos entre sí.

Pictóricamente un punto periódico de orden k se mueve recorriendo exactamente k lugares distintos cuando el tiempo n va a infinito, ver figuras 0.24 y 0.25.

Técnicas para detectar este comportamiento: Los puntos periódicos de orden k, pueden detectarse resolviendo la ecuación

$$f^{(k)}(x) = x,$$

donde la x es la incognita, aunque dicho con sinceridad aún en f sencillas las ecuación es difícil de resolver. Los puntos periódicos de orden k los detectamos gráficamente como la intersección de la gráfica de la función

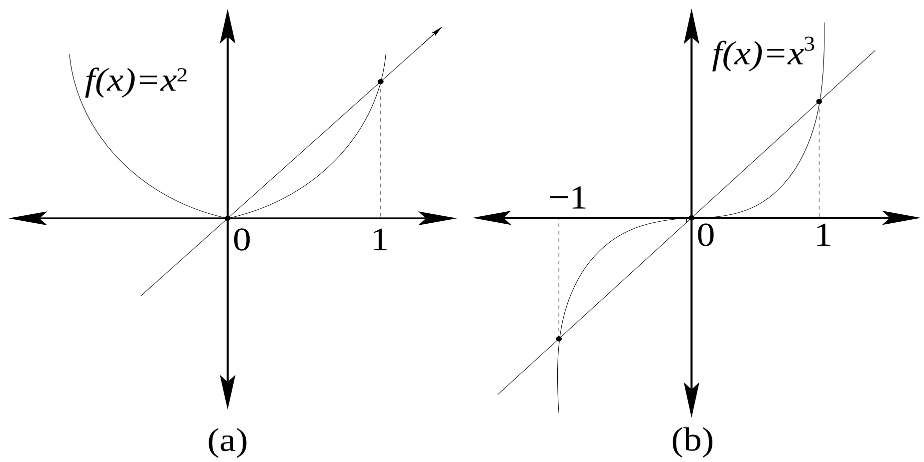

Figura 0.23: a) $x_1 = 0$ y $x_2 = 1$ son puntos fijos de $f(x) = x^2$, b) $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ y $x_3 = -1$ son funtos fijos de $f(x) = x^3$.

$f^{(k)}(x)$ con la gráfica de $y = x$ en el plano, ver también figuras 0.24 y 0.25.
Debe también verificarse que los puntos detectados no aparezcan como puntos periódicos de período menor, ya que un punto periódico de orden $j \geq 1$ es también un punto periódico de orden $2j$, $3j$... etc. Por ejemplo un punto periódico de orden 3 es siempre punto periódico de orden 6, y también es un punto periódico de orden 9, etc.

Ejemplo 0.24. En los dibujos 0.24 y 0.25 puntos periódicos de orden 2 y 3. En particular $f(x) = -x + 3$ tiene a todo punto ($\neq 1.5$) como punto periódico de orden 2.

Ejemplo 0.25. En el dibujo 0.25 se muestra un punto periódico de orden 3. En particular la función $f(x) = \frac{-3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 1$ tiene puntos periódicos de orden 3,

$$f(0) = 1$$
$$f(1) = 2$$
$$f(2) = 0$$

donde la órbita de estos puntos se visualiza como:

$$\mathcal{O}(0) = \{0, 1, 2, 0, 1, 2, 0, 1, 2, \ldots\}.$$

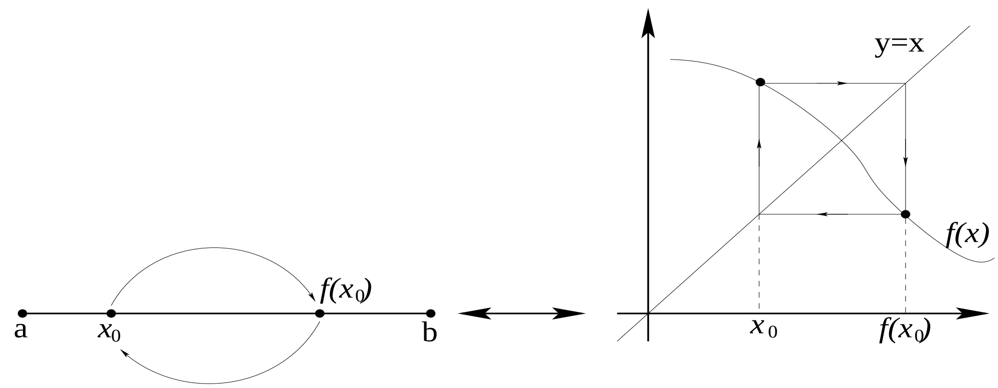

Figura 0.24: Un punto periódico de orden $k = 2$.

