Clase No. 4:

Factorización LU

MAT–251

Dr. Alonso Ramírez Manzanares
CIMAT A.C.
e-mail: alram@ cimat.mx
web: http://www.cimat.mx/~alram/met_num/

Dr. Joaquín Peña Acevedo
CIMAT A.C.
e-mail: joaquin@ cimat.mx

Matrices triangulares inferiores (I)

Consideremos el sistema

$$\boldsymbol{L}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \qquad \text{donde} \qquad \boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}$$

Proposición.

Sea $\boldsymbol{L}$ una matriz triangular inferior. El sistema $\boldsymbol{L}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ tiene solución si y sólo si los elementos de su diagonal son diferentes de cero.

Vimos que la solución se puede calcular mediante *sustitución hacia adelante*

$$x_i = \frac{1}{l_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}x_j\right)$$

- Como el sistema $\boldsymbol{L}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ tiene solución única para cada $\boldsymbol{b}$, la matriz $\boldsymbol{L}$ es no singular.

Factorización LU

- Tenemos entonces que

$$\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U} \qquad \Longrightarrow \qquad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{U}$$

Sobre la unicidad de la factorización LU

- Hay que notar que si $\boldsymbol{D}$ es una matriz diagonal no singular, entonces

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{D}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{U} = (\boldsymbol{L}\boldsymbol{D})(\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{U})$$

  $\boldsymbol{L}\boldsymbol{D}$ es triangular inferior y $\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{U}$ es triangular superior, por lo que podemos tener varias descomposiciones.
- Hacemos el convenio de que por factorización LU nos referimos a la factorización en la que la matriz $\boldsymbol{L}$ es triangular inferior y que los elementos de su diagonal son iguales a 1.

Proposición.

Si $\boldsymbol{A}$ es no singular y tiene una factorización LU, entonces la factorización es única.

Existencia de la factorización LU

Aun cuando $\boldsymbol{A}$ sea no singular, la matriz podría no tener una factorización LU. Por ejemplo,

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Si la matriz $\boldsymbol{A}$ es singular y tiene una factorización LU, ésta puede no ser única. Por ejemplo,

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

es una factorización LU para cualquier λ.

Observaciones

- En caso de que matriz $\boldsymbol{A}$ requiera pivoteo parcial, entonces podemos encontrar una matriz de permutación $\boldsymbol{P}$ tal que

$$\boldsymbol{PA} = \boldsymbol{LU}.$$

Observaciones sobre la factorización LU

- Para resolver el sistema $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ hay que considerar el sistema

$$\boldsymbol{PAx} = \boldsymbol{Pb} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{LUx} = \boldsymbol{Pb}$$

- Para pivoteo total, entonces

$$\boldsymbol{PAQ} = \boldsymbol{LU}.$$

donde $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{Q}$ son matrices de permutación.

Una implementación robusta debe al menos calcular la matriz $\boldsymbol{P}$ (la que se genera por pivoteo parcial) para poder calcular la solución del problema.