

Métodos para matrices especiales. Descomposición de Cholesky

MAT-25 I

Dr. Alonso Ramírez Manzanares
CIMAT A.C.

e-mail: alam@cimat.mx

web: http://www.cimat.mx/~alam/met_num/

Dr. Joaquín Peña Acevedo
CIMAT A.C.

e-mail: joaquin@cimat.mx

Ventajas computacionales de las factorizaciones ... en segundos

Ventajas computacionales de las factorizaciones ... en segundos

- ¿donde se usan factorizaciones en la vida real?

Ventajas computacionales de las factorizaciones ... en segundos

- ¿donde se usan factorizaciones en la vida real?

Ventajas computacionales de las factorizaciones ... en segundos

- ¿donde se usan factorizaciones en la vida real?
- Si hacemos una descomposición ($O(n^3)$), de tal forma que resolvemos el sistema $\mathbf{Ax}_i = \mathbf{b}_i$ para diferentes vectores $\mathbf{b}_i$.

Ventajas computacionales de las factorizaciones ... en segundos

- ¿donde se usan factorizaciones en la vida real?
- Si hacemos una descomposición ($O(n^3)$), de tal forma que resolvemos el sistema $\mathbf{Ax}_i=\mathbf{b}_i$ para diferentes vectores $\mathbf{b}_i$.
- Entonces la solución estará dada por el orden $O(n^2)$ en lugar de $O(n^3)$.

Ventajas computacionales de las factorizaciones ... en segundos

- ¿donde se usan factorizaciones en la vida real?
- Si hacemos una descomposición ($O(n^3)$), de tal forma que resolvemos el sistema $\mathbf{Ax}_i=\mathbf{b}_i$ para diferentes vectores $\mathbf{b}_i$.
- Entonces la solución estará dada por el orden $O(n^2)$ en lugar de $O(n^3)$.
- Para sistemas de tamaño, digamos de 1000x1000

Ventajas computacionales de las factorizaciones ... en segundos

- ¿donde se usan factorizaciones en la vida real?
- Si hacemos una descomposición ($O(n^3)$), de tal forma que resolvemos el sistema $\mathbf{Ax}_i=\mathbf{b}_i$ para diferentes vectores $\mathbf{b}_i$.
- Entonces la solución estará dada por el orden $O(n^2)$ en lugar de $O(n^3)$.
- Para sistemas de tamaño, digamos de 1000×1000
 - $1000^2 = 1,000,000 = 0.001 * 1,000,000,000 = 0.001 * 1,000^3$

Matrices con diagonal estrictamente-dominante

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$$

Matrices con diagonal estrictamente-dominante

- La definición de una matriz cuadrada estrictamente diagonal-dominante es la siguiente:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$$

Matrices con diagonal estrictamente-dominante

- La definición de una matriz cuadrada estrictamente diagonal-dominante es la siguiente:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$$

Matrices con diagonal estrictamente-dominante

- La definición de una matriz cuadrada estrictamente diagonal-dominante es la siguiente:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$$

Matrices con diagonal estrictamente-dominante

- La definición de una matriz cuadrada estrictamente diagonal-dominante es la siguiente:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$$

- Nótese que dada una matriz estrictamente diagonal-dominante, su transpuesta no tiene por que serlo.

Matrices con diagonal estrictamente-dominante

- La definición de una matriz cuadrada estrictamente diagonal-dominante es la siguiente:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$$

- Nótese que dada una matriz estrictamente diagonal-dominante, su transpuesta no tiene por que serlo.
- ***Una matriz estrictamente diagonal-dominante tiene inversa.*** Se puede aplicar eliminación Gaussiana sin necesidad de hacer intercambio de renglones, y los cálculos serán estables con respecto a los errores de redondeo.

Una matriz estrictamente diagonal-dominante tiene inversa, demostración:

- Prueba por contradicción: consideremos que es singular, entonces consideremos $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$, con solución $\mathbf{x} = (x_i)$ que no es cero. Sea k un índice para el cual $0 < |x_k| = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$.