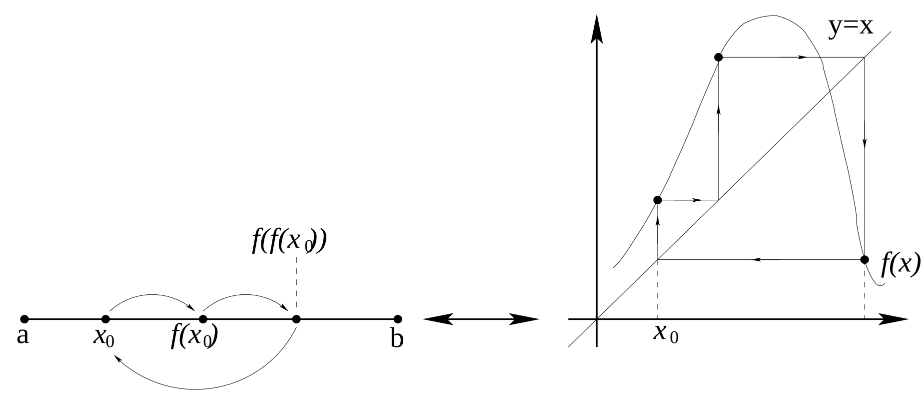

Figura 0.25: Un punto periódico de orden $k = 3$.

Ejercicio. Calcula los puntos fijos y los puntos de periódo 2 de $f(x) = 1 - x^2$.

Definición 0.26. Decimos que x_0 *tiene órbita que cae a un punto y* bajo f, para $y \in [a, b]$ un punto dado, si dado cualquier intervalo arbitrariamente pequeño $[y - \delta, y + \delta] \subset [a, b]$ la órbita intersecta al intervalo como

$$\mathcal{O}(x_0) \cap [y - \delta,\, y + \delta] = \{f^{(s)}(x_0), f^{(s+1)}(x_0), f^{(s+2)}(x_0), \ldots\},$$

esto es, existe un tiempo $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, que depende de s, tal que todos los elementos de la órbita $\mathcal{O}(x_0)$, para tiempos mayores o iguales a s, quedan en el intervalo $[y - \delta,\, y + \delta]$.

Esto es, la órbita de x_0 contiene elementos que se acercan tanto como pidamos al punto $y \in [a, b]$ y la órbita se acumula cada vez más cerca de y.

Pictóricamente un punto x_0 tiene órbita que se acumula en el punto y si x_0 bajo f se acerca cada vez más a y, ello se ve como en la figura 0.26:

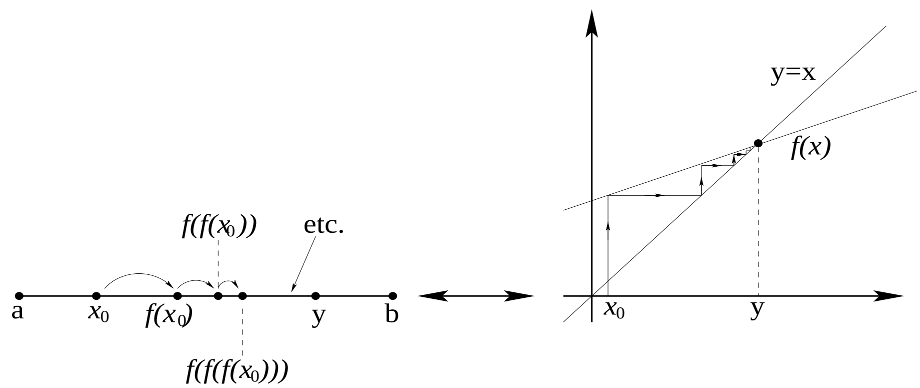

Figura 0.26: La órbita del punto x_0 se acerca al punto y.

Las técnicas para detectar este comportamiento: se describen en la sección 0.9, más adelante.

Ejemplo 0.27. Consideremos el sistema dinámico de $f(x) = \frac{1}{2}x$. Deseamos mostrar que la órbita de $x_0 = 4$ cae al punto $y = 0$. Dado $\epsilon = \frac{1}{16}$, la órbita de x_0 se ve como

$$\mathcal{O}(4) = \{4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots\}.$$

Entonces

$$\mathcal{O}(4) \cap [\frac{-1}{16}, \frac{1}{16}] = \{f^{(7)}(4) = \frac{1}{32}, f^{(8)}(4) = \frac{1}{64}, \ldots\},$$

el tiempo buscado es $s = 7$; para tiempos 7 o más la órbita se queda en $[\frac{-1}{16}, \frac{1}{16}]$. Algo similar ocurre para toda ϵ; por más pequeña que le tomemos hay un tiempo respectivo s, tal que la órbita de $x_0 = 4$ cae para tiempos iguales o mayores a s en $[-\epsilon, \epsilon]$. La órbita de $x_0 = 4$ cae a $y = 0$.

