Clase No. 9:

Métodos iterativos para resolver sistemas de ecuaciones lineales

MAT–251

Dr. Alonso Ramírez Manzanares
CIMAT A.C.
e-mail: alram@cimat.mx
web: http://www.cimat.mx/~alram/met_num/

Dr. Joaquín Peña Acevedo
CIMAT A.C.
e-mail: joaquin@cimat.mx

Introducción a los métodos iterativos

Tenemos que la solución $\boldsymbol{x}^*$ de $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ satisface

$$\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{Mx}^* + \boldsymbol{c} \tag{2}$$

Restando (2) de (1) se obtiene

$$\boldsymbol{x}^t - \boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}^{t-1} - \boldsymbol{x}^*)$$

$$\implies \quad \|\boldsymbol{x}^t - \boldsymbol{x}^*\| \leq \|\boldsymbol{M}\| \, \|\boldsymbol{x}^{t-1} - \boldsymbol{x}^*\|$$

Proposición

Si $\|\boldsymbol{M}\| < 1$, entonces la sucesión $\{\boldsymbol{x}^t\}$, con $\boldsymbol{x}^t = \boldsymbol{Mx}^{t-1} + \boldsymbol{c}$, converge para cualquier $\boldsymbol{x}^0$.

$$\|\boldsymbol{x}^t - \boldsymbol{x}^*\| \leq \|\boldsymbol{M}\| \, \|\boldsymbol{x}^{t-1} - \boldsymbol{x}^*\| < \|\boldsymbol{x}^{t-1} - \boldsymbol{x}^*\|$$

Un comentario sobre las normas en $\mathbb{R}^n$

En general, no conocemos $\boldsymbol{x}^*$. Por ello, un criterio para terminar de iterar el algoritmo es cuando se cumpla

$$\frac{\|\boldsymbol{x}^t - \boldsymbol{x}^{t-1}\|}{\sqrt{\epsilon_m} + \|\boldsymbol{x}^t\|} < tol \qquad \text{o} \qquad \frac{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^t - \boldsymbol{b}\|}{\sqrt{\epsilon_m} + \|\boldsymbol{b}\|} < tol$$

Un comentario sobre las normas en $\mathbb{R}^n$

En general, no conocemos $\boldsymbol{x}^*$. Por ello, un criterio para terminar de iterar el algoritmo es cuando se cumpla

$$\frac{\|\boldsymbol{x}^t - \boldsymbol{x}^{t-1}\|}{\sqrt{\epsilon_m} + \|\boldsymbol{x}^t\|} < tol \qquad \text{o} \qquad \frac{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^t - \boldsymbol{b}\|}{\sqrt{\epsilon_m} + \|\boldsymbol{b}\|} < tol$$

Proposición

Si $\|\cdot\|_a$ y $\|\cdot\|_b$ son dos normas en $\mathbb{R}^n$, entonces existen constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que para todo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$

$$\alpha\|\boldsymbol{x}\|_a \;\leq\; \|\boldsymbol{x}\|_b \;\leq\; \beta\|\boldsymbol{x}\|_a$$

En general, cuando dos normas cumplen las desigualdades anteriores se dice que son *equivalentes*.

Un comentario sobre las normas en $\mathbb{R}^n$

En general, no conocemos $\boldsymbol{x}^*$. Por ello, un criterio para terminar de iterar el algoritmo es cuando se cumpla

$$\frac{\|\boldsymbol{x}^t - \boldsymbol{x}^{t-1}\|}{\sqrt{\epsilon_m} + \|\boldsymbol{x}^t\|} < tol \qquad \text{o} \qquad \frac{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^t - \boldsymbol{b}\|}{\sqrt{\epsilon_m} + \|\boldsymbol{b}\|} < tol$$

Proposición

Si $\|\cdot\|_a$ y $\|\cdot\|_b$ son dos normas en $\mathbb{R}^n$, entonces existen constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que para todo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$

$$\alpha\|\boldsymbol{x}\|_a \;\leq\; \|\boldsymbol{x}\|_b \;\leq\; \beta\|\boldsymbol{x}\|_a$$

En general, cuando dos normas cumplen las desigualdades anteriores se dice que son *equivalentes*.

Desde el punto de vista computacional, esto nos da la libertad de usar en los algoritmos una norma que no sea costosa de calcular y que no introduzca demasiados errores al calcularla.

Método de Jacobi

Queremos resolver $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ haciendo una separación de la matriz $\boldsymbol{A} = [a_{ij}] = \boldsymbol{Q} - \boldsymbol{P}$. Dado que $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}^{-1}(\boldsymbol{Px} + \boldsymbol{b})$, conviene elegir $\boldsymbol{Q}$ de modo que su inversa sea fácil de calcular.

