Métodos para matrices especiales. Descomposición de Cholesky

MAT-251

Dr. Alonso Ramírez Manzanares
CIMAT A.C.
e-mail: alram@cimat.mx
web: http://www.cimat.mx/~alram/met_num/

Dr. Joaquín Peña Acevedo
CIMAT A.C.
e-mail: joaquin@cimat.mx

Ventajas computacionales de las factorizaciones ... en segundos

Ventajas computacionales de las factorizaciones ... en segundos

- ¿donde se usan factorizaciones en la vida real? ....

Ventajas computacionales de las factorizaciones ... en segundos

- ¿donde se usan factorizaciones en la vida real? ....

Ventajas computacionales de las factorizaciones ... en segundos

- ¿donde se usan factorizaciones en la vida real? ....

- Si hacemos una descomposición ($O(\boldsymbol{n}^3)$), de tal forma que resolvemos el sistema $\mathbf{Ax_i=b_i}$ para diferentes vectores $\mathbf{b_i}$.

Ventajas computacionales de las factorizaciones ... en segundos

- ¿donde se usan factorizaciones en la vida real? ....

- Si hacemos una descomposición ($O(\boldsymbol{n}^3)$), de tal forma que resolvemos el sistema $\mathbf{Ax_i=b_i}$ para diferentes vectores $\mathbf{b_i}$.

- Entonces la solución estará dada por el orden $O(n^2)$ en lugar de $O(n^3)$.

Ventajas computacionales de las factorizaciones ... en segundos

- ¿donde se usan factorizaciones en la vida real? ....

- Si hacemos una descomposición ($O(\boldsymbol{n}^3)$), de tal forma que resolvemos el sistema $\mathbf{Ax_i}=\mathbf{b_i}$ para diferentes vectores $\mathbf{b_i}$.

- Entonces la solución estará dada por el orden $O(n^2)$ en lugar de $O(n^3)$.

- Para sistemas de tamaño, digamos de 1000x1000

Ventajas computacionales de las factorizaciones ... en segundos

- ¿donde se usan factorizaciones en la vida real? ....

- Si hacemos una descomposición ($O(\boldsymbol{n}^3)$), de tal forma que resolvemos el sistema $\mathbf{Ax_i}=\mathbf{b_i}$ para diferentes vectores $\mathbf{b_i}$.

- Entonces la solución estará dada por el orden $O(n^2)$ en lugar de $O(n^3)$.

- Para sistemas de tamaño, digamos de 1000x1000

    - $1000^2 = 1{,}000{,}000 = 0.001 * 1{,}000{,}000{,}000 = 0.001 * 1{,}000^3$

Matrices con diagonal estrictamente-dominante

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$$

Matrices con diagonal estrictamente-dominante

- La definición de una matriz cuadrada estrictamente diagonal-dominante es la siguiente:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$$

Matrices con diagonal estrictamente-dominante

- La definición de una matriz cuadrada estrictamente diagonal-dominante es la siguiente:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$$

Matrices con diagonal estrictamente-dominante

- La definición de una matriz cuadrada estrictamente diagonal-dominante es la siguiente:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$$

Matrices con diagonal estrictamente-dominante

- La definición de una matriz cuadrada estrictamente diagonal-dominante es la siguiente:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$$

- Nótese que dada una matriz estrictamente diagonal-dominante, su transpuesta no tiene por que serlo.

Matrices con diagonal estrictamente-dominante

- La definición de una matriz cuadrada estrictamente diagonal-dominante es la siguiente:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$$

- Nótese que dada una matriz estrictamente diagonal-dominante, su transpuesta no tiene por que serlo.

- ***Una matriz estrictamente diagonal-dominante tiene inversa***. Se puede aplicar eliminación Gaussiana sin necesidad de hacer intercambio de renglones, y los cálculos serán estables con respecto a los errores de redondeo.

Una matriz estrictamente diagonal-dominante tiene inversa, demostración:

- Prueba por contradicción: consideremos que es singular, entonces consideremos $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$, con solución $\mathbf{x} = (x_i)$ que no es cero. Sea k un índice para el cual $0 < |x_k| = max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$.

Una matriz estrictamente diagonal-dominante tiene inversa, demostración:

- Prueba por contradicción: consideremos que es singular, entonces consideremos **Ax**=**0**, con solución **x** = (x_i) que no es cero. Sea k un índice para el cual $0 < |x_k| = max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$.