Ejemplo 0.28. *La solución al calculista obsesivo.* La órbita de cualquier número x_0 positivo cae a $y = 1$, bajo la función $f(x) = \sqrt{x}$.

Ejercicio. Gráfica la familia de funciones $f(x) = x^m$, para m un entero fijo, que puede tener signo positivo o negativo ($f(x) = x^7$ y $f(x) = (1/x)$... etc., son ejemplos de la familia). El punto $y = 1$ es siempre punto fijo. Discute para que valores de la potencia m, los puntos cercanos a $y = 1$ caen al punto $y = 1$, usa el algoritmo de la telaraña.

Definición 0.29. Decimos que x_0 *tiene orbita densa* bajo f si dado cualquier intervalo arbitrariamente pequeño $[y-\delta, y+\delta] \subset [a, b]$ alrededor de cualquier punto $y \in [a, b]$ la órbita $\mathcal{O}(x_0)$ intersecta al intervalo $[y - \delta, y + \delta]$.

Esto es, la órbita de x contiene elementos que se acercan tanto como pidamos a cualquier otro punto $y \in [a, b]$.

Pictóricamente un punto x_0 tiene órbita densa bajo f si visita cercanamente a todo punto y en $[a, b]$ para tiempos n suficientemente grandes. Esto es, x_0 bajo f es como un vagabundo nunca para, y va acercando a los demás puntos en $[a, b]$, ello se ve como en la siguiente figura (note que este fenómeno es indibujable):

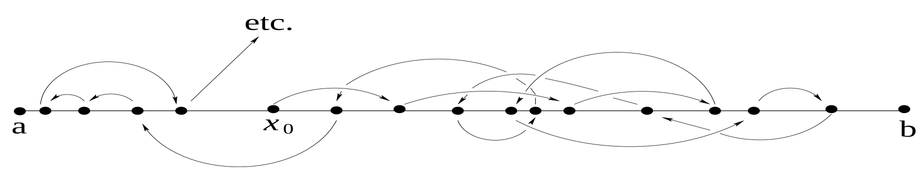

Figura 0.27: Órbita de un punto x_0 que se hace densa.

Sobre las técnicas para detectar este comportamiento debemos reconocer que el algoritmo de la telaraña es insuficiente. El autor no conoce una técnica general, ¡todo indíca que tal técnica no existe !

Ejemplo 0.30. Considere las funciones tienda de campaña, figura (a) y expander y enrrollar, figura (b). Tomando cualquier punto en $[0, 1] - \{1/2\}$. La órbita respectiva es densa.

Sugerencia: simplemente dibujalas en papel cuadriculado y construye la órbita de un punto $x_0 \in [0, 1]$, $x_0 \neq 1/2$ con el algoritmo de la telaraña.

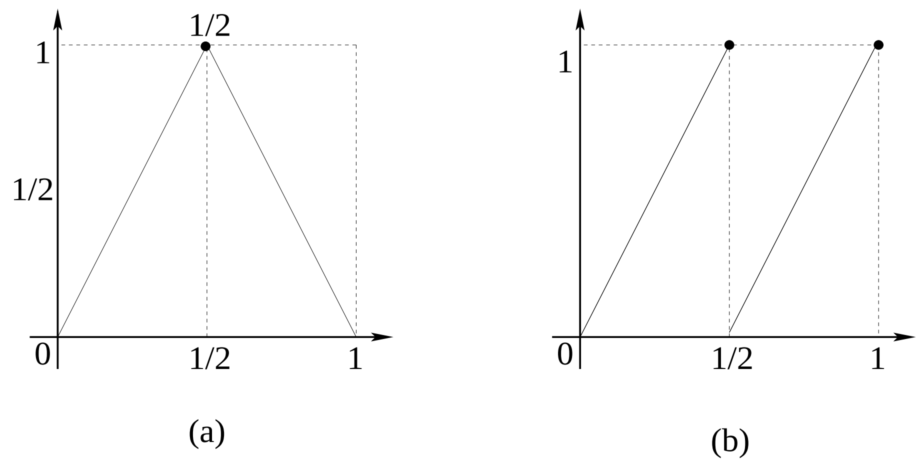

Figura 0.28: Tienda de campaña (a), expander y enrrollar (b).