Una matriz estrictamente diagonal-dominante tiene inversa, demostración:

- Prueba por contradicción: consideremos que es singular, entonces consideremos $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$, con solución $\mathbf{x} = (x_i)$ que no es cero. Sea k un índice para el cual $0 < |x_k| = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$.

Dado que $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = 0$ para toda $i = 1, 2, \dots, n$, tendremos, cuando $i = k$,

$$a_{kk}x_k = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n a_{kj}x_j.$$

Esto implica que

$$|a_{kk}||x_k| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{kj}||x_j|,$$

o bien

$$|a_{kk}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{kj}| \frac{|x_j|}{|x_k|} \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{kj}|.$$

Esta desigualdad contradice el dominio diagonal estricto de A . En consecuencia, la única solución de $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, es $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, condición que equivale a la no singularidad de A .

Matrices definidas positivas

- Aquí trabajaremos con aquellas matrices cuadradas y simétricas tales que $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$ para todo vector $\mathbf{x}$ diferente de $\mathbf{0}$. Es decir que la matriz de tamaño 1x1 (escalar) resultante de la operación es positiva.

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$
$$= [x_1, x_2, \dots, x_n] \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{2j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj} x_j \end{bmatrix} = \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j \right].$$

Matrices definidas positivas

- Aquí trabajaremos con aquellas matrices cuadradas y simétricas tales que $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$ para todo vector $\mathbf{x}$ diferente de $\mathbf{0}$.

- Ejemplo, una matriz positiva:

$$M_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrices definidas positivas

- Aquí trabajaremos con aquellas matrices cuadradas y simétricas tales que $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$ para todo vector $\mathbf{x}$ diferente de $\mathbf{0}$.

- Ejemplo, una matriz positiva:

$$M_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} z_0 & z_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \end{bmatrix} =$$

Matrices definidas positivas

- Aquí trabajaremos con aquellas matrices cuadradas y simétricas tales que $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$ para todo vector $\mathbf{x}$ diferente de $\mathbf{0}$.

- Ejemplo, una matriz positiva:

$$M_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} z_0 & z_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} z_0 \cdot 1 + z_1 \cdot 0 & z_0 \cdot 0 + z_1 \cdot 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \end{bmatrix} = z_0^2 + z_1^2$$

Matrices definidas positivas

- Aquí trabajaremos con aquellas matrices cuadradas y simétricas tales que $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$ para todo vector $\mathbf{x}$ diferente de $\mathbf{0}$.

- Ejemplo, una matriz positiva:

$$M_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} z_0 & z_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} z_0 \cdot 1 + z_1 \cdot 0 & z_0 \cdot 0 + z_1 \cdot 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \end{bmatrix} = z_0^2 + z_1^2$$

A esta forma se le llama forma cuadrática asociada a la matriz.

Matrices definidas positivas

- Una matriz no positiva pero que es definida positiva

$$M_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Matrices definidas positivas

- Una matriz no positiva pero que es definida positiva $M_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} x^T M_1 x &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (2x_1 - x_2) & (-x_1 + 2x_2 - x_3) & (-x_2 + 2x_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &= 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2 \\ &= x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_3^2 \end{aligned}$$