Dado que $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0$ para toda $i = 1, 2, \ldots, n$, tendremos, cuando $i = k$,

Una matriz estrictamente diagonal-dominante tiene inversa, demostración:

- Prueba por contradicción: consideremos que es singular, entonces consideremos **Ax**=**0**, con solución **x** = (x_i) que no es cero. Sea k un índice para el cual $0 < |x_k| = max_{1 \le j \le n} |x_j|$.

Dado que $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0$ para toda $i = 1, 2, \ldots, n$, tendremos, cuando $i = k$,

$$a_{kk}x_k = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} a_{kj}x_j.$$

Una matriz estrictamente diagonal-dominante tiene inversa, demostración:

- Prueba por contradicción: consideremos que es singular, entonces consideremos **Ax**=**0**, con solución **x** = (x_i) que no es cero. Sea k un índice para el cual $0 < |x_k| = max_{1 \le j \le n} |x_j|$.

Dado que $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0$ para toda $i = 1, 2, \ldots, n$, tendremos, cuando $i = k$,

$$a_{kk}x_k = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} a_{kj}x_j.$$

Esto implica que

$$|a_{kk}||x_k| \le \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |a_{kj}||x_j|,$$

Una matriz estrictamente diagonal-dominante tiene inversa, demostración:

- Prueba por contradicción: consideremos que es singular, entonces consideremos $\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{0}$, con solución $\mathbf{x} = (x_i)$ que no es cero. Sea k un índice para el cual $0 < |x_k| = max_{1 \le j \le n} |x_j|$.

Dado que $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0$ para toda $i = 1, 2, \ldots, n$, tendremos, cuando $i = k$,

$$a_{kk}x_k = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} a_{kj}x_j.$$

Esto implica que

$$|a_{kk}||x_k| \le \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |a_{kj}||x_j|,$$

o bien

$$|a_{kk}| \le \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |a_{kj}| \frac{|x_j|}{|x_k|} \le \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |a_{kj}|.$$

Esta desigualdad contradice el dominio diagonal estricto de A. En consecuencia, la única solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, es $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, condición que equivale a la no singularidad de A.

Matrices definidas positivas

- Aquí trabajaremos con aquellas matrices cuadradas y simétricas tales que $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\ \mathbf{x} > 0$ para todo vector $\boldsymbol{x}$ diferente de $\mathbf{0}$. Es decir que la matriz de tamaño 1x1 (escalar) resultante de la operación es positiva.

$$\mathbf{x}^t A \mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$= [x_1, x_2, \ldots, x_n] \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{2j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj} x_j \end{bmatrix} = \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j \right].$$

Matrices definidas positivas

- Aquí trabajaremos con aquellas matrices cuadradas y simétricas tales que $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\,\mathbf{x} > 0$ para todo vector $\boldsymbol{x}$ diferente de $\mathbf{0}$.

- Ejemplo, una matriz positiva:

$$M_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrices definidas positivas

- Aquí trabajaremos con aquellas matrices cuadradas y simétricas tales que $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\,\mathbf{x} > 0$ para todo vector $\boldsymbol{x}$ diferente de $\mathbf{0}$.

- Ejemplo, una matriz positiva:

$$M_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} z_0 & z_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \end{bmatrix} =$$

Matrices definidas positivas

- Aquí trabajaremos con aquellas matrices cuadradas y simétricas tales que $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\,\mathbf{x} > 0$ para todo vector $\boldsymbol{x}$ diferente de $\mathbf{0}$.

- Ejemplo, una matriz positiva: $$M_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} z_0 & z_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} z_0 \cdot 1 + z_1 \cdot 0 & z_0 \cdot 0 + z_1 \cdot 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \end{bmatrix} = z_0^2 + z_1^2$$

Matrices definidas positivas

- Aquí trabajaremos con aquellas matrices cuadradas y simétricas tales que $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\,\mathbf{x} > 0$ para todo vector $\boldsymbol{x}$ diferente de $\mathbf{0}$.

- Ejemplo, una matriz positiva:

$$M_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} z_0 & z_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} z_0 \cdot 1 + z_1 \cdot 0 & z_0 \cdot 0 + z_1 \cdot 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \end{bmatrix} = z_0^2 + z_1^2$$

A esta forma se le llama forma cuadrática asociada a la matriz.

