Sistema de ecuaciones lineales. Métodos de solución para matrices cuadradas

MAT-251

Dr. Alonso Ramírez Manzanares
CIMAT, A.C.
e-mail: alram@cimat.mx
web: http://www.cimat.mx/~alram/met_num/

Dr. Joaquín Peña Acevedo
CIMAT A.C.
e-mail: joaquin@cimat.mx

Los sistemas de ecuaciones lineales aparecen en muchas situaciones... en matemáticas

Los sistemas de ecuaciones lineales aparecen en muchas situaciones... en matemáticas

$$\left.\begin{aligned} 3x - 2y &= 5 \\ x + 4y &= 4 \\ -x - 2y &= -3 \end{aligned}\right\}$$

Los sistemas de ecuaciones lineales aparecen en muchas situaciones... en matemáticas

$$\left.\begin{aligned} 3x - 2y &= 5 \\ x + 4y &= 4 \\ -x - 2y &= -3 \end{aligned}\right\}$$

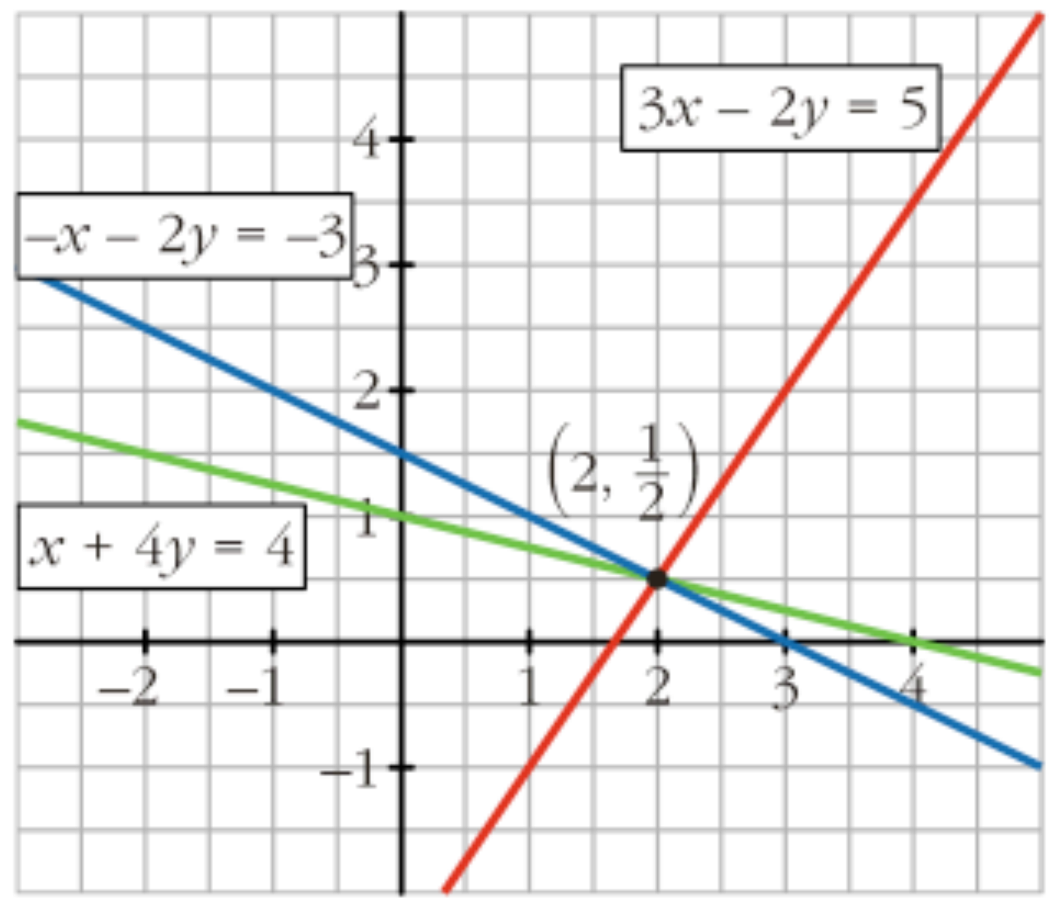
Su solución es $\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$

Los sistemas de ecuaciones lineales aparecen en muchas situaciones... en matemáticas

$$\left.\begin{aligned} 3x-2y&=5 \\ x+4y&=4 \\ -x-2y&=-3 \end{aligned}\right\}$$

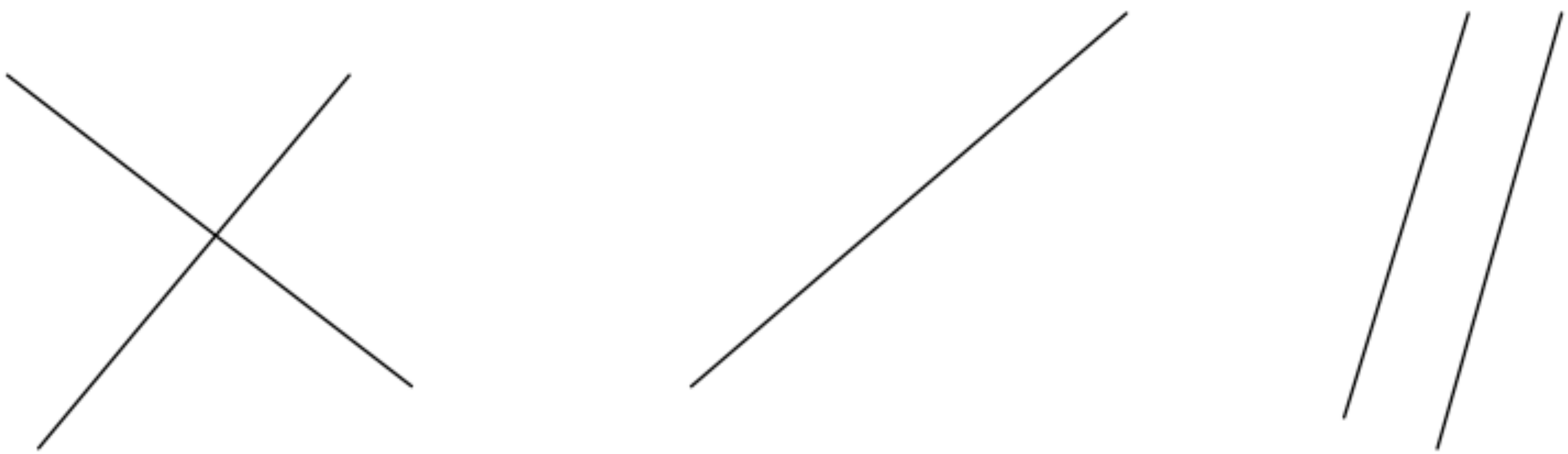
Su solución es $\left(2,\ \dfrac{1}{2}\right)$.