Matrices definidas positivas

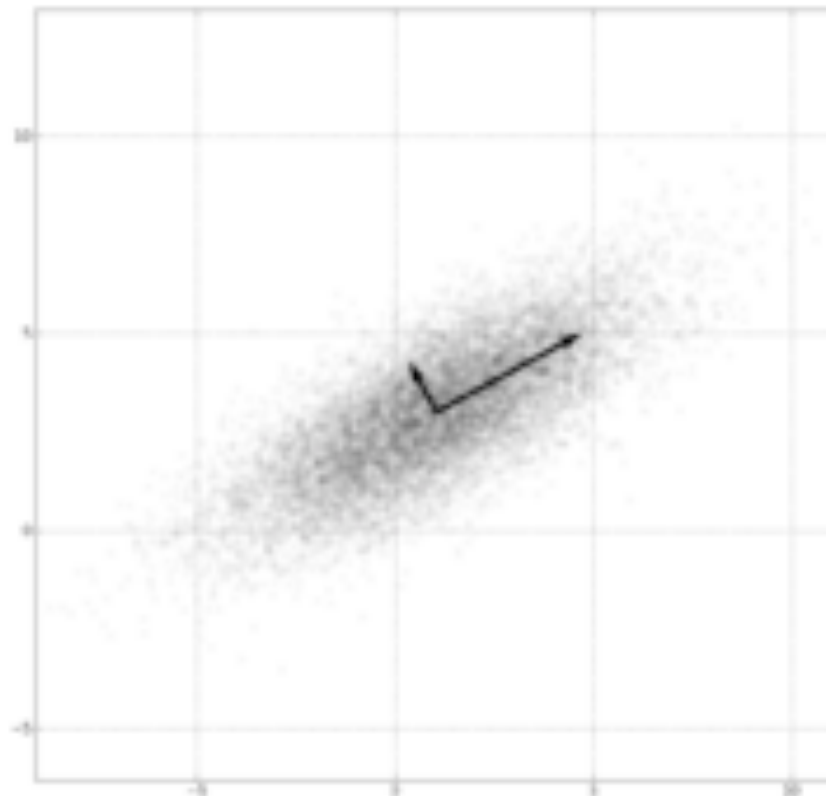
- Una matriz no positiva pero que es definida positiva $M_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} x^T M_1 x &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (2x_1 - x_2) & (-x_1 + 2x_2 - x_3) & (-x_2 + 2x_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &= 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2 \\ &= x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_3^2 \end{aligned}$$

La expresión solo puede ser cero cuando todos los x_i son cero.

Matrices definidas positivas

- Las matrices positivas definidas aparecen mucho en problemas de CNyE, por ejemplo en las matrices de covarianza.



$$\Sigma_{ij} = \text{cov}(X_i, X_j) = E[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)]$$

Matrices definida positiva

Matrices definida positiva

- Propiedades de estas matrices:

Matrices definida positiva

- Propiedades de estas matrices:
 - **A** es no singular.

Matrices definida positiva

- Propiedades de estas matrices:
 - $\mathbf{A}$ es no singular.
 - Demostración por contradicción: Suponemos singularidad: $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$, para $\mathbf{x}$ diferente cero, entonces $\mathbf{x}^T\mathbf{Ax}=0$, lo cual contradice que $\mathbf{A}$ es definida positiva.

Matrices definida positiva

- Propiedades de estas matrices:
 - $\mathbf{A}$ es no singular.
 - Demostración por contradicción: Suponemos singularidad: $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$, para $\mathbf{x}$ diferente cero, entonces $\mathbf{x}^T\mathbf{Ax}=0$, lo cual contradice que $\mathbf{A}$ es definida positiva.
 - $a_{ii} > 0$ para toda $i=1,\dots,n$, por lo tanto la traza es no negativa.

Matrices definida positiva

- Propiedades de estas matrices:
 - $\mathbf{A}$ es no singular.
 - Demostración por contradicción: Suponemos singularidad: $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$, para $\mathbf{x}$ diferente cero, entonces $\mathbf{x}^T\mathbf{Ax}=0$, lo cual contradice que $\mathbf{A}$ es definida positiva.
 - $a_{ii} > 0$ para toda $i=1,\dots,n$, por lo tanto la traza es no negativa.
 - Demostración: Para una i cualquiera, definamos $\mathbf{x} = (x_k)$ por $x_i = 1$ y $x_j = 0$, si $j \neq i$. Entonces $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, por lo que $0 < \mathbf{x}^T\mathbf{Ax} = a_{ii}$.

Matrices definida positiva

- Propiedades de estas matrices:

- $\mathbf{A}$ es no singular.