Matrices definidas positivas

- Una matriz no positiva pero que es definida positiva

$$M_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Matrices definidas positivas

- Una matriz no positiva pero que es definida positiva

$$M_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$x^{\mathrm{T}} M_1 x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (2x_1 - x_2) & (-x_1 + 2x_2 - x_3) & (-x_2 + 2x_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= 2{x_1}^2 - 2x_1x_2 + 2{x_2}^2 - 2x_2x_3 + 2{x_3}^2$$

$$= {x_1}^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + {x_3}^2$$

Matrices definidas positivas

- Una matriz no positiva pero que es definida positiva

$$M_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$x^{\mathrm{T}} M_1 x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (2x_1 - x_2) & (-x_1 + 2x_2 - x_3) & (-x_2 + 2x_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

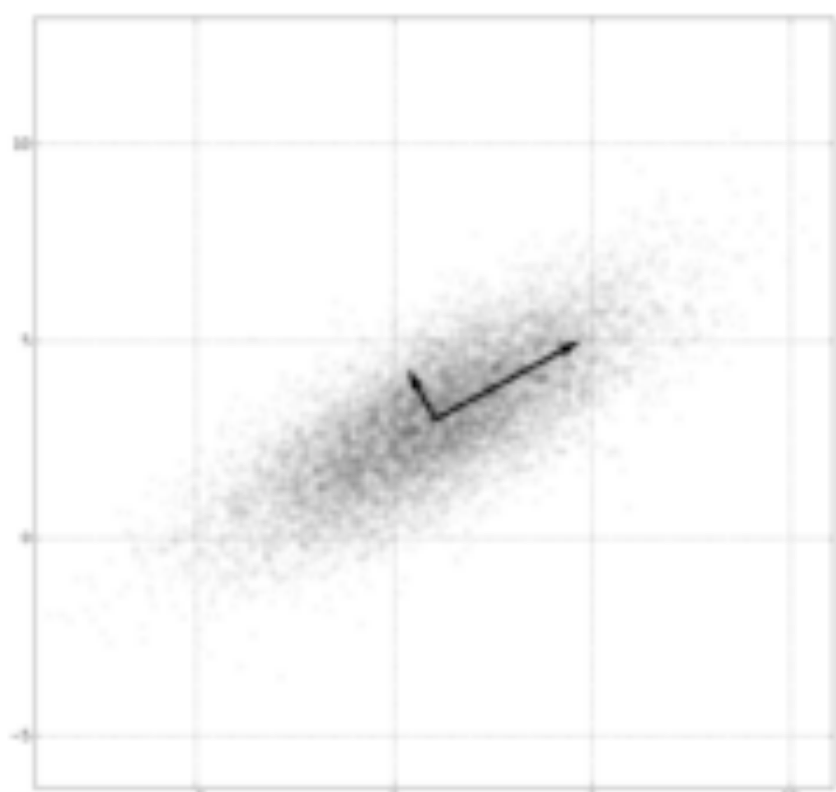
$$= 2{x_1}^2 - 2x_1x_2 + 2{x_2}^2 - 2x_2x_3 + 2{x_3}^2$$

$$= {x_1}^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + {x_3}^2$$

La expresión solo puede ser cero cuando todos los x_i son cero.

Matrices definidas positivas

- Las matrices positivas definidas aparecen mucho en problemas de CNyE, por ejemplo en las matrices de covarianza.



$$\Sigma_{ij} = \mathrm{cov}(X_i, X_j) = \mathrm{E}\big[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)\big]$$

Matrices definida positiva

Matrices definida positiva

- Propiedades de estas matrices:

Matrices definida positiva

- Propiedades de estas matrices:
  - **A** es no singular.

Matrices definida positiva

- Propiedades de estas matrices:
  - **A** es no singular.
    - Demostración por contradicción: Suponemos singularidad: $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, para $\boldsymbol{x}$ diferente cero, entonces $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0$, lo cual contradice que **A** es definida positiva.

Matrices definida positiva

- Propiedades de estas matrices:
  - **A** es no singular.
    - Demostración por contradicción: Suponemos singularidad: $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$, para $\boldsymbol{x}$ diferente cero, entonces $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Ax}=0$, lo cual contradice que **A** es definida positiva.
  - $a_{ii} > 0$ para toda $i=1,\ldots,n$, por lo tanto la traza es postiva.