Ejemplo 0.31. Sea $f(x) : [0,1] \to [0,1]$ la función que a $x \in [0,1]$ lo múltiplica por 10 y le quita su parte entera, esto es la función se queda con la parte decimal de $(10)x$. Por ejemplo $f(0.314159...) = (0.14159...)$, $f(0.14159...) = (0.4159...)\ldots$. La notación (abstracta) para esta función es $f(x) = 10x(mod\ 1)$. La gráfica de f es como sigue:

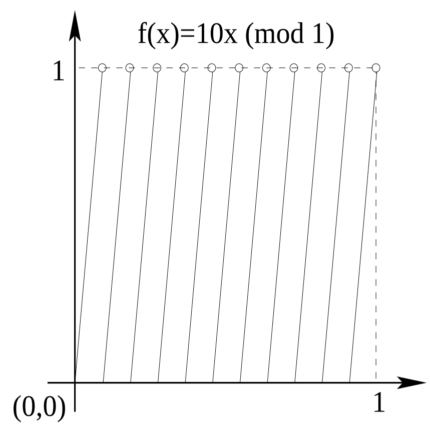

Figura 0.29: La gráfica de la función que a $x \in [0,1]$ lo múltiplica por 10 y le quita su parte entera.

Lema 0.32. *Cuando el hombre supera a la computadora.* La función $f(x) = 10x(mod\ 1)$ posee puntos x_0 tal que su órbita se hace densa en todo $[0,1]$.

Probar esto con la computadora o con el algoritmo de la telaraña es imposible. Veamos como con un poco de álgebra e ingenio es fácilisimo.

– Creando puntos fijos:
Si deseamos crear un punto fijo de período $k = 7$, consideramos un "bloque" de siete números, v.g.

$$1683212 \ .$$

Ahora construimos un número $x_0 \in [0,1]$ repitiendo ese "bloque" infinito número de veces

$$x_0 = 0.1683212168321216832121683212...$$

Es fácil ver que x_0 es un punto de período siete.

– Para cualquier período $k \geq 2$ y cerca de cada punto $y \in [0,1]$ que nos indiquen, podemos hallar nuevos puntos periódicos de período k. Por ejemplo si nos piden crear un punto de periódo $k = 4$ que este más cerca que un milésimo del punto $y = 0.379884197$. Tomamos un bloque de cuatro numeros, el más simple que se nos ocurre quiza es 1234.

Ahora lo repetimos un número infinito de veces cuidando empezar para estar más cerca que un milésimo de y, tenemos

$$x_0 = 0.379881234123412341\ldots,$$

este punto resuelve lo que nos pedian.
¡ Hacer matemáticas es explicar !

En 1999 la computadora Deep Blue, venció al ajedrecista Garry Kasparov (campéon mundial) ver figura 0.30, este fue un logro tecnológico enorme. ¡ Pero la computadora no puede probar el lema anterior y un humano sí !

0.8 ¿ Por qué el problema fundamental es difícil ?

Detengamos y refexionemos algunas dificultades para estudiar las órbitas de $f(x)$ son las siguientes:
- ¿ Si f es un polinomio de grado d mayor o igual a dos (por ejemplo $f(x) = 4x(1-x)$, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, etc.), entonces $f^{(n)}(x)$ es

Figura 0.30: Computadora Deep Blue contra el ajedrecista Garry Kasparov.

un polinomio de grado d^n. Al ir el tiempo n a infinito, el grado de $f^{(n)}$ va a infinito, lo que complica el cálculo de las órbitas.
- Para otros tipos de funciones el cálculo támbien se complica, por ejemplo, si $f(x) = sen(x)$, entonces la órbita de un punto x_0 toma la forma

$$\{x_0, sen(x_0), sen(sen(x_0)), sen(sen(sen(x_0))), ...\}$$

que es una descripción poco intuitiva. Si se aplica el algoritmo de la telaraña la solución es sencilla.
– De hecho el problema es que deseamos estimaciones del comportamiento de la órbita para cuando n va a infinito. ¿ Como puede hacerse eso sin equivocación ?
– Otro problema es que al usar computadoras ellas solo pueden mirar a un número finito de puntos $\{x\}$ en $[a, b]$.

Trate el lector de explicarlo por sí mismo. Ello simplifica el problema: por ejemplo sí $A \subset \mathbb{R}$ es un conjunto finito toda función $f : A \to A$ da origen a un sistema dinámico discreto con todos sus puntos periódicos.

Afortunadamente $[a, b]$ tiene siempre una infinidad de puntos, lo que garantiza que el problema no es trivial.

0.9 Atractores y repulsores.

Evidentemente estudiar el comportamiento de cada órbita $\mathcal{O}(x_0)$ es imposible pues hay una infinidad de órbitas distintas en $[a, b]$ y no acabariamos nunca. Una primera táctica es partir $[a, b]$ en regiones donde el comportamiento de las órbitas sea similar, veamos como:

Nuestro objetivo es estudiar el comportamiento de las órbitas cerca de un punto fijo. Vamos a caracterizar dos comportamientos que ocurren con frecuencia.