- Demostración por contradicción: Suponemos singularidad: $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$, para $\mathbf{x}$ diferente cero, entonces $\mathbf{x}^T\mathbf{Ax}=0$, lo cual contradice que $\mathbf{A}$ es definida positiva.

- $a_{ii} > 0$ para toda $i=1,\dots,n$, por lo tanto la traza es no negativa.

- Demostración: Para una i cualquiera, definamos $\mathbf{x} = (x_k)$ por $x_i = 1$ y $x_j = 0$, si $j \neq i$. Entonces $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, por lo que $0 < \mathbf{x}^T\mathbf{Ax} = a_{ii}$.

- $\max_{1 \leq k,j \leq n} |a_{kj}| \leq \max_{1 \leq i \leq n} |a_{ii}|$

Matrices definida positiva

- Propiedades de estas matrices:
 - $\mathbf{A}$ es no singular.
 - Demostración por contradicción: Suponemos singularidad: $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$, para $\mathbf{x}$ diferente cero, entonces $\mathbf{x}^T\mathbf{Ax}=0$, lo cual contradice que $\mathbf{A}$ es definida positiva.
 - $a_{ii} > 0$ para toda $i=1,\dots,n$, por lo tanto la traza es no negativa.
 - Demostración: Para una i cualquiera, definamos $\mathbf{x} = (x_k)$ por $x_i = 1$ y $x_j = 0$, si $j \neq i$. Entonces $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, por lo que $0 < \mathbf{x}^T\mathbf{Ax} = a_{ii}$.
 - $\max_{1 \leq k,j \leq n} |a_{kj}| \leq \max_{1 \leq i \leq n} |a_{ii}|$
 - Demostración: Tarea.

Matrices definida positiva

- Propiedades de estas matrices:

- $\mathbf{A}$ es no singular.

- Demostración por contradicción: Suponemos singularidad: $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$, para $\mathbf{x}$ diferente cero, entonces $\mathbf{x}^T\mathbf{Ax}=0$, lo cual contradice que $\mathbf{A}$ es definida positiva.

- $a_{ii} > 0$ para toda $i=1,\dots,n$, por lo tanto la traza es no negativa.

- Demostración: Para una i cualquiera, definamos $\mathbf{x} = (x_k)$ por $x_i = 1$ y $x_j = 0$, si $j \neq i$. Entonces $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, por lo que $0 < \mathbf{x}^T\mathbf{Ax} = a_{ii}$.

- $\max_{1 \leq k,j \leq n} |a_{kj}| \leq \max_{1 \leq i \leq n} |a_{ii}|$

- Demostración: Tarea.

- $a_{ij}^2 < a_{ii}a_{jj}$ para cada $i \neq j$

Matrices definida positiva

- Propiedades de estas matrices:

- $\mathbf{A}$ es no singular.

- Demostración por contradicción: Suponemos singularidad: $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$, para $\mathbf{x}$ diferente cero, entonces $\mathbf{x}^T\mathbf{Ax}=0$, lo cual contradice que $\mathbf{A}$ es definida positiva.

- $a_{ii} > 0$ para toda $i=1,\dots,n$, por lo tanto la traza es no negativa.

- Demostración: Para una i cualquiera, definamos $\mathbf{x} = (x_k)$ por $x_i = 1$ y $x_j = 0$, si $j \neq i$. Entonces $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, por lo que $0 < \mathbf{x}^T\mathbf{Ax} = a_{ii}$.

- $\max_{1 \leq k,j \leq n} |a_{kj}| \leq \max_{1 \leq i \leq n} |a_{ii}|$

- Demostración: Tarea.

- $a_{ij}^2 < a_{ii}a_{jj}$ para cada $i \neq j$

- Demostración: Tarea.