Matrices definida positiva

- Propiedades de estas matrices:
  - **A** es no singular.
    - Demostración por contradicción: Suponemos singularidad: $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$, para $\boldsymbol{x}$ diferente cero, entonces $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Ax}=0$, lo cual contradice que **A** es definida positiva.
  - $a_{ii} > 0$ para toda $i=1,\ldots,n$, por lo tanto la traza es postiva.
    - Demostración: Para una i cualquiera, definamos $\boldsymbol{x} = (x_k)$ por $x_i = 1$ y $x_j = 0$, si $j \neq i$. Entonces $\mathbf{x} \neq 0$, por lo que $0 < \mathbf{x}^T\mathbf{Ax} = a_{ii}$.

Matrices definida positiva

- Propiedades de estas matrices:
  - **A** es no singular.
    - Demostración por contradicción: Suponemos singularidad: $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$, para $\boldsymbol{x}$ diferente cero, entonces $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Ax}=0$, lo cual contradice que **A** es definida positiva.
  - $a_{ii} > 0$ para toda $i=1,\ldots,n$, por lo tanto la traza es postiva.
    - Demostración: Para una i cualquiera, definamos $\boldsymbol{x} = (x_k)$ por $x_i = 1$ y $x_j = 0$, si $j \neq i$. Entonces $\mathbf{x} \neq 0$, por lo que $0 < \mathbf{x}^T\mathbf{Ax} = a_{ii}$.
  - $a_{ij}^2 < a_{ii}a_{jj}$ para cada $i \neq j$

Matrices definida positiva

- Propiedades de estas matrices:
  - **A** es no singular.
    - Demostración por contradicción: Suponemos singularidad: $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$, para $\boldsymbol{x}$ diferente cero, entonces $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Ax}=0$, lo cual contradice que **A** es definida positiva.
  - $a_{ii} > 0$ para toda $i=1,\ldots,n$, por lo tanto la traza es postiva.
    - Demostración: Para una i cualquiera, definamos $\boldsymbol{x} = (x_k)$ por $x_i = 1$ y $x_j = 0$, si $j \neq i$. Entonces $\mathbf{x} \neq 0$, por lo que $0 < \mathbf{x}^T\mathbf{Ax} = a_{ii}$.
  - $a_{ij}^2 < a_{ii}a_{jj}$ para cada $i \neq j$
    - Demostración: Tarea.

Matrices definida positiva

- Propiedades de estas matrices (2):
  - Se puede aplicar eliminación Gaussiana si necesidad de intercambio de renglones.
  - Se puede factorizar en la forma $\boldsymbol{L}\,\boldsymbol{L}^{\top}$, donde $\boldsymbol{L}$ es una matriz triangular inferior con entradas positivas en la diagonal.
  - Se puede factorizar en la forma $\boldsymbol{LDL}^{\top}$, donde $\boldsymbol{L}$ es una matriz triangular inferior con unos en la diagonal y $\boldsymbol{D}$ es una matriz diagonal con entradas positivas.

Descomposición (factorización) de Cholesky

- André-Louis Cholesky (15 de Octubre de 1875 - 31 de Agosto de 1918).
- Se factoriza $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}$, donde $\boldsymbol{L}$ es una matriz triangular inferior con entradas positivas en la diagonal.
- La descomposición es única,

Descomposición (factorización) de Cholesky

- André-Louis Cholesky (15 de Octubre de 1875 - 31 de Agosto de 1918).
- Se factoriza $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}$, donde $\boldsymbol{L}$ es una matriz triangular inferior con entradas positivas en la diagonal.
- La descomposición es única,

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{11} & L_{21} & L_{31} \\ 0 & L_{22} & L_{32} \\ 0 & 0 & L_{33} \end{pmatrix}$$

Descomposición (factorización) de Cholesky

- Algoritmo

$$
\begin{pmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} L_{11} & L_{21} & L_{31} \\ 0 & L_{22} & L_{32} \\ 0 & 0 & L_{33} \end{pmatrix} =
$$

$$
= \begin{pmatrix} L_{11}^2 & & \\ L_{21}L_{11} & L_{21}^2 + L_{22}^2 & \\ L_{31}L_{11} & L_{31}L_{21} + L_{32}L_{22} & L_{31}^2 + L_{32}^2 + L_{33}^2 \end{pmatrix}
$$

... es simétrica...