Sea x_* un punto fijo de $f(x)$, consideramos dos rectas que pasan por el punto $(x_*, f(x_*))$ con pendientes m y $-m$, para m tal que $0 \leq m < 1$. Esas dos rectas determinan una región sombreada que llamamos un moñito horizontal, ver figura 0.31.

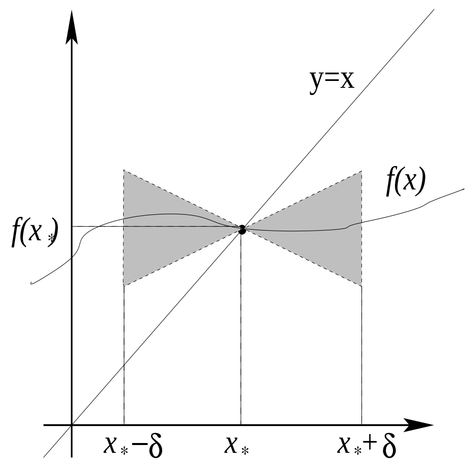

Figura 0.31: Un punto fijo atractor.

Lema 0.33. *Si la gráfica de f se encuentra dentro de un moñito horizontal con vértice $(x_*, f(x_*))$, entonces existe un número $\delta > 0$ tal que para todo número $z \in [x_* - \delta, x_* + \delta]$ la órbita de z cae a x_*.*

Definición 0.34. A un punto fijo x_0 que satisface las hipótesis del Lema le llamamos un *punto atractor* de f.

Los puntos atractores son amigables; atraen a los puntos cercanos a ellos.

Idea de la demostración del Lema. El argumento es por comparación. Para simplificar supongamos (sin pérdida de generalidad) que $(x_*, f(x_*)) = (0, 0)$. Sea $h(x) = mx$ la función que tiene como gráfica a una de las rectas que determinan el moñito horizontal.

Si tomamos z_0 cercano al punto fijo $x_* = 0$ tal que la gráfica de f esta contenida en el moñito horizontal entonces;

$$|h(z_0)| \geq |f(z_0)| \geq 0,$$

donde $|p|$ es la distancia del número p al origen $0 \in \mathbb{R}$. Repitiendo la aplicación de las funciones h y f tenemos

$$|h(h(z_0))| \geq |f(f(z_0))| \geq 0,$$
$$|h(h(h(z_0)))| \geq |f(f(f(z_0)))| \geq 0$$

y así sucesivamente. Calculamos ahora el caso general, subtituyendo la expresión de h y realizando las operaciones tenemos que

$$|h^{(n)}(z_0))| = |m^n z_0| \geq |f^{(n)}(z_0)| \geq 0.$$

Como $|m|$ es menor que uno, entonces m^n va a cero cuando n va a infinito y necesariamente $|m^n z_0|$ va a cero también. Otra forma de verificar esto es usar el metodo de la telaraña para h usando que $0 < |m| < 1$. Por la desigualdad de arriba $h^{(n)}(z_0)$ empuja a $f^{(n)}(z_0)$ a ir al punto fijo $x_* = 0$.

Pasamos ahora a estudiar puntos fijos repulsores.

Sea x_* un punto fijo de $f(x)$, consideramos dos rectas que pasan por el punto $(x_*, f(x_*))$ con pendientes M y $-M$, para $M > 1$. Esas dos rectas determinan una región sombreada que llamamos un moñito vertical, ver figura 0.32.

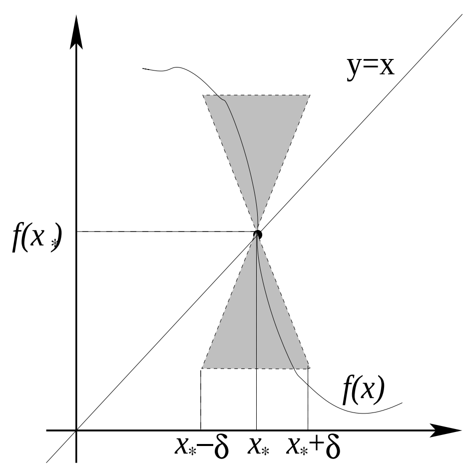

Figura 0.32: Un punto fijo repulsor.

Lema 0.35. *Si la gráfica de f se encuentra dentro del moñito vertical con vértice $(x_*, f(x_*))$, entonces existe un número $\delta > 0$ tal que para todo número $z_0 \in [x_* - \delta, x_* + \delta]$ la órbita de z_0 abandona el intervalo $[x_* - \delta, x_* + \delta]$.*

Definición 0.36. A un punto fijo x_* que satisface afirmativamente las hipótesis del Lema le llamamos un *punto repulsor* de f.