Matrices definida positiva

- Propiedades de estas matrices (2):
 - Se puede aplicar eliminación Gaussiana si necesidad de intercambio de renglones.
 - Se puede factorizar en la forma $\mathbf{L} \mathbf{L}^T$, donde $\mathbf{L}$ es una matriz triangular inferior con entradas positivas en la diagonal.
 - Se puede factorizar en la forma $\mathbf{L} \mathbf{D} \mathbf{L}^T$, donde $\mathbf{L}$ es una matriz triangular inferior con unos en la diagonal y $\mathbf{D}$ es una matriz diagonal con entradas positivas.

Descomposición (factorización) de Cholesky

- André-Louis Cholesky (15 de Octubre de 1875 - 31 de Agosto de 1918).
- Se factoriza $\mathbf{A} = \mathbf{L} \mathbf{L}^T$, donde $\mathbf{L}$ es una matriz triangular inferior con entradas positivas en la diagonal.
- La descomposición es única,

Descomposición (factorización) de Cholesky

- André-Louis Cholesky (15 de Octubre de 1875 - 31 de Agosto de 1918).
- Se factoriza $\mathbf{A} = \mathbf{L} \mathbf{L}^T$, donde $\mathbf{L}$ es una matriz triangular inferior con entradas positivas en la diagonal.
- La descomposición es única,

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \mathbf{L}^T = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{11} & L_{21} & L_{31} \\ 0 & L_{22} & L_{32} \\ 0 & 0 & L_{33} \end{pmatrix}$$

Descomposición (factorización) de Cholesky

- Algoritmo

$$\begin{pmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{11} & L_{21} & L_{31} \\ 0 & L_{22} & L_{32} \\ 0 & 0 & L_{33} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} L_{11}^2 & L_{21}L_{11} & L_{31}L_{11} \\ L_{21}L_{11} & L_{21}^2 + L_{22}^2 & L_{31}L_{21} + L_{32}L_{22} \\ L_{31}L_{11} & L_{31}L_{21} + L_{32}L_{22} & L_{31}^2 + L_{32}^2 + L_{33}^2 \end{pmatrix}$$

... es simétrica...

Descomposición (factorización) de Cholesky

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11}^2 & & \\ L_{21}L_{11} & L_{21}^2 + L_{22}^2 & \\ L_{31}L_{11} & L_{31}L_{21} + L_{32}L_{22} & L_{31}^2 + L_{32}^2 + L_{33}^2 \end{pmatrix}$$

... es simétrica...

Descomposición (factorización) de Cholesky

Es positivo


$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11}^2 & & \\ L_{21}L_{11} & L_{21}^2 + L_{22}^2 & \\ L_{31}L_{11} & L_{31}L_{21} + L_{32}L_{22} & L_{31}^2 + L_{32}^2 + L_{33}^2 \end{pmatrix}$$

... es simétrica...

Descomposición (factorización) de Cholesky

Es positivo


$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11}^2 & & \\ L_{21}L_{11} & L_{21}^2 + L_{22}^2 & \\ L_{31}L_{11} & L_{31}L_{21} + L_{32}L_{22} & L_{31}^2 + L_{32}^2 + L_{33}^2 \end{pmatrix}$$

... es simétrica...

- De tal manera, que procedemos al cálculo columna por columna, y las entradas de $\mathbf{L}$ quedan como:

Descomposición (factorización) de Cholesky

Es positivo

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11}^2 & & \\ L_{21}L_{11} & L_{21}^2 + L_{22}^2 & \\ L_{31}L_{11} & L_{31}L_{21} + L_{32}L_{22} & L_{31}^2 + L_{32}^2 + L_{33}^2 \end{pmatrix}$$

... es simétrica...

- De tal manera, que procedemos al cálculo columna por columna, y las entradas de $\mathbf{L}$ quedan como:

$$L_{j,j} = \sqrt{A_{j,j} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{j,k}^2}$$

Descomposición (factorización) de Cholesky

Es positivo

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11}^2 & & \\ L_{21}L_{11} & L_{21}^2 + L_{22}^2 & \\ L_{31}L_{11} & L_{31}L_{21} + L_{32}L_{22} & L_{31}^2 + L_{32}^2 + L_{33}^2 \end{pmatrix}$$

... es simétrica...