Descomposición (factorización) de Cholesky

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11}^2 & & \\ L_{21}L_{11} & L_{21}^2 + L_{22}^2 & \\ L_{31}L_{11} & L_{31}L_{21} + L_{32}L_{22} & L_{31}^2 + L_{32}^2 + L_{33}^2 \end{pmatrix}$$

... es simétrica...

Descomposición (factorización) de Cholesky

Es positivo

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11}^2 & & \\ L_{21}L_{11} & L_{21}^2 + L_{22}^2 & \\ L_{31}L_{11} & L_{31}L_{21} + L_{32}L_{22} & L_{31}^2 + L_{32}^2 + L_{33}^2 \end{pmatrix}$$

... es simétrica...

Descomposición (factorización) de Cholesky

Es positivo

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11}^2 & & \\ L_{21}L_{11} & L_{21}^2 + L_{22}^2 & \\ L_{31}L_{11} & L_{31}L_{21} + L_{32}L_{22} & L_{31}^2 + L_{32}^2 + L_{33}^2 \end{pmatrix}$$

... es simétrica...

- De tal manera, que procedemos al cálculo columna por columna, y las entradas de ***L*** quedan como:

Descomposición (factorización) de Cholesky

Es positivo

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11}^2 & & \\ L_{21}L_{11} & L_{21}^2 + L_{22}^2 & \\ L_{31}L_{11} & L_{31}L_{21} + L_{32}L_{22} & L_{31}^2 + L_{32}^2 + L_{33}^2 \end{pmatrix}$$

... es simétrica...

- De tal manera, que procedemos al cálculo columna por columna, y las entradas de ***L*** quedan como:

$$L_{j,j} = \sqrt{A_{j,j} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{j,k}^2}$$

Descomposición (factorización) de Cholesky

Es positivo

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11}^2 & & \\ L_{21}L_{11} & L_{21}^2 + L_{22}^2 & \\ L_{31}L_{11} & L_{31}L_{21} + L_{32}L_{22} & L_{31}^2 + L_{32}^2 + L_{33}^2 \end{pmatrix}$$

... es simétrica...

- De tal manera, que procedemos al cálculo columna por columna, y las entradas de ***L*** quedan como:

$$L_{j,j} = \sqrt{A_{j,j} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{j,k}^2}$$

$$L_{i,j} = \frac{1}{L_{j,j}} \left(A_{i,j} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{i,k} L_{j,k} \right)$$

Descomposición (factorización) de Cholesky

Es positivo

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11}^2 & & \\ L_{21}L_{11} & L_{21}^2 + L_{22}^2 & \\ L_{31}L_{11} & L_{31}L_{21} + L_{32}L_{22} & L_{31}^2 + L_{32}^2 + L_{33}^2 \end{pmatrix}$$

... es simétrica...

- De tal manera, que procedemos al cálculo columna por columna, y las entradas de ***L*** quedan como:

$$L_{j,j} = \sqrt{A_{j,j} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{j,k}^2}$$

$$L_{i,j} = \frac{1}{L_{j,j}} \left(A_{i,j} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{i,k} L_{j,k} \right) \quad \text{para } i > j$$

Descomposición (factorización) de Cholesky

Es positivo

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11}^2 & & \\ L_{21}L_{11} & L_{21}^2 + L_{22}^2 & \\ L_{31}L_{11} & L_{31}L_{21} + L_{32}L_{22} & L_{31}^2 + L_{32}^2 + L_{33}^2 \end{pmatrix}$$

... es simétrica...

- De tal manera, que procedemos al cálculo columna por columna, y las entradas de ***L*** quedan como:

$$L_{j,j} = \sqrt{A_{j,j} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{j,k}^2}$$

$$L_{i,j} = \frac{1}{L_{j,j}} \left(A_{i,j} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{i,k} L_{j,k} \right)$$ para $i > j$

Una forma alternativa que evita calcular raices cuadradas

$$\mathbf{A} = \mathbf{LDL}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 & 0 & 0 \\ 0 & D_2 & 0 \\ 0 & 0 & D_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L_{21} & L_{31} \\ 0 & 1 & L_{32} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Una forma alternativa que evita calcular raices cuadradas

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 & 0 & 0 \\ 0 & D_2 & 0 \\ 0 & 0 & D_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L_{21} & L_{31} \\ 0 & 1 & L_{32} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- De tal manera que ***L*** es una matriz triangular inferior con unos en la diagonal y ***D*** es una matriz diagonal con entradas positivas.