Los puntos atractores son desgradables; alejan a los puntos cercanos a ellos.

Idea de la demostración del Lema. El argumento es por comparación. Para simplificar supongamos (sin pérdida de generalidad) que $(x_*, f(x_*)) = (0, 0)$. Sea $h(x) = Mx$ la función que tiene como gráfica a una de las rectas que determinan el moñito vertical.

Si tomamos z_0 cercano al punto fijo $x_* = 0$ tal que la gráfica de f esta contenida en el moñito vertical entonces;

$$|f(z_0)| \geq |h(z_0)| \geq 0,$$

y repitiendo la aplicación de h y f tenemos

$$|f(f(z_0))| \geq |h(h(z_0))| \geq 0$$

$$|f(f(f(z_0)))| \geq |h(h(h(z_0)))| \geq 0$$

y así sucesivamente. Subtituyendo la expresión de h y realizando las operaciones tenemos que

$$|f^{(n)}(z_0)| \geq |h^{(n)}(z_0))| = |M^n z_0| \geq 0.$$

Como $|M|$ es mayor que uno, entonces M^n va a infinito cuando n va a infinito y necesariamente $|M^n z_0|$ se hace mayor que δ para un n adecuado. Otra forma de verificar esto es usar el método de la telaraña para h usando que $|M| > 1$. Por la desigualdad de arriba $h^{(n)}(z_0)$ empuja a $f^{(n)}(z_0)$ también a salir de $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.

0.10 Sistemas dinámicos que provienen de parábolas.

Vamos a considerar ahora una familia de sistemas dinámicos que es famosa;

$$f(x) = \lambda x(1 - x) : [0, 1] \to [0, 1]$$

para $\lambda \in [0, 4]$ un número que podemos seleccionar. Cada que seleccionamos una λ, tenemos una función, por ello decimos que tenemos, una familia de sistemas dinámicos.

¿ Como surgió esta familia ?

Consideremos x como el número de individuos de una especie en un hábitat, supondremos que
- los recursos del hábitat son finitos,
- la población se encuentra aislada,
- la población es homogénea,
- el hábitat es homogéneo.
- Cada intervalo de tiempo el número de encuentros entre dos individuos será como $sx(x-1)$, donde $1 > s > 0$ es una constante biológica que depende de la especie.
- La capacidad reproductiva de cada individuo sera como rx, donde $r > 0$ es una constante biológica que depende de la especie.

El *modelo de Verhulst* o *modelo lógistico discreto*, debido a Pierre-Francois Verhulst (1804– 1849) describe el cambio en la población como sigue; si a tiempo n tenemos x_0 individuos en la población, entonces al trancurrir un intervalo de tiempo Δt tenemos que el nuevo número de individuos es:

$$f(x_0) = rx_0 - sx_0(x_0 - 1) = (r+s)x_0 - sx_0^2 \ .$$

Ya que para los modelos de población solo nos interesa $x \geq 0$ y $f(x) \geq 0$, esto es, las poblaciones con valor negativo no tienen interpretación, entonces el dibujo de la gráfica de f se ve en la parábola en la figura 0.33, donde 0 y M son las raíces de la parábola $f(x) = (r+s)x_0 - s{x_0}^2$.

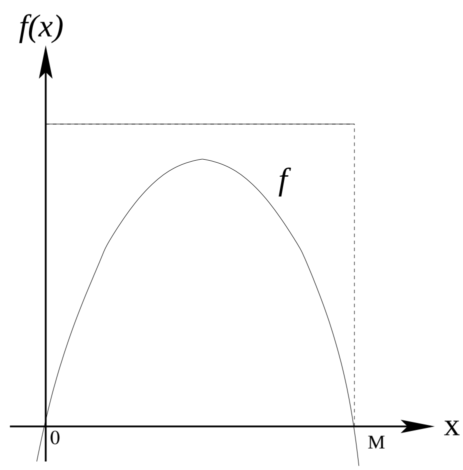

Figura 0.33: Gráfica del modelo logístico.

Es natural pensar M como el número máximo de individuos que el hábitat puede soportar y ello implíca que f debe ser una función del tipo $f : [0, M] \to [0, M]$. En resumen:
– la gráfica f es una parábola,
– la gráfica de f abre hacia abajo,
– la gráfica de f tiene raíces en 0 y M,
- la máxima altura de la parábola es, $f(M/2)$, que es menor o igual a M (ya que M es el número máximo de individuos que soporta el hábitat).