Geométrica mente, son tres rectas que se cortan en el punto $\left(2,\ \dfrac{1}{2}\right)$:



Es este caso el sistema puede ser

La ecuación **ax+by=c** tiene por representación en el plano cartesiano una recta.
La situación geométrica de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas es la siguiente:



En general modelan interacción de varias propiedades

También aparecen en la vida cotidiana

Uno:

También aparecen en la vida cotidiana

Uno:

Los animales de un laboratorio deben mantenerse bajo una dieta estricta. Cada animal recibe 10 g de proteínas y 3 g de grasas. Se dispone de dos tipos de alimentos: el tipo A con el 5 % de proteínas y 3% de grasas, y el tipo B con el 10 % de proteínas y 1% de grasas. ¿Cuántos gramos de cada alimento pueden utilizarse para obtener la dieta correcta de un único animal?

También aparecen en la vida cotidiana

Uno:

Los animales de un laboratorio deben mantenerse bajo una dieta estricta. Cada animal recibe 10 g de proteínas y 3 g de grasas. Se dispone de dos tipos de alimentos: el tipo A con el 5 % de proteínas y 3% de grasas, y el tipo B con el 10 % de proteínas y 1% de grasas. ¿Cuántos gramos de cada alimento pueden utilizarse para obtener la dieta correcta de un único animal?

$$0.05*C_A + 0.10*C_B = 10g$$
$$0.03*C_A + 0.01*C_B = 3g$$

También aparecen en la vida cotidiana

Uno:

Los animales de un laboratorio deben mantenerse bajo una dieta estricta. Cada animal recibe 10 g de proteínas y 3 g de grasas. Se dispone de dos tipos de alimentos: el tipo A con el 5 % de proteínas y 3% de grasas, y el tipo B con el 10 % de proteínas y 1% de grasas. ¿Cuántos gramos de cada alimento pueden utilizarse para obtener la dieta correcta de un único animal?

$$0.05 * C_A + 0.10 * C_B = 10\text{g}$$
$$0.03 * C_A + 0.01 * C_B = 3\text{g}$$

Solución $C_A=80$, $C_B=60$

Ejemplos de SEL

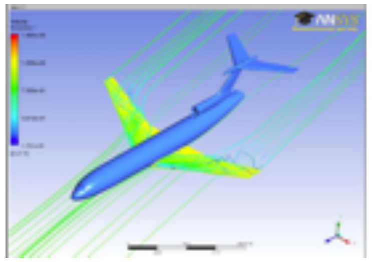
- Find the equation of the parabola that passes through the points (–1, 9), (1, 5), and (2, 12).

    - $a(-1)^2 + b(-1) + c = 9$
    - $a(1)^2 + b(1) + c = 5$
    - $a(2)^2 + b(2) + c = 12$

- Simplifying the three equations, I get:

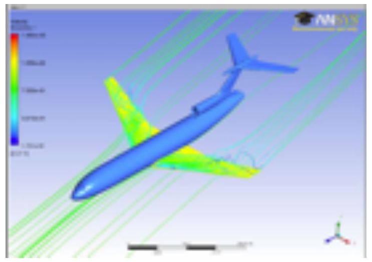
    - $a - b + c = 9$
    - $a + b + c = 5$
    - $4a + 2b + c = 12$

Los sistemas de ecuaciones lineales aparecen en muchas situaciones.



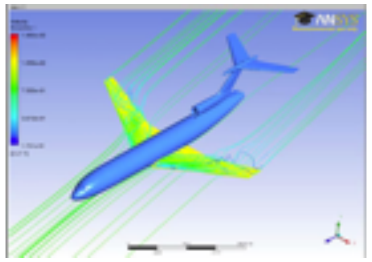
Los sistemas de ecuaciones lineales aparecen en muchas situaciones.

A passenger jet took **three hours** to fly **1800 miles** in the direction of the jetstream. The return trip against the jetstream **took four hours**.



Los sistemas de ecuaciones lineales aparecen en muchas situaciones.

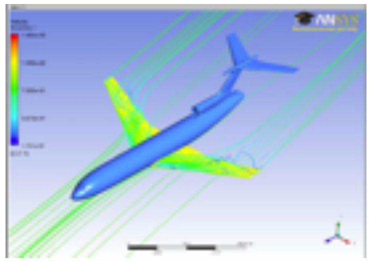
A passenger jet took **three hours** to fly **1800 miles** in the direction of the jetstream. The return trip against the jetstream **took four hours**.



What was the jet's speed in still air and the jetstream's speed?

Los sistemas de ecuaciones lineales aparecen en muchas situaciones.

A passenger jet took **three hours** to fly **1800 miles** in the direction of the jetstream. The return trip against the jetstream **took four hours**.

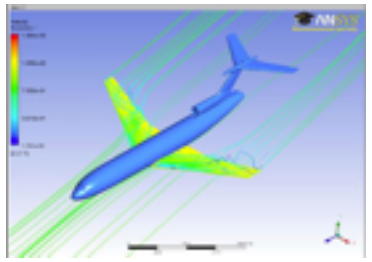


What was the jet's speed in still air and the jetstream's speed?

We'll use "***p***" for "the plane's speedometer reading (apparent speed)" and "***w***" for "the windspeed".

Los sistemas de ecuaciones lineales aparecen en muchas situaciones.

A passenger jet took **three hours** to fly **1800 miles** in the direction of the jetstream. The return trip against the jetstream **took four hours**.



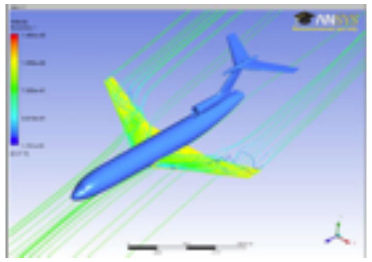
What was the jet's speed in still air and the jetstream's speed?

We'll use "***p***" for "the plane's speedometer reading (apparent speed)" and "***w***" for "the windspeed".

with the jetstream: $(\mathbf{p} + \mathbf{w})(3) = 1800$

Los sistemas de ecuaciones lineales aparecen en muchas situaciones.

A passenger jet took **three hours** to fly **1800 miles** in the direction of the jetstream. The return trip against the jetstream **took four hours**.



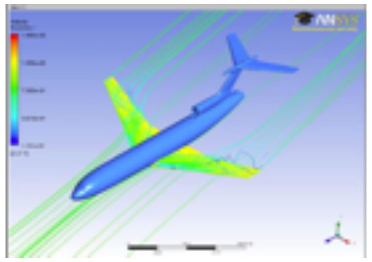
What was the jet's speed in still air and the jetstream's speed?

We'll use "***p***" for "the plane's speedometer reading (apparent speed)" and "***w***" for "the windspeed".

with the jetstream: $(p + w)(3) = 1800$
against the jetstream: $(p - w)(4) = 1800$

Los sistemas de ecuaciones lineales aparecen en muchas situaciones.

A passenger jet took **three hours** to fly **1800 miles** in the direction of the jetstream. The return trip against the jetstream **took four hours**.



What was the jet's speed in still air and the jetstream's speed?

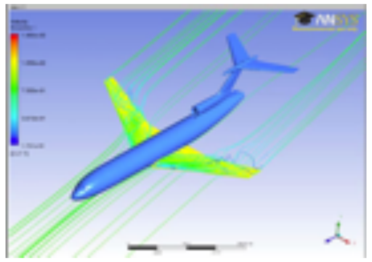
We'll use "***p***" for "the plane's speedometer reading (apparent speed)" and "***w***" for "the windspeed".

with the jetstream: $(\boldsymbol{p} + \boldsymbol{w})(3) = 1800$
against the jetstream: $(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{w})(4) = 1800$

$$p + w = 600$$

Los sistemas de ecuaciones lineales aparecen en muchas situaciones.