- De tal manera, que procedemos al cálculo columna por columna, y las entradas de $\mathbf{L}$ quedan como:

$$L_{j,j} = \sqrt{A_{j,j} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{j,k}^2}$$

$$L_{i,j} = \frac{1}{L_{j,j}} \left(A_{i,j} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{i,k} L_{j,k} \right)$$

Descomposición (factorización) de Cholesky

Es positivo

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11}^2 & & \\ L_{21}L_{11} & L_{21}^2 + L_{22}^2 & \\ L_{31}L_{11} & L_{31}L_{21} + L_{32}L_{22} & L_{31}^2 + L_{32}^2 + L_{33}^2 \end{pmatrix}$$

... es simétrica...

- De tal manera, que procedemos al cálculo columna por columna, y las entradas de $\mathbf{L}$ quedan como:

$$L_{j,j} = \sqrt{A_{j,j} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{j,k}^2}$$

$$L_{i,j} = \frac{1}{L_{j,j}} \left(A_{i,j} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{i,k} L_{j,k} \right) \quad \text{para } i > j$$

Descomposición (factorización) de Cholesky

Es positivo

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11}^2 & & \\ L_{21}L_{11} & L_{21}^2 + L_{22}^2 & \\ L_{31}L_{11} & L_{31}L_{21} + L_{32}L_{22} & L_{31}^2 + L_{32}^2 + L_{33}^2 \end{pmatrix}$$

... es simétrica...

- De tal manera, que procedemos al cálculo columna por columna, y las entradas de $\mathbf{L}$ quedan como:

$$L_{j,j} = \sqrt{A_{j,j} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{j,k}^2}$$

$$L_{i,j} = \frac{1}{L_{j,j}} \left(A_{i,j} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{i,k} L_{j,k} \right) \quad \text{para } i > j$$

Una forma alternativa que evita calcular raíces cuadradas

$$\mathbf{A} = \mathbf{LDL}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 & 0 & 0 \\ 0 & D_2 & 0 \\ 0 & 0 & D_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L_{21} & L_{31} \\ 0 & 1 & L_{32} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Una forma alternativa que evita calcular raíces cuadradas

$$\mathbf{A} = \mathbf{LDL}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 & 0 & 0 \\ 0 & D_2 & 0 \\ 0 & 0 & D_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L_{21} & L_{31} \\ 0 & 1 & L_{32} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- De tal manera que $\mathbf{L}$ es una matriz triangular inferior con unos en la diagonal y $\mathbf{D}$ es una matriz diagonal con entradas positivas.
- multiplicando las matrices tenemos

Una forma alternativa que evita calcular raíces cuadradas

$$\mathbf{A} = \mathbf{LDL}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 & 0 & 0 \\ 0 & D_2 & 0 \\ 0 & 0 & D_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L_{21} & L_{31} \\ 0 & 1 & L_{32} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- De tal manera que $\mathbf{L}$ es una matriz triangular inferior con unos en la diagonal y $\mathbf{D}$ es una matriz diagonal con entradas positivas.
- multiplicando las matrices tenemos

$$\mathbf{LDL}^T = \begin{pmatrix} D_1 & & \\ L_{21}D_1 & L_{21}^2D_1 + D_2 & \\ L_{31}D_1 & L_{31}L_{21}D_1 + L_{32}D_2 & L_{31}^2D_1 + L_{32}^2D_2 + D_3 \end{pmatrix} \quad \dots \text{ es simétrica...}$$

Una forma alternativa que evita calcular raices cuadradas

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 & & \\ L_{21}D_1 & L_{21}^2D_1 + D_2 & \\ L_{31}D_1 & L_{31}L_{21}D_1 + L_{32}D_2 & L_{31}^2D_1 + L_{32}^2D_2 + D_3 \end{pmatrix}$$