Las propiedades del sistema dinámico de $f : [0, M] \to [0, M]$, al cambiar la escala de $[0, M]$ por [0,1], son exactamente las mismas que describe la familia

$$f(x) = \lambda x(1-x) : [0,1] \to [0,1] \ ,$$

esta es la familia propuesta.

Resumimos a continuación parte del estudio de Robert May (en los años 70's) para el modelo logistico:

Lema 0.37. *Si* $0 < \lambda < 1$, *entonces* $f(x) = \lambda x(1-x)$ *posee un solo punto atractor.*
Si $1 < \lambda < 3$, *entonces* $f(x) = \lambda x(1-x)$ *posee un punto atractor y un repulsor.*
Si $3 < \lambda \leq 4$, *entonces* $f(x) = \lambda x(1-x)$ *posee dos puntos repulsores.*

El lema es fácil de probar. En la siguientes figuras damos los casos respectivos.

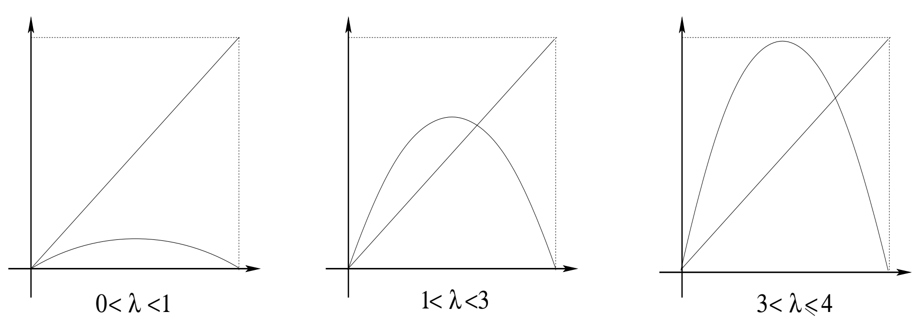

Figura 0.34: Función logística para Δ distintos valores.

El resultado 0.35 es poderoso, vamos a interpretarlo.

Imaginemos que $[0,1]$ es un salón de baile o discotheque. Los puntos $x \in [0,1]$ son bailarines y la función f nos dice que: si x es la posición de un bailarín al tiempo n, entonces $f(x)$ es la posición de ese bailarín al tiempo $n+1$.

Caso $0 < \lambda < 1$.

En $x_0 = 0$ hay una persona extremadamente atractiva. ¿Hacía donde van todos los bailarines?, hacía $x_0 = 0$.

Caso $1 < \lambda < 3$.

En $x_0 = 0$ hay una persona extremadamente repulsiva y en $x_1 = 1 - 1/\lambda$ hay una persona extremadamente atractiva. ¿Hacía donde van todos los bailarines?, hacía $x_1 = 1 - 1/\lambda$.

Caso $3 < \lambda \leq 4$.

En $x_0 = 0$ y en $x_1 = 1 - 1/\lambda$, hay dos personas extremadamente repulsivas. ¿Hacía donde van todos los bailarines? Ahora, empieza a ser complicado, los bailarines se alejan de uno de los repulsivos, pero al hacerlo se acercan al otro y buscan alejarse de este, el baile tiene "una dinámica caótica ".

"Hacer matemáticas es explicar".

0.11 Una primera intuición del caos: expander y doblar produce caos.

Necesitamos ahora un nuevo concepto (¡ más lenguaje codificado !).

Definición 0.38. Decimos que una función $f : [a,b] \to [a,b]$ posee *sensibilidad respecto a condiciones iniciales* si existe un número $\epsilon > 0$ tal que para cada x_0 y para conjunto $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ con $\delta > 0$, existe un punto y en $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ y un número k tal que $f^{(k)}(x_0)$ y $f^{(k)}(y)$ se han separado más que ϵ.

Explicando en más detalle; arbitrariamente cerca del punto x_0 existen puntos y tal que al aplicar suficientes veces la función f sus puntos respectivos $f^{(k)}(x_0)$ y $f^{(k)}(y)$ se ha separado a distancia más que un número $\epsilon > 0$, que previamente se dio. El ejemplo más sencillo de este fenómeno es mirar a 5 pequeñas gotas de tinta en un vaso de agua; al agitar el agua las gotas de tinta se separan conforme el tiempo fluye, esto es posiciones inciales casi iguales de las gotas cambian a posiciones muy lejanas entre si, ver figura 0.32. Este compotamiento es el que describe la propiedad de "sensibilidad respecto a condiciones iniciales".