- multiplicando las matrices tenemos

Una forma alternativa que evita calcular raices cuadradas

$$\mathbf{A} = \mathbf{LDL}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 & 0 & 0 \\ 0 & D_2 & 0 \\ 0 & 0 & D_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L_{21} & L_{31} \\ 0 & 1 & L_{32} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- De tal manera que ***L*** es una matriz triangular inferior con unos en la diagonal y ***D*** es una matriz diagonal con entradas positivas.

- multiplicando las matrices tenemos

$$\mathbf{LDL}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} D_1 & & \\ L_{21}D_1 & L_{21}^2 D_1 + D_2 & \\ L_{31}D_1 & L_{31}L_{21}D_1 + L_{32}D_2 & L_{31}^2 D_1 + L_{32}^2 D_2 + D_3. \end{pmatrix}$$

... es simétrica...

Una forma alternativa que evita calcular raices cuadradas

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 & & \\ L_{21}D_1 & L_{21}^2 D_1 + D_2 & \\ L_{31}D_1 & L_{31}L_{21}D_1 + L_{32}D_2 & L_{31}^2 D_1 + L_{32}^2 D_2 + D_3. \end{pmatrix}$$

Una forma alternativa que evita calcular raices cuadradas

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 & & \\ L_{21}D_1 & L_{21}^2 D_1 + D_2 & \\ L_{31}D_1 & L_{31}L_{21}D_1 + L_{32}D_2 & L_{31}^2 D_1 + L_{32}^2 D_2 + D_3. \end{pmatrix}$$

- Quedando las entradas definidas como:

Una forma alternativa que evita calcular raices cuadradas

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 & & \\ L_{21}D_1 & L_{21}^2 D_1 + D_2 & \\ L_{31}D_1 & L_{31}L_{21}D_1 + L_{32}D_2 & L_{31}^2 D_1 + L_{32}^2 D_2 + D_3. \end{pmatrix}$$

- Quedando las entradas definidas como:

$$D_j = A_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{jk}^2 D_k$$

$$L_{ij} = \frac{1}{D_j}\left(A_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik}L_{jk}D_k\right), \qquad \text{for } i > j.$$

Una forma alternativa que evita calcular raices cuadradas

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 & & \\ L_{21}D_1 & L_{21}^2 D_1 + D_2 & \\ L_{31}D_1 & L_{31}L_{21}D_1 + L_{32}D_2 & L_{31}^2 D_1 + L_{32}^2 D_2 + D_3. \end{pmatrix}$$

- Quedando las entradas definidas como:

$$D_j = A_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{jk}^2 D_k$$

$$L_{ij} = \frac{1}{D_j}\left(A_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik}L_{jk}D_k\right), \qquad \text{for } i > j.$$

De tal forma que, de nuevo, hacemos el cálculo columna por columna.

Relación entre las 2 factorizaciones

- Las 2 factorizaciones $\boldsymbol{LL}^{\mathrm{T}}$ y $\boldsymbol{LDL}^{\mathrm{T}}$ (nótese que son diferentes $\boldsymbol{L}$'s) se relacionan así:

Relación entre las 2 factorizaciones

- Las 2 factorizaciones ***LL***^{T} y ***LDL***^{T} (nótese que son diferentes ***L***'s) se relacionan así:

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^{\mathrm{T}} = \mathbf{L}\mathbf{D}^{\frac{1}{2}}\mathbf{D}^{\frac{1}{2}}\mathbf{L}^{\mathrm{T}} = \mathbf{L}\mathbf{D}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{D}^{\frac{1}{2}})^{\mathrm{T}}\mathbf{L}^{\mathrm{T}} = \mathbf{L}\mathbf{D}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{L}\mathbf{D}^{\frac{1}{2}})^{\mathrm{T}}$$

Solución del SEL dada la factorización $\boldsymbol{LL}^T$

Solución del SEL dada la factorización $\boldsymbol{LL}^T$

- Si tenemos $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ entonces usamos $\mathbf{LL}^T\mathbf{x}=\mathbf{b}$,

- primero hacemos $\mathbf{y} = \mathbf{L}^T\mathbf{x}$ y solucionamos $\mathbf{Ly}=\mathbf{b}$ con sustitución hacia adelante, con:

- Luego solucionamos para $\boldsymbol{x}$ el sistema $\boldsymbol{L}^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ con sustitución hacia atrás.