A passenger jet took **three hours** to fly **1800 miles** in the direction of the jetstream. The return trip against the jetstream **took four hours**.



What was the jet's speed in still air and the jetstream's speed?

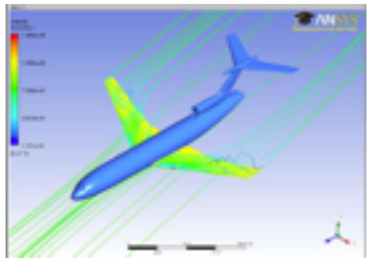
We'll use "***p***" for "the plane's speedometer reading (apparent speed)" and "***w***" for "the windspeed".

with the jetstream: $(\boldsymbol{p} + \boldsymbol{w})(3) = 1800$
against the jetstream: $(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{w})(4) = 1800$

$$p + w = 600$$
$$p - w = 450$$

Los sistemas de ecuaciones lineales aparecen en muchas situaciones.

A passenger jet took **three hours** to fly **1800 miles** in the direction of the jetstream. The return trip against the jetstream **took four hours**.



What was the jet's speed in still air and the jetstream's speed?

We'll use "***p***" for "the plane's speedometer reading (apparent speed)" and "***w***" for "the windspeed".

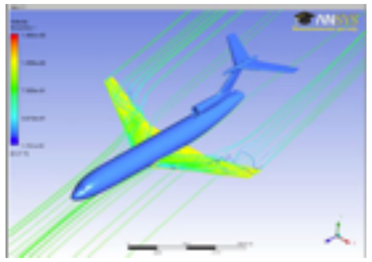
with the jetstream: $(p + w)(3) = 1800$
against the jetstream: $(p - w)(4) = 1800$

$$p + w = 600$$
$$p - w = 450$$

Then, by adding down, $2p = 1050$ so $p = 525$, and w must then be 75.

Los sistemas de ecuaciones lineales aparecen en muchas situaciones.

A passenger jet took **three hours** to fly **1800 miles** in the direction of the jetstream. The return trip against the jetstream **took four hours**.



What was the jet's speed in still air and the jetstream's speed?

We'll use "***p***" for "the plane's speedometer reading (apparent speed)" and "***w***" for "the windspeed".

with the jetstream: $(p + w)(3) = 1800$
against the jetstream: $(p - w)(4) = 1800$

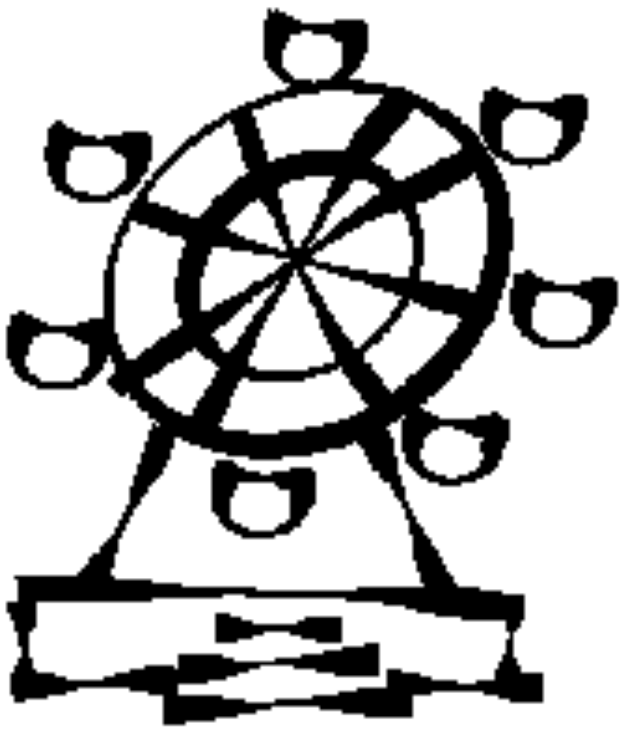
$$p + w = 600$$
$$p - w = 450$$

Then, by adding down, $2p = 1050$ so $p = 525$, and w must then be 75.

The jet's speed was 525 mph and the jetstream windspeed was 75 mph.

Los sistemas de ecuaciones lineales en observaciones indirectas.

4. Bill and Steve decide to spend the afternoon at an amusement park enjoying their favorite activities, the water slide and the gigantic Ferris wheel. Their tickets are stamped each time they slide or ride. At the end of the afternoon they have the following tickets:



Fun Time Amusements

Water Slide: ☑ ☑ ☑

Ferris Wheel: ☑ ☑ ☑

Total: $17.70

Bill's Ticket

Fun Time Amusements

Water Slide: ☑ ☑

Ferris Wheel: ☑ ☑ ☑

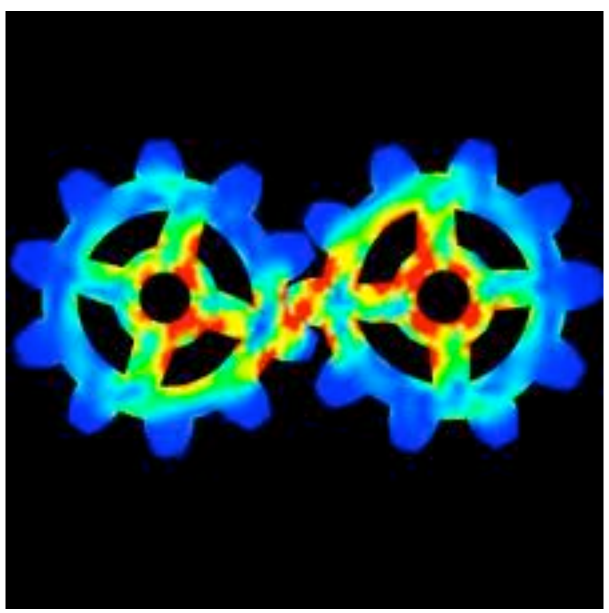
Total: $15.55

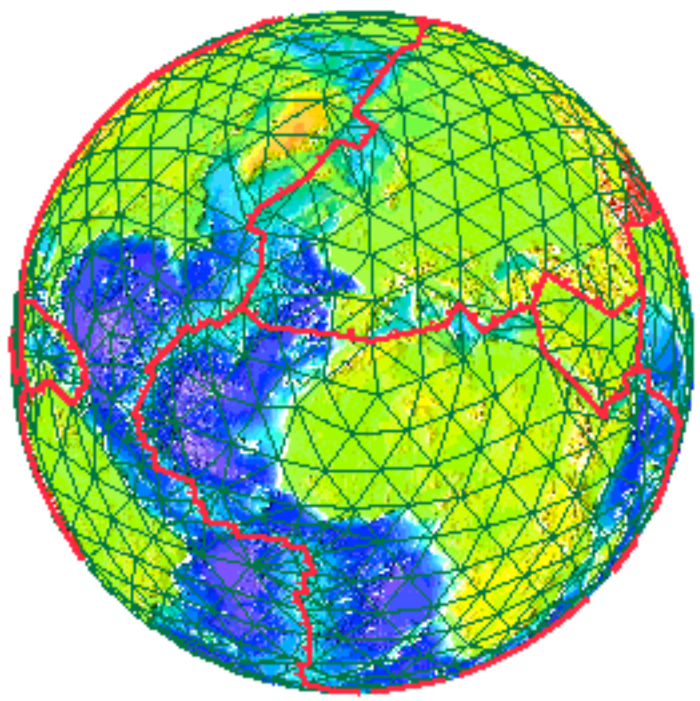
Steve's Ticket

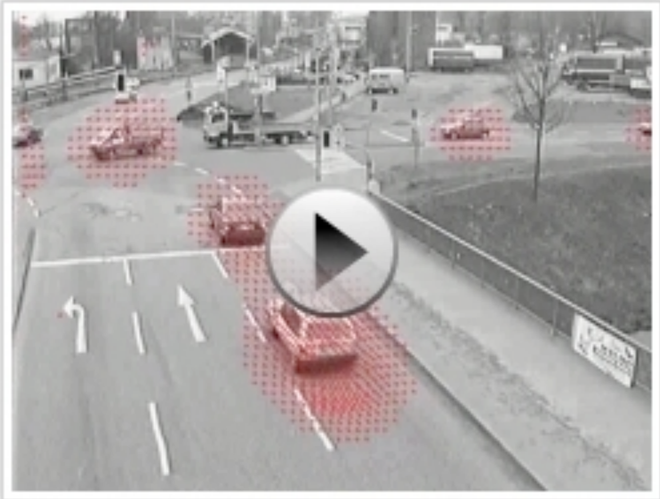
How much does it cost to ride the Ferris Wheel?
How much does it cost to slide on the Water Slide?

También aparecen en la vida cotidiana

- Grandes sistemas de ecuaciones lineales:







- Cálculo de esfuerzos   Analisis de la litósfera   Movimiento de objetos

Movimiento de objetos

500^2 x 2 =
500,000
incógnitas

Forma de los sistemas de ecuaciones lineales

$$
\begin{aligned}
E_1: \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\
E_2: \quad & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\
& \vdots \\
E_n: \quad & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n,
\end{aligned}
$$

- La ecuación E_i puede multiplicarse por una constante λ distinta de cero y la ecuación resultante se emplea en vez de E_i . $(\lambda E_i) \rightarrow (E_i)$
- También podemos operar $(\lambda E_i + E_j) \rightarrow (E_i)$
- El orden de 2 ecuaciones pueden intercambiarse $(E_i) \leftrightarrow (E_j)$

- Queremos resolver el sistema para x_i, $i=1,.., n$

Veamos un ejemplo de solución

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcr}
E_1: & x_1 & + & x_2 & & & + & 3x_4 & = & 4, \\
E_2: & 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 1, \\
E_3: & 3x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & -3, \\
E_4: & -x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 4,
\end{array}
$$

Veamos un ejemplo de solución

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcr}
E_1: & x_1 & + & x_2 & & & + & 3x_4 & = & 4, \\
E_2: & 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 1, \\
E_3: & 3x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & -3, \\
E_4: & -x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 4,
\end{array}
$$

$$(E_2 - 2E_1) \to (E_2), (E_3 - 3E_1) \to (E_3)$$

Veamos un ejemplo de solución

$$\begin{array}{lrcrcrcrcr}
E_1: & x_1 & + & x_2 & & & + & 3x_4 & = & 4, \\
E_2: & 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 1, \\
E_3: & 3x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & -3, \\
E_4: & -x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 4,
\end{array}$$

$$(E_2 - 2E_1) \to (E_2), (E_3 - 3E_1) \to (E_3) \quad (E_4 + E_1) \to (E_4)$$

Veamos un ejemplo de solución

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl}
E_1: & x_1 & + & x_2 & & & + & 3x_4 & = & 4, \\
E_2: & 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 1, \\
E_3: & 3x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & -3, \\
E_4: & -x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 4,
\end{array}$$

$$\boxed{(E_2 - 2E_1) \to (E_2), (E_3 - 3E_1) \to (E_3) \quad (E_4 + E_1) \to (E_4)}$$

Veamos un ejemplo de solución

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl}
E_1: & x_1 & + & x_2 & & & + & 3x_4 & = & 4, \\
E_2: & 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 1, \\
E_3: & 3x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & -3, \\
E_4: & -x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 4,
\end{array}$$

$$\boxed{(E_2 - 2E_1) \to (E_2), (E_3 - 3E_1) \to (E_3) \quad (E_4 + E_1) \to (E_4)}$$

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl}
E_1: & x_1 & + & x_2 & & & + & 3x_4 & = & 4, \\
E_2: & & - & x_2 & - & x_3 & - & 5x_4 & = & -7, \\
E_3: & & - & 4x_2 & - & x_3 & - & 7x_4 & = & -15, \\
E_4: & & & 3x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & = & 8,
\end{array}$$

Veamos un ejemplo de solución

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcl}
E_1: & x_1 & + & x_2 & & & + & 3x_4 & = & 4, \\
E_2: & 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 1, \\
E_3: & 3x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & -3, \\
E_4: & -x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 4,
\end{array}
$$

$$\boxed{(E_2 - 2E_1) \to (E_2), (E_3 - 3E_1) \to (E_3) \quad (E_4 + E_1) \to (E_4)}$$

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcl}
E_1: & x_1 & + & x_2 & & & + & 3x_4 & = & 4, \\
E_2: & & - & x_2 & - & x_3 & - & 5x_4 & = & -7, \\
E_3: & & - & 4x_2 & - & x_3 & - & 7x_4 & = & -15, \\
E_4: & & & 3x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & = & 8,
\end{array}
$$

$$(E_3 - 4E_2) \to$$

Veamos un ejemplo de solución

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcl}
E_1: & x_1 & + & x_2 & & & + & 3x_4 & = & 4, \\
E_2: & 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 1, \\
E_3: & 3x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & -3, \\
E_4: & -x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 4,
\end{array}
$$

$$
\boxed{(E_2 - 2E_1) \rightarrow (E_2), (E_3 - 3E_1) \rightarrow (E_3) \quad (E_4 + E_1) \rightarrow (E_4)}
$$

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcl}
E_1: & x_1 & + & x_2 & & & + & 3x_4 & = & 4, \\
E_2: & & - & x_2 & - & x_3 & - & 5x_4 & = & -7, \\
E_3: & & - & 4x_2 & - & x_3 & - & 7x_4 & = & -15, \\
E_4: & & & 3x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & = & 8,
\end{array}
$$

$$
(E_3 - 4E_2) \rightarrow (E_3) \qquad (E_4 + 3E_2) \rightarrow (E_4)
$$

Veamos un ejemplo de solución

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl}
E_1: & x_1 & + & x_2 & & & + & 3x_4 & = & 4, \\
E_2: & 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 1, \\
E_3: & 3x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & -3, \\
E_4: & -x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 4,
\end{array}$$

$$\boxed{(E_2 - 2E_1) \to (E_2), (E_3 - 3E_1) \to (E_3) \quad (E_4 + E_1) \to (E_4)}$$

