Estrategias de pivoteo en eliminación Gaussiana

MAT-251

Dr. Alonso Ramírez Manzanares
Depto. de Matemáticas
Univ. de Guanajuato
e-mail: alram@cimat.mx
web: http://www.cimat.mx/~alram/met_num/

Dr. Joaquín Peña Acevedo
CIMAT A.C.
e-mail: joaquin@cimat.mx

Los métodos numéricos en el algoritmo de Eliminación Gaussiana

- Habiéndonos asegurado que el pivote nunca es cero, tenemos todo para resolver los sistemas desde el punto de vista teórico, pero no para la realidad "numérica".

- En la realidad es posible que el número de cálculos de orden O($\boldsymbol{n}^3$) domine el resultado de los mismos.

- Para evitar lo anterior es necesario hacer intercambio de renglones incluso si el elemento pivote actual es diferente de cero: cuando hacemos el siguiente calculo, ¿qué pasa si el pivote es muy pequeño?

$$m_{ki} = \frac{a_{ki}}{a_{ii}}$$

- $\boldsymbol{m}_{ki}$ será mucho mas grande que 1 y el error de redondeo de todo un renglón será multiplicado por él. Además en la sustitución hacia atrás vamos a dividir por un valor muy pequeño:

$$x_i = \frac{a_{i,n+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}}{a_{ii}}$$

Estrategias de Pivoteo, un ejemplo

- Sea el SLE con solución exacta x_1=10.0 y x_2=1.00.

$$\begin{array}{lrcrcl} E_1: & 0.003000x_1 & + & 59.14x_2 & = & 59.17, \\ E_2: & 5.291x_1 & - & 6.130x_2 & = & 46.78 \end{array}$$

- Si lo resolvemos con aritmética de 4 dígitos con redondeo, y calculamos el primer factor

- Lo cual nos lleva al sistema equivalente

Estrategias de Pivoteo, un ejemplo

- Sea el SLE con solución exacta x_1=10.0 y x_2=1.00.

$$
\begin{array}{lrcrcl}
E_1: & 0.003000x_1 & + & 59.14x_2 & = & 59.17, \\
E_2: & 5.291x_1 & - & 6.130x_2 & = & 46.78
\end{array}
$$

- Si lo resolvemos con aritmética de 4 dígitos con redondeo, y calculamos el primer factor

$$m_{21} = \frac{5.291}{0.003000} = 1763.\bar{6},$$

- Lo cual nos lleva al sistema equivalente

Estrategias de Pivoteo, un ejemplo

- Sea el SLE con solución exacta x_1=10.0 y x_2=1.00.

$$\begin{array}{rrcrcr} E_1: & 0.003000x_1 & + & 59.14x_2 & = & 59.17, \\ E_2: & 5.291x_1 & - & 6.130x_2 & = & 46.78 \end{array}$$

- Si lo resolvemos con aritmética de 4 dígitos con redondeo, y calculamos el primer factor

$$m_{21} = \frac{5.291}{0.003000} = 1763.\bar{6}, \quad \approx 1764$$

- Lo cual nos lleva al sistema equivalente

Estrategias de Pivoteo, un ejemplo

- Sea el SLE con solución exacta $\boldsymbol{x}_1$=10.0 y $\boldsymbol{x}_2$=1.00.

$$\begin{array}{lrcrcl} E_1: & 0.003000x_1 & + & 59.14x_2 & = & 59.17, \\ E_2: & 5.291x_1 & - & 6.130x_2 & = & 46.78 \end{array}$$

- Si lo resolvemos con aritmética de 4 dígitos con redondeo, y calculamos el primer factor

$$m_{21} = \frac{5.291}{0.003000} = 1763.\bar{6}, \quad \approx 1764$$

- Lo cual nos lleva al sistema equivalente

$$\begin{array}{rcl} 0.003000x_1 + 59.14x_2 & = & 59.17 \\ -104300x_2 & \approx & -104400 \end{array}$$

Estrategias de Pivoteo, un ejemplo

- Lo cual nos lleva a cometer los errores de aproximación:

$$x_2 \approx 1.001,$$

$$x_1 \approx \frac{59.17 - (59.14)(1.001)}{0.003000} = -10.00$$

- ya que el error 0.001 está siendo aumentado por 59.14/0.003 = 20000.

- Esto fué en un sistema de 2x2, imagínense en sistemas de muchas ecuaciones.