Solución del SEL dada la factorización $\boldsymbol{LL}^{\mathrm{T}}$

- Si tenemos **Ax**=**b** entonces usamos $\mathbf{LL}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}=\mathbf{b}$,

- primero hacemos $\mathbf{y} = \mathbf{L}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$ y solucionamos **Ly**=**b** con sustitución hacia adelante, con:

$$y_1 = \frac{b_1}{l_{11}} \qquad y_i = \frac{1}{l_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} y_j\right]$$

- Luego solucionamos para $\boldsymbol{x}$ el sistema $\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ con sustitución hacia atrás.

Solución del SEL dada la factorización ***LDL***^{T}

Solución del SEL dada la factorización $\boldsymbol{LDL}^{\mathrm{T}}$

- Si tenemos el sistema $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}=\mathbf{b}$ como $\boldsymbol{LDL}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ haciendo $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{DL}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{x}$, y resolviendo para $\boldsymbol{y}$ el SEL $\boldsymbol{Ly}=\mathbf{b}$ con sustitución hacia adelante.

Solución del SEL dada la factorización $\boldsymbol{LDL}^{\mathrm{T}}$

- Si tenemos el sistema $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}=\mathbf{b}$ como $\boldsymbol{LDL}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ haciendo $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{DL}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{x}$, y resolviendo para $\boldsymbol{y}$ el SEL $\boldsymbol{Ly}=\mathbf{b}$ con sustitución hacia adelante.

- Luego usamos $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ de tal forma que resolvemos para $\boldsymbol{z}$ el SEL $\boldsymbol{Dz}=\boldsymbol{y}$. Pero $\boldsymbol{D}$ es diagonal, por lo que esto es muy fácil:

Solución del SEL dada la factorización $\boldsymbol{LDL}^{\mathrm{T}}$

- Si tenemos el sistema $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}=\mathbf{b}$ como $\boldsymbol{LDL}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ haciendo $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{DL}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{x}$, y resolviendo para $\boldsymbol{y}$ el SEL $\boldsymbol{Ly}=\mathbf{b}$ con sustitución hacia adelante.

- Luego usamos $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ de tal forma que resolvemos para $\boldsymbol{z}$ el SEL $\boldsymbol{Dz}=\boldsymbol{y}$. Pero $\boldsymbol{D}$ es diagonal, por lo que esto es muy fácil:

Solución del SEL dada la factorización LDL^T

- Si tenemos el sistema $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}=\mathbf{b}$ como $\boldsymbol{LDL}^T\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ haciendo $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{DL}^T\,\boldsymbol{x}$, y resolviendo para $\boldsymbol{y}$ el SEL $\boldsymbol{Ly}=\mathbf{b}$ con sustitución hacia adelante.

- Luego usamos $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{L}^T\boldsymbol{x}$ de tal forma que resolvemos para $\boldsymbol{z}$ el SEL $\boldsymbol{Dz}=\boldsymbol{y}$. Pero $\boldsymbol{D}$ es diagonal, por lo que esto es muy fácil:

- Finalmente resolvemos $\boldsymbol{L}^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{z}$ para $\mathbf{x}$ con sustitución hacia atrás y **TERMINAMOS**.

Solución del SEL dada la factorización $\boldsymbol{LDL}^\top$

- Si tenemos el sistema $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}=\mathbf{b}$ como $\boldsymbol{LDL}^\top\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ haciendo $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{DL}^\top\boldsymbol{x}$, y resolviendo para $\boldsymbol{y}$ el SEL $\boldsymbol{Ly}=\mathbf{b}$ con sustitución hacia adelante.

- Luego usamos $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{L}^\top\boldsymbol{x}$ de tal forma que resolvemos para $\boldsymbol{z}$ el SEL $\boldsymbol{Dz}=\boldsymbol{y}$. Pero $\boldsymbol{D}$ es diagonal, por lo que esto es muy fácil:

$$z_i = \frac{y_i}{d_i},$$

- Finalmente resolvemos $\boldsymbol{L}^\top\boldsymbol{x} = \boldsymbol{z}$ para $\mathbf{x}$ con sustitución hacia atrás y **TERMINAMOS**.