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl}
E_1: & x_1 & + & x_2 & & & + & 3x_4 & = & 4, \\
E_2: & & - & x_2 & - & x_3 & - & 5x_4 & = & -7, \\
E_3: & & - & 4x_2 & - & x_3 & - & 7x_4 & = & -15, \\
E_4: & & & 3x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & = & 8,
\end{array}$$

$$\boxed{(E_3 - 4E_2) \to (E_3) \qquad (E_4 + 3E_2) \to (E_4)}$$

Veamos un ejemplo de solución

$$\begin{array}{lrcrcrcrcr}
E_1: & x_1 & + & x_2 & & & + & 3x_4 & = & 4, \\
E_2: & 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 1, \\
E_3: & 3x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & -3, \\
E_4: & -x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 4,
\end{array}$$

$$\boxed{(E_2 - 2E_1) \to (E_2), (E_3 - 3E_1) \to (E_3) \quad (E_4 + E_1) \to (E_4)}$$

$$\begin{array}{lrcrcrcrcr}
E_1: & x_1 & + & x_2 & & & + & 3x_4 & = & 4, \\
E_2: & & - & x_2 & - & x_3 & - & 5x_4 & = & -7, \\
E_3: & & - & 4x_2 & - & x_3 & - & 7x_4 & = & -15, \\
E_4: & & & 3x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & = & 8,
\end{array}$$

$$\boxed{(E_3 - 4E_2) \to (E_3) \quad (E_4 + 3E_2) \to (E_4)}$$

$$\begin{array}{lrcrcrcrcr}
E_1: & x_1 & + & x_2 & & & + & 3x_4 & = & 4, \\
E_2: & & - & x_2 & - & x_3 & - & 5x_4 & = & -7, \\
E_3: & & & & & 3x_3 & + & 13x_4 & = & 13, \\
E_4: & & & & & & - & 13x_4 & = & -13.
\end{array}$$

Veamos un ejemplo de solución

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl}
E_1: & x_1 & + & x_2 & & & + & 3x_4 & = & 4, \\
E_2: & 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 1, \\
E_3: & 3x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & -3, \\
E_4: & -x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 4,
\end{array}$$

$$\boxed{(E_2 - 2E_1) \rightarrow (E_2), (E_3 - 3E_1) \rightarrow (E_3) \quad (E_4 + E_1) \rightarrow (E_4)}$$

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl}
E_1: & x_1 & + & x_2 & & & + & 3x_4 & = & 4, \\
E_2: & & - & x_2 & - & x_3 & - & 5x_4 & = & -7, \\
E_3: & & - & 4x_2 & - & x_3 & - & 7x_4 & = & -15, \\
E_4: & & & 3x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & = & 8,
\end{array}$$

$$\boxed{(E_3 - 4E_2) \rightarrow (E_3) \qquad (E_4 + 3E_2) \rightarrow (E_4)}$$

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl}
E_1: & x_1 & + & x_2 & & & + & 3x_4 & = & 4, \\
E_2: & & - & x_2 & - & x_3 & - & 5x_4 & = & -7, \\
E_3: & & & & & 3x_3 & + & 13x_4 & = & 13, \\
E_4: & & & & & & - & 13x_4 & = & -13.
\end{array}$$

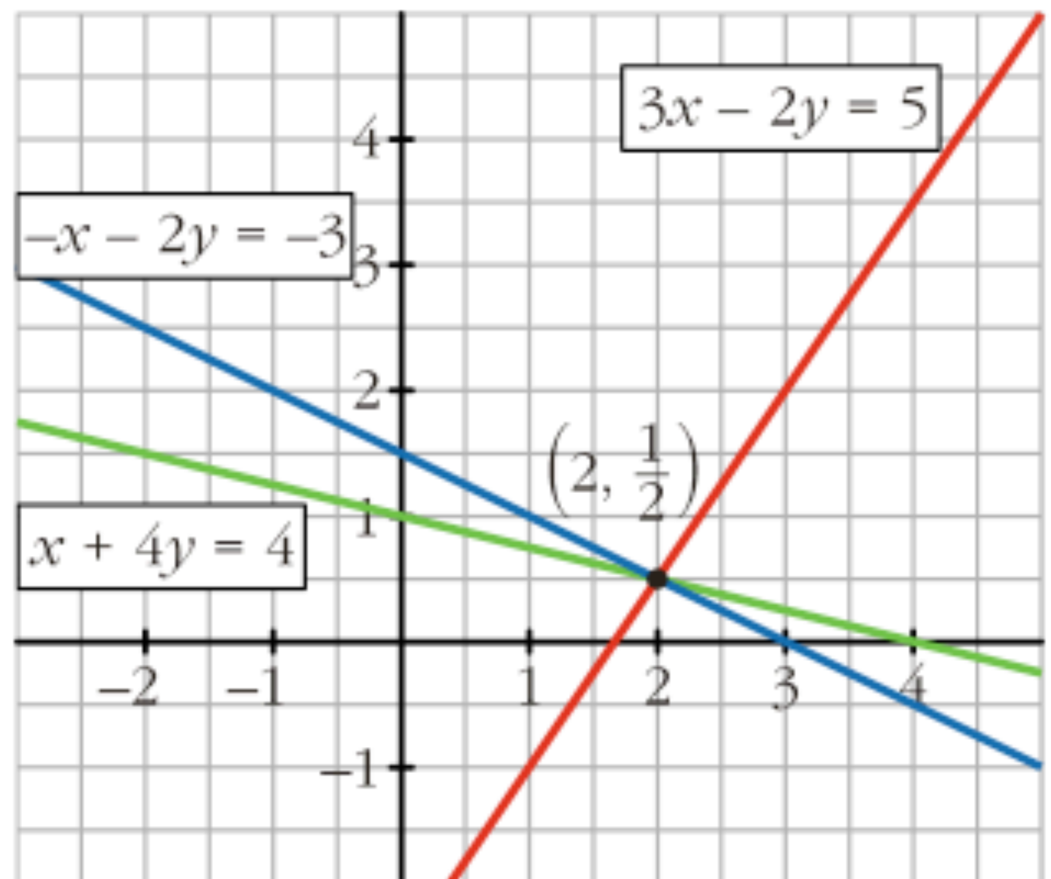
Este es un sistema “triangular” o reducido

Veamos como se comporta en el ejemplo

$$\left.\begin{array}{r} 3x-2y=5 \\ x+4y=4 \\ -x-2y=-3 \end{array}\right\}$$

Su solución es $\left(2, \frac{1}{2}\right)$

Geométrica mente, son tres rectas que se cortan en el punto $\left(2, \frac{1}{2}\right)$:



Veamos un ejemplo de solución

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcl}
E_1: & x_1 & + & x_2 & & & + & 3x_4 & = & 4, \\
E_2: & & - & x_2 & - & x_3 & - & 5x_4 & = & -7, \\
E_3: & & & & & 3x_3 & + & 13x_4 & = & 13, \\
E_4: & & & & & & - & 13x_4 & = & -13.
\end{array}
$$