Prueba de lo anterior en una hoja de cálculo

m21	1763.66667		
R(m21)	1764		
e1	**0.003**	**59.14**	**59.17**
e2	**5.291**	**-6.13**	**46.78**
e1*R(m21)	5.292	104322.96	104375.88
e2-e1*R(m21)	-0.001	-104329.09	-104329.1
		x2	**1**
		x1	**9.99811**
R(e1*R(m21))	5.292	104300	104400
e2-R(e1*R(m21))	-0.001	-104306.13	-104353.22
R(e2-R(e1*R(m21)))		-104300	-104400
		x2	1.00095877
		R(x2)	**1.001**
		a12*R(x2)	59.19914
		R(a12*R(x2))	59.20
		x1	**-10**

Estrategias de pivoteo, pivoteo parcial

- Para evitar el problema anterior escogemos como pivote el valor más grande en valor absoluto que hay en la columna debajo de la diagonal:

$$|a_{pi}| = \max_{i \leq k \leq n} |a_{ki}|$$

- De tal forma que si i<>p, intercambiamos $(E_i) \leftrightarrow (E_p)$

- En el ejemplo anterior, aún utilizando representación de 4 dígitos, esto da como resultado:

Estrategias de pivoteo, pivoteo parcial

- Para evitar el problema anterior escogemos como pivote el valor más grande en valor absoluto que hay en la columna debajo de la diagonal:

$$|a_{pi}| = \max_{i \le k \le n} |a_{ki}|$$

- De tal forma que si i<>p, intercambiamos $(E_i) \leftrightarrow (E_p)$

- En el ejemplo anterior, aún utilizando representación de 4 dígitos, esto da como resultado:

$$\begin{aligned} E_1: &\quad 5.291x_1 - 6.130x_2 = 46.78, \\ E_2: &\quad 0.003000x_1 + 59.14x_2 = 59.17. \end{aligned}$$

Estrategias de pivoteo, pivoteo parcial

- Para evitar el problema anterior escogemos como pivote el valor más grande en valor absoluto que hay en la columna debajo de la diagonal:

$$|a_{pi}| = \max_{i \le k \le n} |a_{ki}|$$

- De tal forma que si i<>p, intercambiamos $(E_i) \leftrightarrow (E_p)$

- En el ejemplo anterior, aún utilizando representación de 4 dígitos, esto da como resultado:

$$\begin{array}{lrcrcl} E_1: & 5.291x_1 & - & 6.130x_2 & = & 46.78, \\ E_2: & 0.003000x_1 & + & 59.14x_2 & = & 59.17. \end{array}$$

$$m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = 0.0005670,$$

Estrategias de pivoteo, pivoteo parcial

- Para evitar el problema anterior escogemos como pivote el valor más grande en valor absoluto que hay en la columna debajo de la diagonal:

$$|a_{pi}| = \max_{i \leq k \leq n} |a_{ki}|$$

- De tal forma que si i<>p, intercambiamos $(E_i) \leftrightarrow (E_p)$

- En el ejemplo anterior, aún utilizando representación de 4 dígitos, esto da como resultado:

$$\begin{array}{lrcrcr} E_1: & 5.291x_1 & - & 6.130x_2 & = & 46.78, \\ E_2: & 0.003000x_1 & + & 59.14x_2 & = & 59.17. \end{array}$$

$$m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = 0.0005670, \qquad x_1 = 10.00 \text{ and } x_2 = 1.000.$$

Valores m_{kj}

- Bajo este esquema de pivoteo parcial
    - ¿cuál es el valor máximo que pueden tener los valores m_{kj}?

Estategías de pivoteo, pivoteo parcial escalado (pivoteo por columnas)

- En el mismo sistema que antes, pero ahora E_1 es escalado por 10000

$$\begin{array}{rrcrcl} E_1: & 30.00x_1 & + & 591400x_2 & = & 591700, \\ E_2: & 5.291x_1 & - & 6.130x_2 & = & 46.78 \end{array}$$

- Entonces para detectar el posible pivote más grande, normalizamos primero con respecto al coeficiente mas grande de la ecuación

- y al buscar el pivote utilizamos

Estategías de pivoteo, pivoteo parcial escalado (pivoteo por columnas)

- En el mismo sistema que antes, pero ahora E_1 es escalado por 10000

$$\begin{array}{lrcrcl} E_1: & 30.00x_1 & + & 591400x_2 & = & 591700, \\ E_2: & 5.291x_1 & - & 6.130x_2 & = & 46.78 \end{array}$$

- Entonces para detectar el posible pivote más grande, normalizamos primero con respecto al coeficiente mas grande de la ecuación

$$s_k = \max_{1 \le j \le n} |a_{kj}|.$$

- y al buscar el pivote utilizamos

Estategías de pivoteo, pivoteo parcial escalado (pivoteo por columnas)

- En el mismo sistema que antes, pero ahora E_1 es escalado por 10000

$$
\begin{array}{lrcrcl}
E_1: & 30.00x_1 & + & 591400x_2 & = & 591700, \\
E_2: & 5.291x_1 & - & 6.130x_2 & = & 46.78
\end{array}
$$