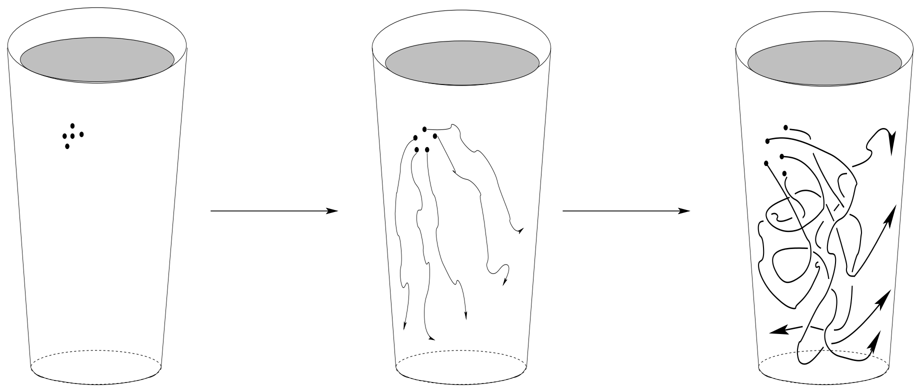

Figura 0.35: Sensibilidad respecto a condiciones iniciales, x_0 y y se separan bajo f.

Definición 0.39. *Debida a Robert Devaney en los 80's.* Decimos que una función $f : [a, b] \to [a, b]$ es *caótica* si:
- posee una órbita densa,
- el conjunto de puntos periódicos de f es denso en $[a, b]$, i.e. arbitrariamente cerca de todo $y \in [a, b]$ hay puntos periódicos,
- f posee sensibilidad respecto a condiciones iniciales.

Nuestro resultado principal es ahora:

Teorema 8.27. *Las funciones*
$f(x) = 4x(1 - x)$,
$f(x) = 10x(mod\ 1)$,
son caóticas.

Las idea de las pruebas se explorará en el Taller.

Podemos notar que ambas funciones satisfacen que:

(R) Todos sus puntos fijos son repulsores (con "suficiente fuerza de repulsión") y carecen de atractores.

(E-D) Ambas pueden interpretarse como que "expanden y doblan" $[0, 1]$ sobre si mismo.

Nuestra intuición es que cualquier función satisfaciendo (R) ó (E-D) debe ser caótica.

Esta intuición es confirmada por muchos otros ejemplos y en otros contextos. Pero el autor no conoce un enunciado matématico riguroso que permita afirmar que: R o (E-D) implíca caos.

Podemos regresar a casa con esa intuición como un mecanismo de caos, concientes de que las matemáticas modernas tienen todavía mucho que aclarar.

Algunas preguntas que nadie sabe responder:
- ¿ Como hallar técnicas generales que permitan detectar órbitas periódicas ?
- ¿ Como hallar técnicas generales que permitan detectar órbitas densas ?
- Un teorema famoso de Li y Yorke afirma que "la existencia de puntos de periódo tres implíca que la función es caótica" ¿ Como hallar otras condiciones que impliquen caos ?

0.12 Bibliografía.

[1] Devaney R. L., *A First Course in Chaotic Dynamical Systems: Theory and Experiment.* Addison Wesley, U. S. A. (1992).
[Un curso claro y elemental sobre iteración de funciones.]

[2] Gutiérrez Sánchez J. L. y Sánchez Garduño F., *Matemáticas para las Ciencias Naturales.* Aportaciones Matemáticas, Sociedad Matemática Mexicana (1998).
[Contiene una discusión de distintos sistemas dinámicos aplicados a poblaciones.]

[3] Jorge M. del C. *"La forma de la tierra: Historia de su busqueda y las matemáticas que intervinieron en ella".* En; VII Coloquio del Departamento de Matemáticas, Conferencias Generales. Gorostiza G. L., et al. editores. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I. P. N. México (1991), 45-102.
[Repasa distintos experimentos históricos sobre la forma de la tierra.]

[4] Li T.Y. y Yorke J.A., *Period three implies chaos,* American Mathematical Monthly Vol. 82, (1975) $985-992$.
[Prueba que la existencia de un punto periódico de orden tres, implica que la función respectiva es caótica.]

[5] Stewart I., *¿ Juega Dios a los dados ?* Grijalbo Mondadori, Barcelona (1991).
[Una revisión de las ideas de caos en los últimos 300 años.]

[6] May M. R., *" The best possible time to be alive: the logistic map".* En; It must be beautiful: Great Equations of Modern Science. Farmelo G. Editor, Granta, London (2002) 212-229.
[Comentario de actualidad sobre el nacimiento y evolución de la teoría del caos.]

[7] May M. R., *Simple mathematical models mith very complicated dynamics,* Nature Vol. 261, (1976) $459-467$.
[Trabajo donde se describió por primera vez el comportamiento caótico de la función logística.]