Veamos un ejemplo de solución

$$\begin{array}{lrcrcrcrcr}
E_1: & x_1 & + & x_2 & & & + & 3x_4 & = & 4, \\
E_2: & & - & x_2 & - & x_3 & - & 5x_4 & = & -7, \\
E_3: & & & & & 3x_3 & + & 13x_4 & = & 13, \\
E_4: & & & & & & - & 13x_4 & = & -13.
\end{array}$$

$$x_4 = 1$$

Veamos un ejemplo de solución

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrr}
E_1: & x_1 & + & x_2 & & & + & 3x_4 & = & 4, \\
E_2: & & - & x_2 & - & x_3 & - & 5x_4 & = & -7, \\
E_3: & & & & & 3x_3 & + & 13x_4 & = & 13, \\
E_4: & & & & & & - & 13x_4 & = & -13.
\end{array}
$$

$$x_4 = 1$$

$$x_3 = \frac{1}{3}(13 - 13x_4) = \frac{1}{3}(13 - 13) = 0.$$

Veamos un ejemplo de solución

$$
\begin{array}{lcccccccl}
E_1: & x_1 & + & x_2 & & & + & 3x_4 & = & 4, \\
E_2: & & - & x_2 & - & x_3 & - & 5x_4 & = & -7, \\
E_3: & & & & & 3x_3 & + & 13x_4 & = & 13, \\
E_4: & & & & & & - & 13x_4 & = & -13.
\end{array}
$$

$$x_4 = 1$$

$$x_3 = \frac{1}{3}(13 - 13x_4) = \frac{1}{3}(13 - 13) = 0.$$

$$x_2 = -(-7 + 5x_4 + x_3) = -(-7 + 5 + 0) = 2,$$

Veamos un ejemplo de solución

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcr}
E_1: & x_1 & + & x_2 & & & + & 3x_4 & = & 4, \\
E_2: & & - & x_2 & - & x_3 & - & 5x_4 & = & -7, \\
E_3: & & & & & 3x_3 & + & 13x_4 & = & 13, \\
E_4: & & & & & & - & 13x_4 & = & -13.
\end{array}
$$

$$x_4 = 1$$

$$x_3 = \frac{1}{3}(13 - 13x_4) = \frac{1}{3}(13 - 13) = 0.$$

$$x_2 = -(-7 + 5x_4 + x_3) = -(-7 + 5 + 0) = 2,$$

$$x_1 = 4 - 3x_4 - x_2 = 4 - 3 - 2 = -1.$$

Matrices en los sistemas de ecuaciones

- Para automatizar el proceso anterior usamos la notación de matrices ***A*** de dimensiones ***n*** x ***m*** la cual tiene entradas a_{ij}.

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}.$$

- Una matriz de 1 x ***n*** es un vector renglón ***n***-dimensional, y una de ***n*** x 1 es un vector columna ***n***-dimensional.

Matrices en los sistemas de ecuaciones

- Para automatizar el proceso anterior usamos la notación de matrices ***A*** de dimensiones ***n*** x ***m*** la cual tiene entradas $\boldsymbol{a}_{ij}$.

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}.$$

- Una matriz de 1 x ***n*** es un vector renglón ***n***-dimensional, y una de ***n*** x 1 es un vector columna ***n***-dimensional.

$$A = [a_{11} \;\; a_{12} \;\; \cdots a_{1n}]$$

Matrices en los sistemas de ecuaciones

- Para automatizar el proceso anterior usamos la notación de matrices ***A*** de dimensiones ***n*** x ***m*** la cual tiene entradas $\boldsymbol{a}_{ij}$.

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}.$$

- Una matriz de 1 x ***n*** es un vector renglón ***n***-dimensional, y una de ***n*** x 1 es un vector columna ***n***-dimensional.

$$A = [a_{11} \;\; a_{12} \;\; \cdots a_{1n}]$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}$$

Matrices en los sistemas de ecuaciones

- La representación matricial del SLE con **n** ecuaciones y **n** incógnitas es

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{Ax = b}$$

- y formando la matriz aumentada de **n** x (**n**+1):

Matrices en los sistemas de ecuaciones

- La representación matricial del SLE con **n** ecuaciones y **n** incógnitas es

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{Ax = b}$$

- y formando la matriz aumentada de **n** x (**n**+1):

$$\tilde{A} = [A, \mathbf{b}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & a_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & a_{n,n+1} \end{bmatrix},$$

Matrices en los sistemas de ecuaciones

- La representación matricial del SLE con **n** ecuaciones y **n** incógnitas es

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} \mathbf{Ax = b}$$

- y formando la matriz aumentada de **n** x (**n**+1):

$$\tilde{A} = [A, \mathbf{b}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & a_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & a_{n,n+1} \end{bmatrix},$$

Método de eliminación Gaussiana con sustitución hacia atrás

$$\tilde{A} = [A, \mathbf{b}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & a_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & a_{n,n+1} \end{bmatrix},$$

- supóngase que $a_{11} \neq 0$, queremos todas las entradas abajo de a_{11} igual a cero, calculamos ($\mathbf{E}_k$ - m_{k1} $\mathbf{E}_1$) -> ($\mathbf{E}_k$), para $\boldsymbol{k}$= 2,...,**n**, con $m_{k1} = a_{k1}/a_{11}$.

- a_{11} es el **elemento pivote**.

Método de eliminación Gaussiana con sustitución hacia atrás

$$\tilde{A} = [A, \mathbf{b}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & a_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & a_{n,n+1} \end{bmatrix},$$

- supóngase que $a_{11} \neq 0$, queremos todas las entradas abajo de a_{11} igual a cero, calculamos ($\mathbf{E}_k$ - m_{k1} $\mathbf{E}_1$) -> ($\mathbf{E}_k$), para ***k***= 2,...,**n**, con $m_{k1} = a_{k1}/a_{11}$.
  - (Ya que queremos que $a_{k1} - a_{11} * m_{k1} = 0$)
- a_{11} es el **elemento pivote**.

Método de eliminación Gaussiana con sustitución hacia atrás

$$\tilde{A} = [A, \mathbf{b}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & a_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & a_{n,n+1} \end{bmatrix},$$

- supóngase que $a_{11} \neq 0$, queremos todas las entradas abajo de a_{11} igual a cero, calculamos (**E**$_k$ - m_{k1} **E**$_1$) -> (**E**$_k$), para ***k***= 2,...,**n**, con $m_{k1} = a_{k1}/a_{11}$.
  - (Ya que queremos que a_{k1} - a_{11} * m_{k1} = 0)
- a_{11} es el **elemento pivote**.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix} \begin{array}{c} E_2 - m_{21}E_1 \rightarrow E_2 \\ E_3 - m_{31}E_1 \rightarrow E_3 \\ \vdots \\ E_n - m_{n1}E_1 \rightarrow E_n \end{array} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}.$$

Método de eliminación Gaussiana con sustitución hacia atrás

- Supóngase que $a_{22} \neq 0$, para $\boldsymbol{k}= 3,...,\mathbf{n}$, con $m_{k2} = a_{k2}/a_{22}$. Ahora a_{22} es el **elemento pivote**.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix} \begin{matrix} E_3 - m_{32}E_2 \rightarrow E_3 \\ \vdots \\ E_n - m_{n2}E_2 \rightarrow E_n \end{matrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}$$

- siguiendo el proceso desde $k=3,...,n$ con ninguna $a_{k-1,k-1} = 0$ obtenemos:

