Clase No. 8:

Matrices bandadas

Cálculo de la inversa y determinante
Normas vectoriales y matriciales

MAT–251

Dr. Alonso Ramírez Manzanares
CIMAT A.C.
e-mail: alram@cimat.mx
web: http://www.cimat.mx/~alram/met_num/

Dr. Joaquín Peña Acevedo
CIMAT A.C.
e-mail: joaquin@cimat.mx

Cálculo del determinante de la matriz

Supongamos que tenemos una matriz $\boldsymbol{A}$ de tamaño n y su factorización LU:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{LU}.$$

Entonces por propiedades del determinante

$$\det \boldsymbol{A} = \det(\boldsymbol{LU}) = \det \boldsymbol{L} \, \det \boldsymbol{U}.$$

Como las matrices $\boldsymbol{L}$ y $\boldsymbol{U}$ son triangulares, su determinante es igual al producto de los elementos de su diagonal. Además, para la factorización de Doolittle, se debe tener que $\det \boldsymbol{L} = 1$, por lo que

$$\det \boldsymbol{A} = \det \boldsymbol{U} = \prod_{i=1}^{n} u_{ii}.$$

Cálculo de la inversa de la matriz

Supongamos que tenemos una matriz $\boldsymbol{A}$ de tamaño n y su factorización LU:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{U}.$$

Sea $\boldsymbol{x}_i$ el vector solución del sistema lineal

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{L}\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{e}_i.$$

para $i = 1, \ldots, n$, donde $\boldsymbol{e}_i$ es el i'esimo vector canónico. Si $\boldsymbol{X} = [\, \boldsymbol{x}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{x}_n \,]$, entonces

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = [\, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_n \,] = [\, \boldsymbol{e}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{e}_n \,] = \boldsymbol{I}.$$

Esto es, $\boldsymbol{X}$ es la inversa de $\boldsymbol{A}$. Así, si tenemos la factorización LU de matriz, solo tenemos que resolver n sistemas de ecuaciones lineales para obtener las columnas de la matriz inversa.

Normas para vectores

Definición de norma vectorial

Una norma en $\mathbb{R}^n$ es una función $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que tiene las propiedades:

1. $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$,
2. $\|\boldsymbol{x}\| = 0$ si y sólo si $\boldsymbol{x} = 0$,
3. $\|\alpha \boldsymbol{x}\| = |\alpha| \, \|\boldsymbol{x}\| \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}$,
4. $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\| \quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$.

Ejemplos: Para $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top$

$$\|\boldsymbol{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \qquad \text{(Norma 2)}$$

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \qquad \text{(Norma 1)}$$

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \qquad \text{(Norma infinito)}$$

Normas para vectores

En general, para $p \geq 1$, la norma p del vector $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top$ es

$$\|\boldsymbol{x}\|_p = \left(|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p\right)^{1/p}.$$

Además,

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max_{1 \leq x_i \leq n} |x_i|$$

Normas para matrices (I)

Definición de norma matricial

Una norma en $\mathbb{R}^{n\times n}$ es una función $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ que tiene las propiedades para todo $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$:

1. $\|\boldsymbol{A}\| \geq 0$ y $\|\boldsymbol{A}\| = 0$ si y sólo si $\boldsymbol{A} = 0$,
2. $\|\alpha \boldsymbol{A}\| = |\alpha| \, \|\boldsymbol{A}\|$,
3. $\|\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\| \leq \|\boldsymbol{A}\| + \|\boldsymbol{B}\|$,

Ejemplos: Para $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$,

Norma de Frobenius : $$\|\boldsymbol{A}\|_F = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right)^{1/2}$$

Norma natural inducida por la norma vectorial $\|\cdot\|$: $$\|\boldsymbol{A}\| = \sup_{\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}} \frac{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}$$

Esta norma tiene algunas propiedades

Normas para matrices (II)

- $\|\boldsymbol{I}\| = 1$.
- $\|\boldsymbol{Ax}\| \leq \|\boldsymbol{A}\| \, \|\boldsymbol{x}\|$.
- $\|\boldsymbol{AB}\| \leq \|\boldsymbol{A}\| \, \|\boldsymbol{B}\|$.

Otra alternativa para definir la norma natural es

$$\|\boldsymbol{A}\| = \sup_{\|\boldsymbol{x}\|=1} \|\boldsymbol{Ax}\| = \max_{\|\boldsymbol{x}\|=1} \|\boldsymbol{Ax}\|.$$

Se puede ver que las normas naturales inducidas por las normas vectoriales l_1 y l_∞ son

$$\textbf{Norma infinito:} \qquad \|\boldsymbol{A}\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$\textbf{Norma 1:} \qquad \|\boldsymbol{A}\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$