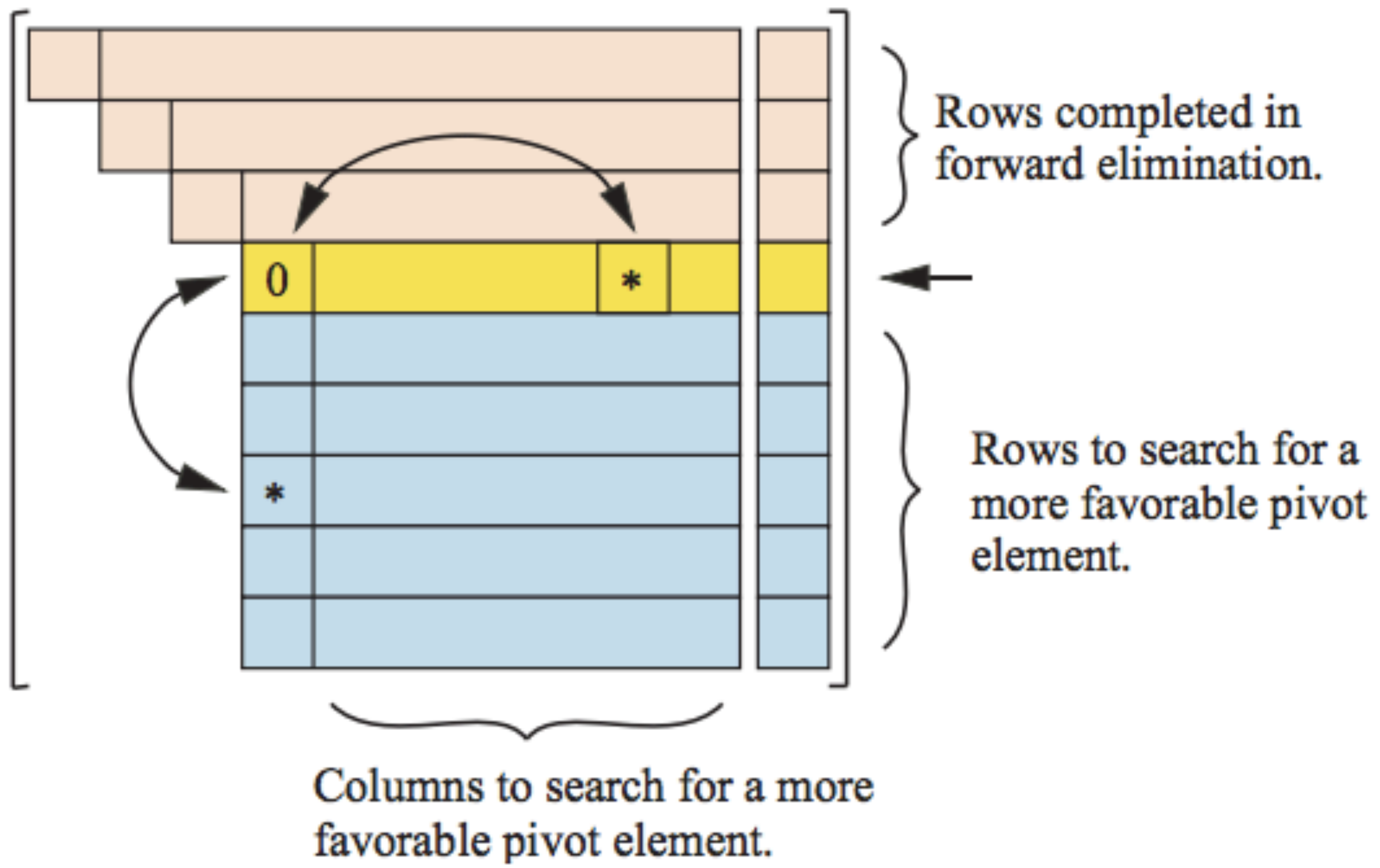
- Entonces para detectar el posible pivote más grande, normalizamos primero con respecto al coeficiente mas grande de la ecuación

$$s_k = \max_{1 \le j \le n} |a_{kj}|.$$

- y al buscar el pivote utilizamos $$\frac{|a_{pi}|}{s_p} = \max_{i \le k \le n} \frac{|a_{ki}|}{s_k}$$

Pivoteo Total

- Si queremos asegurar en cada paso *i* que vamos a escoger el pivote más favorable podemos barrer la matriz de esta forma:



- Entonces, si el SEL es difícil de resolver esta es la solución propuesta, solo se debe de considerar que hay que agregar mas comparaciones. Aún así la complejidad queda de orden $O(n^3)$.

Información de implementación

- Se pueden guardar los números $m_{k,i}$ debajo de la diagonal principal, de tal forma que los podemos usar para aplicarlos a diferentes vectores ***b*** del sistema ***Ax***=***b***.

- Nótese que los intercambios de renglones (y quizá de columnas) también deben de memorizarse. Cada vez que se intercambian renglones se tiene que tener cuidado de intercambiar toda la información.