Método de eliminación Gaussiana con sustitución hacia atrás

- Supóngase que $a_{22} \neq 0$, para $\boldsymbol{k}= 3,\ldots,\mathbf{n}$, con $m_{k2} = a_{k2}/a_{22}$. Ahora a_{22} es el **elemento pivote**.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix} \begin{array}{c} E_3 - m_{32}E_2 \to E_3 \\ \vdots \\ E_n - m_{n2}E_2 \to E_n \end{array} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}$$

- siguiendo el proceso desde $k=3,\ldots,n$ con ninguna $a_{k-1,k-1} = 0$ obtenemos:

$$\tilde{\tilde{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} & a_{2,n+1} \\ & & & \vdots & \vdots \\ 0 & & 0 & a_{nn} & a_{n,n+1} \end{bmatrix}$$

Sustitución hacia atrás

$$\tilde{\tilde{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} & a_{2,n+1} \\ & & & \vdots & \vdots \\ 0 & & 0 & a_{nn} & a_{n,n+1} \end{bmatrix}$$

- Resolviendo la ***n***-ésima ecuación:
- Resolviendo la (***n-1)***-ésima ecuación
- y en general
- para ***i***= ***n-1, n-2***, ... , 2 , 1

Sustitución hacia atrás

$$\tilde{\tilde{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} & a_{2,n+1} \\ & & & \vdots & \vdots \\ 0 & & 0 & a_{nn} & a_{n,n+1} \end{bmatrix}$$

- Resolviendo la ***n***-ésima ecuación: $$x_n = \frac{a_{n,n+1}}{a_{nn}}.$$
- Resolviendo la (***n-1)***-ésima ecuación
- y en general
- para ***i***= ***n-1, n-2***, ... , 2 , 1

Sustitución hacia atrás

$$\tilde{\tilde{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} & a_{2,n+1} \\ & & & \vdots & \vdots \\ 0 & & 0 & a_{nn} & a_{n,n+1} \end{bmatrix}$$

- Resolviendo la ***n***-ésima ecuación: $$x_n = \frac{a_{n,n+1}}{a_{nn}}.$$
- Resolviendo la (***n-1)***-ésima ecuación $$x_{n-1} = \frac{a_{n-1,n+1} - a_{n-1,n}x_n}{a_{n-1,n-1}}.$$
- y en general
- para ***i***= ***n-1, n-2***, ... , 2 , 1

Sustitución hacia atrás

$$\tilde{\tilde{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} & a_{2,n+1} \\ & & & \vdots & \vdots \\ 0 & & 0 & a_{nn} & a_{n,n+1} \end{bmatrix}$$

- Resolviendo la ***n***-ésima ecuación: $$x_n = \frac{a_{n,n+1}}{a_{nn}}.$$
- Resolviendo la (***n-1)***-ésima ecuación $$x_{n-1} = \frac{a_{n-1,n+1} - a_{n-1,n}x_n}{a_{n-1,n-1}}.$$
- y en general $$x_i = \frac{a_{i,n+1} - (a_{i,i+1}x_{i+1} + \cdots + a_{i,n}x_n)}{a_{ii}} = \frac{a_{i,n+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j}{a_{ii}}$$
- para ***i***= ***n-1, n-2***, ... , 2 , 1

Método de eliminación Gaussiana con sustitución hacia atrás, modificaciones

- El método anterior falla si alguna $a_{ii} = 0$ para $\boldsymbol{i<n}$, o bien si a_{nn} es cero no se puede hacer sustitución hacia atrás. Esto no significa necesariamente que el sistema no tenga solución:

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcr}
E_1: & x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & -8, \\
E_2: & 2x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 3x_4 & = & -20, \\
E_3: & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & -2, \\
E_4: & x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & + & 3x_4 & = & 4.
\end{array}
\longrightarrow
\left[\begin{array}{rrrrr}
1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\
2 & -2 & 3 & -3 & -20 \\
1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\
1 & -1 & 4 & 3 & 4
\end{array}\right].
$$

- eliminando para el pivote a_{11} ¿?

Método de eliminación Gaussiana con sustitución hacia atrás, modificaciones

- El método anterior falla si alguna a_{ii} = 0 para ***i***<***n***, o bien si a_{nn} es cero no se puede hacer sustitución hacia atrás. Esto no significa necesariamente que el sistema no tenga solución:

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcl}
E_1: & x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & -8, \\
E_2: & 2x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 3x_4 & = & -20, \\
E_3: & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & -2, \\
E_4: & x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & + & 3x_4 & = & 4.
\end{array}
\longrightarrow
\left[\begin{array}{rrrrr}
1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\
2 & -2 & 3 & -3 & -20 \\
1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\
1 & -1 & 4 & 3 & 4
\end{array}\right].
$$

- eliminando para el pivote a_{11} ¿? $(E_2 - 2E_1) \to (E_2)$, $(E_3 - E_1) \to (E_3)$, and $(E_4 - E_1) \to (E_4)$

Método de eliminación Gaussiana con sustitución hacia atrás, modificaciones

- El método anterior falla si alguna $a_{ii} = 0$ para ***i***<***n***, o bien si a_{nn} es cero no se puede hacer sustitución hacia atrás. Esto no significa necesariamente que el sistema no tenga solución:

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcl}
E_1: & x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & -8, \\
E_2: & 2x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 3x_4 & = & -20, \\
E_3: & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & -2, \\
E_4: & x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & + & 3x_4 & = & 4.
\end{array}
\longrightarrow
\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 2 & -2 & 3 & -3 & -20 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}.
$$

- eliminando para el pivote a_{11} ¿? $(E_2 - 2E_1) \rightarrow (E_2)$, $(E_3 - E_1) \rightarrow (E_3)$, and $(E_4 - E_1) \rightarrow (E_4)$

$$
\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 12 \end{bmatrix}
$$

Método de eliminación Gaussiana con sustitución hacia atrás, modificaciones

- El método anterior falla si alguna $a_{ii} = 0$ para $\boldsymbol{i<n}$, o bien si a_{nn} es cero no se puede hacer sustitución hacia atrás. Esto no significa necesariamente que el sistema no tenga solución:

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrl}
E_1: & x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & -8, \\
E_2: & 2x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 3x_4 & = & -20, \\
E_3: & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & -2, \\
E_4: & x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & + & 3x_4 & = & 4.
\end{array}
\longrightarrow
\left[\begin{array}{rrrrr}
1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\
2 & -2 & 3 & -3 & -20 \\
1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\
1 & -1 & 4 & 3 & 4
\end{array}\right].
$$

- eliminando para el pivote a_{11} ¿? $(E_2 - 2E_1) \rightarrow (E_2)$, $(E_3 - E_1) \rightarrow (E_3)$, and $(E_4 - E_1) \rightarrow (E_4)$

$$
\left[\begin{array}{rrrrr}
1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\
0 & 0 & -1 & -1 & -4 \\
0 & 2 & -1 & 1 & 6 \\
0 & 0 & 2 & 4 & 12
\end{array}\right]
$$