Una forma alternativa que evita calcular raices cuadradas

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 & & \\ L_{21}D_1 & L_{21}^2D_1 + D_2 & \\ L_{31}D_1 & L_{31}L_{21}D_1 + L_{32}D_2 & L_{31}^2D_1 + L_{32}^2D_2 + D_3 \end{pmatrix}$$

- Quedando las entradas definidas como:

Una forma alternativa que evita calcular raices cuadradas

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 & & \\ L_{21}D_1 & L_{21}^2D_1 + D_2 & \\ L_{31}D_1 & L_{31}L_{21}D_1 + L_{32}D_2 & L_{31}^2D_1 + L_{32}^2D_2 + D_3 \end{pmatrix}$$

- Quedando las entradas definidas como:

$$D_j = A_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{jk}^2 D_k$$

$$L_{ij} = \frac{1}{D_j} \left(A_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik} L_{jk} D_k \right), \quad \text{for } i > j.$$

Una forma alternativa que evita calcular raices cuadradas

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 & & \\ L_{21}D_1 & L_{21}^2D_1 + D_2 & \\ L_{31}D_1 & L_{31}L_{21}D_1 + L_{32}D_2 & L_{31}^2D_1 + L_{32}^2D_2 + D_3 \end{pmatrix}$$

- Quedando las entradas definidas como:

$$D_j = A_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{jk}^2 D_k$$

$$L_{ij} = \frac{1}{D_j} \left(A_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik} L_{jk} D_k \right), \quad \text{for } i > j.$$

De tal forma que, de nuevo, hacemos el cálculo columna por columna.

Relación entre las 2 factorizaciones

- Las 2 factorizaciones LL^T y LDL^T (nótese que son diferentes L 's) se relacionan así:

Relación entre las 2 factorizaciones

- Las 2 factorizaciones $\mathbf{LL}^T$ y $\mathbf{LDL}^T$ (nótese que son diferentes $\mathbf{L}$'s) se relacionan así:

$$\mathbf{A} = \mathbf{LDL}^T = \mathbf{LD}^{\frac{1}{2}}\mathbf{D}^{\frac{1}{2}}\mathbf{L}^T = \mathbf{LD}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{D}^{\frac{1}{2}})^T\mathbf{L}^T = \mathbf{LD}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{LD}^{\frac{1}{2}})^T$$

Solución del SEL dada la factorización LL^T

Solución del SEL dada la factorización $\mathbf{LL}^T$

- Si tenemos $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ entonces usamos $\mathbf{LL}^T\mathbf{x}=\mathbf{b}$,
- primero hacemos $\mathbf{y} = \mathbf{L}^T\mathbf{x}$ y solucionamos $\mathbf{Ly}=\mathbf{b}$ con sustitución hacia adelante, con:
- Luego solucionamos para $\mathbf{x}$ el sistema $\mathbf{L}^T\mathbf{x} = \mathbf{y}$ con sustitución hacia atrás.

Solución del SEL dada la factorización $\mathbf{LL}^T$

- Si tenemos $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ entonces usamos $\mathbf{LL}^T\mathbf{x}=\mathbf{b}$,
- primero hacemos $\mathbf{y} = \mathbf{L}^T\mathbf{x}$ y solucionamos $\mathbf{Ly}=\mathbf{b}$ con sustitución hacia adelante, con:

$$y_1 = \frac{b_1}{l_{11}} \qquad y_i = \frac{1}{l_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}y_j \right]$$

- Luego solucionamos para $\mathbf{x}$ el sistema $\mathbf{L}^T\mathbf{x} = \mathbf{y}$ con sustitución hacia atrás.

Solución del SEL dada la factorización **LDL^T**

Solución del SEL dada la factorización **LDL^T**

- Si tenemos el sistema **$Ax=b$** como **$LDL^T x = b$** haciendo **$y = DL^T x$** , y resolviendo para **y** el SEL **$Ly=b$** con sustitución hacia adelante.

