Clase No. 9:

Métodos iterativos para resolver sistemas de ecuaciones lineales

MAT–251

Dr. Alonso Ramírez Manzanares
CIMAT A.C.
e-mail: alram@cimat.mx
web: http://www.cimat.mx/~alram/met_num/

Dr. Joaquín Peña Acevedo
CIMAT A.C.
e-mail: joaquin@cimat.mx

Introducción a los métodos iterativos

Una *separación* de $\boldsymbol{A}$ es una descomposición $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q} - \boldsymbol{P}$, con $\boldsymbol{Q}$ una matriz no singular.

Una separación puede producir un método iterativo:

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{x} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}^{-1}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{M}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}$$

Introducción a los métodos iterativos

Una *separación* de $\boldsymbol{A}$ es una descomposición $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q} - \boldsymbol{P}$, con $\boldsymbol{Q}$ una matriz no singular.

Una separación puede producir un método iterativo:

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{x} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}^{-1}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{M}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}$$

Queremos un método en el que demos un vector inicial $\boldsymbol{x}^0$ y generemos una sucesión mediante

$$\boldsymbol{x}^t = \boldsymbol{M}\boldsymbol{x}^{t-1} + \boldsymbol{c} \tag{1}$$

tal que $\boldsymbol{x}^t \to \boldsymbol{x}^*$, donde $\boldsymbol{x}^*$ es la solución del sistema $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

En el proceso iterativo, como la matriz $\boldsymbol{M}$ y el vector $\boldsymbol{c}$ no cambian, se dice que el método es *estacionario*.

Introducción a los métodos iterativos

Tenemos que la solución $\boldsymbol{x}^*$ de $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ satisface

$$\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{M}\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{c} \tag{2}$$

Restando (2) de (1) se obtiene

$$\boldsymbol{x}^t - \boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}^{t-1} - \boldsymbol{x}^*)$$

$$\Longrightarrow \quad \|\boldsymbol{x}^t - \boldsymbol{x}^*\| \leq \|\boldsymbol{M}\| \, \|\boldsymbol{x}^{t-1} - \boldsymbol{x}^*\|$$

Introducción a los métodos iterativos

Tenemos que la solución $\boldsymbol{x}^*$ de $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ satisface

$$\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{M}\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{c} \qquad (2)$$

Restando (2) de (1) se obtiene

$$\boldsymbol{x}^t - \boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}^{t-1} - \boldsymbol{x}^*)$$

$$\implies \quad \|\boldsymbol{x}^t - \boldsymbol{x}^*\| \leq \|\boldsymbol{M}\|\, \|\boldsymbol{x}^{t-1} - \boldsymbol{x}^*\|$$

Proposición

Si $\|\boldsymbol{M}\| < 1$, entonces la sucesión $\{\boldsymbol{x}^t\}$, con $\boldsymbol{x}^t = \boldsymbol{M}\boldsymbol{x}^{t-1} + \boldsymbol{c}$, converge para cualquier $\boldsymbol{x}^0$.

$$\|\boldsymbol{x}^t - \boldsymbol{x}^*\| \leq \|\boldsymbol{M}\|\, \|\boldsymbol{x}^{t-1} - \boldsymbol{x}^*\| < \|\boldsymbol{x}^{t-1} - \boldsymbol{x}^*\|$$