Método de eliminación Gaussiana con sustitución hacia atrás, modificaciones

- El método anterior falla si alguna $a_{ii} = 0$ para $\boldsymbol{i<n}$, o bien si a_{nn} es cero no se puede hacer sustitución hacia atrás. Esto no significa necesariamente que el sistema no tenga solución:

$$
\begin{aligned}
E_1:&\quad x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -8,\\
E_2:&\quad 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = -20,\\
E_3:&\quad x_1 + x_2 + x_3 = -2,\\
E_4:&\quad x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 4.
\end{aligned}
\;\longrightarrow\;
\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 2 & -2 & 3 & -3 & -20 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}.
$$

- eliminando para el pivote a_{11} ¿? $(E_2 - 2E_1) \to (E_2),\ (E_3 - E_1) \to (E_3),$ and $(E_4 - E_1) \to (E_4)$

$$
\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 12 \end{bmatrix}
$$

Problema

Método de eliminación Gaussiana con sustitución hacia atrás, modificaciones

- El método anterior falla si alguna $a_{ii} = 0$ para $i<n$, o bien si a_{nn} es cero no se puede hacer sustitución hacia atrás. Esto no significa necesariamente que el sistema no tenga solución:

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrr}
E_1: & x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & -8, \\
E_2: & 2x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 3x_4 & = & -20, \\
E_3: & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & -2, \\
E_4: & x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & + & 3x_4 & = & 4.
\end{array}
\longrightarrow
\left[\begin{array}{rrrrr}
1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\
2 & -2 & 3 & -3 & -20 \\
1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\
1 & -1 & 4 & 3 & 4
\end{array}\right].
$$

- eliminando para el pivote a_{11} ¿? $(E_2 - 2E_1) \to (E_2)$, $(E_3 - E_1) \to (E_3)$, and $(E_4 - E_1) \to (E_4)$

$$
\left[\begin{array}{rrrrr}
1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\
0 & 0 & -1 & -1 & -4 \\
0 & 2 & -1 & 1 & 6 \\
0 & 0 & 2 & 4 & 12
\end{array}\right]
\qquad
\left[\begin{array}{rrrrr}
1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\
0 & 2 & -1 & 1 & 6 \\
0 & 0 & -1 & -1 & -4 \\
0 & 0 & 2 & 4 & 12
\end{array}\right]
$$

Problema

Método de eliminación Gaussiana con sustitución hacia atrás, modificaciones

- El método anterior falla si alguna $a_{ii} = 0$ para ***i<n***, o bien si a_{nn} es cero no se puede hacer sustitución hacia atrás. Esto no significa necesariamente que el sistema no tenga solución:

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrr}
E_1: & x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & -8, \\
E_2: & 2x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 3x_4 & = & -20, \\
E_3: & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & -2, \\
E_4: & x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & + & 3x_4 & = & 4.
\end{array}
\longrightarrow
\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 2 & -2 & 3 & -3 & -20 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}.
$$

- eliminando para el pivote a_{11} ¿? $(E_2 - 2E_1) \to (E_2),\ (E_3 - E_1) \to (E_3),\ \text{and}\ (E_4 - E_1) \to (E_4)$

$$
\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 12 \end{bmatrix}
$$

Problema

$$
\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 12 \end{bmatrix}
$$

con

Método de eliminación Gaussiana con sustitución hacia atrás, modificaciones

- El método anterior falla si alguna $a_{ii} = 0$ para $i<n$, o bien si a_{nn} es cero no se puede hacer sustitución hacia atrás. Esto no significa necesariamente que el sistema no tenga solución:

$$\begin{aligned}
E_1:&\quad x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -8,\\
E_2:&\quad 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = -20,\\
E_3:&\quad x_1 + x_2 + x_3 = -2,\\
E_4:&\quad x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 4.
\end{aligned}
\quad\longrightarrow\quad
\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 2 & -2 & 3 & -3 & -20 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

- eliminando para el pivote a_{11} ¿? $(E_2 - 2E_1) \to (E_2)$, $(E_3 - E_1) \to (E_3)$, and $(E_4 - E_1) \to (E_4)$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 12 \end{bmatrix}$$

Problema

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 12 \end{bmatrix}$$

con $(E_2) \leftrightarrow (E_3)$

Método de eliminación Gaussiana con sustitución hacia atrás, modificaciones

- Entonces tenemos

- Finalmente con $(E_4 + 2E_3) \rightarrow (E_4)$

Método de eliminación Gaussiana con sustitución hacia atrás, modificaciones

- Entonces tenemos

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 12 \end{bmatrix}$$

- Finalmente con $(E_4 + 2E_3) \rightarrow (E_4)$

Método de eliminación Gaussiana con sustitución hacia atrás, modificaciones

- Entonces tenemos

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 12 \end{bmatrix}$$

- Finalmente con $(E_4 + 2E_3) \rightarrow (E_4)$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Algoritmo de Eliminación Gaussiana con sustitución hacia atras

ENTRADA número de incógnitas y ecuaciones n; matriz aumentada $A = (a_{ij})$ donde $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq n+1$.

SALIDA solución $x_1, x_2, \ldots, x_n$ o mensaje de que el sistema lineal no tiene solución única.

Paso 1 Para $i = 1, \ldots, n-1$ haga pasos 2-4. (*Proceso de eliminación.*)

Paso 2 Sea p el entero más pequeño con $i \leq p \leq n$ y $a_{pi} \neq 0$.
Si no puede encontrarse un entero p
entonces SALIDA ('no existe solución única');
PARAR.

Paso 3 Si $p \neq i$ entonces realice $(E_p) \leftrightarrow (E_i)$.

Paso 4 Para $j = i+1, \ldots, n$ haga pasos 5 y 6.

Paso 5 Tome $m_{ji} = a_{ji}/a_{ii}$.

Paso 6 Realice $(E_j - m_{ji} E_i) \rightarrow (E_j)$;

Algoritmo de Eliminación Gaussiana con sustitución hacia atras

Paso 7 Si $a_{nn} = 0$ entonces SALIDA ('no existe solución única')
PARAR.

Paso 8 Tome $x_n = a_{n,n+1}/a_{nn}$. *(Comience la sustitución hacia atrás.)*

Paso 9 Para $i = n-1, \ldots, 1$ tome $x_i = \left[a_{i,n+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j\right] / a_{ii}$.

Paso 10 SALIDA $(k_1, \ldots, x_n)$; *(Procedimiento terminado exitosamente.)*
PARAR. ∎

Error debido a las operaciones, también saber el tiempo que toma

Error debido a las operaciones, también saber el tiempo que toma

- ¿que orden de complejidad tiene este algoritmo?

Error debido a las operaciones, también saber el tiempo que toma

- ¿que orden de complejidad tiene este algoritmo?
- Hay que contar el # de multiplicaciones y divisiones, para un sistema de ecuaciones de ***n*** x ***n***
    -

Error debido a las operaciones, también saber el tiempo que toma

Error debido a las operaciones, también saber el tiempo que toma

- ¿que orden de complejidad tiene este algoritmo?

Error debido a las operaciones, también saber el tiempo que toma

- ¿que orden de complejidad tiene este algoritmo?

- Hay que contar el # de multiplicaciones y divisiones, para un sistema de ecuaciones de n x n

  - multiplicaciones/divisiones O(n^3)

  - sumas/restas O(n^3)