Solución del SEL dada la factorización $\mathbf{LDL}^T$

- Si tenemos el sistema $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ como $\mathbf{LDL}^T \mathbf{x} = \mathbf{b}$ haciendo $\mathbf{y} = \mathbf{DL}^T \mathbf{x}$, y resolviendo para $\mathbf{y}$ el SEL $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$ con sustitución hacia adelante.
- Luego usamos $\mathbf{z} = \mathbf{L}^T \mathbf{x}$ de tal forma que resolvemos para $\mathbf{z}$ el SEL $\mathbf{Dz} = \mathbf{y}$. Pero $\mathbf{D}$ es diagonal, por lo que esto es muy fácil:

Solución del SEL dada la factorización $\mathbf{LDL}^T$

- Si tenemos el sistema $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ como $\mathbf{LDL}^T \mathbf{x} = \mathbf{b}$ haciendo $\mathbf{y} = \mathbf{DL}^T \mathbf{x}$, y resolviendo para $\mathbf{y}$ el SEL $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$ con sustitución hacia adelante.
- Luego usamos $\mathbf{z} = \mathbf{L}^T \mathbf{x}$ de tal forma que resolvemos para $\mathbf{z}$ el SEL $\mathbf{Dz} = \mathbf{y}$. Pero $\mathbf{D}$ es diagonal, por lo que esto es muy fácil:

Solución del SEL dada la factorización **LDL^T**

- Si tenemos el sistema **$A \mathbf{x} = \mathbf{b}$** como **$LDL^T \mathbf{x} = \mathbf{b}$** haciendo **$\mathbf{y} = DL^T \mathbf{x}$** , y resolviendo para **$\mathbf{y}$** el SEL **$L\mathbf{y} = \mathbf{b}$** con sustitución hacia adelante.
- Luego usamos **$\mathbf{z} = L^T \mathbf{x}$** de tal forma que resolvemos para **$\mathbf{z}$** el SEL **$D\mathbf{z} = \mathbf{y}$** . Pero **D** es diagonal, por lo que esto es muy fácil:
- Finalmente resolvemos **$L^T \mathbf{x} = \mathbf{z}$** para **$\mathbf{x}$** con sustitución hacia atrás y **TERMINAMOS.**

Solución del SEL dada la factorización **LDL^T**

- Si tenemos el sistema **$A \mathbf{x} = \mathbf{b}$** como **$LDL^T \mathbf{x} = \mathbf{b}$** haciendo **$\mathbf{y} = DL^T \mathbf{x}$** , y resolviendo para **$\mathbf{y}$** el SEL **$L\mathbf{y} = \mathbf{b}$** con sustitución hacia adelante.
- Luego usamos **$\mathbf{z} = L^T \mathbf{x}$** de tal forma que resolvemos para **$\mathbf{z}$** el SEL **$D\mathbf{z} = \mathbf{y}$** . Pero **D** es diagonal, por lo que esto es muy fácil:

$$z_i = \frac{y_i}{d_i},$$

- Finalmente resolvemos **$L^T \mathbf{x} = \mathbf{z}$** para **$\mathbf{x}$** con sustitución hacia atrás y **TERMINAMOS.**

Matrices bandadas

- Una matriz de tamaño $n \times n$ se dice que es bandada si existen los números p y q enteros $1 < p, q < n$, tal que $a_{ij} = 0$ para todo $p \leq j - i$ ó $q \leq i - j$
- p denota el número de diagonales arriba de la diagonal principal, incluyéndola.
- q denota el número de diagonales abajo de la diagonal principal, incluyéndola.

- Ejemplo con $p = 3$ y $q = 2$.

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

- El número de diagonales es $p+q-1$.

Matrices tridiagonales

- Un grupo muy famoso son las tridiagonales, es decir con $p=q=2$

- $$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 & 0 & & 0 \\ \beta_2 & \alpha_2 & \gamma_2 & & \\ 0 & \beta_3 & \alpha_3 & & \\ & & & \gamma_{n-1} & \\ 0 & & 0 & \beta_n & \alpha_n \end{bmatrix}$$