Método de Jacobi

Queremos resolver $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ haciendo una separación de la matriz $\boldsymbol{A} = [a_{ij}] = \boldsymbol{Q} - \boldsymbol{P}$. Dado que $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}^{-1}(\boldsymbol{Px} + \boldsymbol{b})$, conviene elegir $\boldsymbol{Q}$ de modo que su inversa sea fácil de calcular.

En el método de Jacobi se elige

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0 & -a_{22} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 0 & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Si $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_n)^\top$, $\qquad \boldsymbol{x}^{t-1} = \left(x_1^{t-1}, x_2^{t-1}, \ldots, x_n^{t-1}\right)^\top$, entonces para $i = 1, 2, \ldots, n$, la componente i-ésima de $\boldsymbol{x}^t$ está dada por

Método de Jacobi

Queremos resolver $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ haciendo una separación de la matriz $\boldsymbol{A} = [a_{ij}] = \boldsymbol{Q} - \boldsymbol{P}$. Dado que $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}^{-1}(\boldsymbol{Px} + \boldsymbol{b})$, conviene elegir $\boldsymbol{Q}$ de modo que su inversa sea fácil de calcular.

En el método de Jacobi se elige

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0 & -a_{22} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 0 & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Si $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_n)^\top$, $\qquad \boldsymbol{x}^{t-1} = \left(x_1^{t-1}, x_2^{t-1}, \ldots, x_n^{t-1}\right)^\top$, entonces para $i = 1, 2, \ldots, n$, la componente i-ésima de $\boldsymbol{x}^t$ está dada por

$$\boldsymbol{x}_i^t = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{t-1} \right)$$

Método Iterativo de Jacobi

- Ejemplo para el SEL con solución exacta $\mathbf{x} = (1, 2, -1, 1)^t.$

$$\begin{array}{lrcrcrcrcr}
E_1: & 10x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & & & = & 6, \\
E_2: & -x_1 & + & 11x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 25, \\
E_3: & 2x_1 & - & x_2 & + & 10x_3 & - & x_4 & = & -11, \\
E_4: & & & 3x_2 & - & x_3 & + & 8x_4 & = & 15
\end{array}$$

- Para tener un sistema

$$\begin{array}{lclclclclcl}
x_1 & = & & & \frac{1}{10}x_2 & - & \frac{1}{5}x_3 & & & + & \frac{3}{5}, \\
x_2 & = & \frac{1}{11}x_1 & & & + & \frac{1}{11}x_3 & - & \frac{3}{11}x_4 & + & \frac{25}{11}, \\
x_3 & = & -\frac{1}{5}x_1 & + & \frac{1}{10}x_2 & & & + & \frac{1}{10}x_4 & - & \frac{11}{10}, \\
x_4 & = & & & -\frac{3}{8}x_2 & + & \frac{1}{8}x_3 & & & + & \frac{15}{8}.
\end{array}$$

Convergencia del método de Jacobi

Note que

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}$$

donde $\boldsymbol{I}$ es la matriz identidad de tamaño n. Entonces

$$\|\boldsymbol{M}\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|}$$

Si para todo i tenemos que

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad \Longrightarrow \quad \|\boldsymbol{M}\|_\infty < 1$$

y por tanto la sucesión es convergente.

Proposición

Si la matriz $\boldsymbol{A}$ es estrictamente diagonal dominante, entonces el método de Jacobi converge para cualquier vector inicial $\boldsymbol{x}^0$.

Ejemplo 1.

$$A = \begin{bmatrix} 15 & 5 & 0 & 2 & 6 \\ 5 & 14 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -18 & 1 & 6 \\ 3 & 6 & 2 & 12 & 0 \\ 5 & -4 & 4 & 1 & 15 \end{bmatrix}$$

Elegimos

$$\boldsymbol{x}^* = \begin{pmatrix} 1000 \\ 2000 \\ 3000 \\ -2000 \\ -1000 \end{pmatrix}, \qquad \Longrightarrow \qquad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* = \begin{pmatrix} 15000 \\ 32000 \\ -54000 \\ -3000 \\ -8000 \end{pmatrix}$$

Iniciamos con $\boldsymbol{x}^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ejemplo 1.

	t=1	t=3	t=5	t=7	t=9	t=11
x_1	1000.000	1065.794	996.807	996.451	998.268	999.303
x_2	2285.714	2191.327	2050.923	2012.788	2003.548	2001.011
x_3	3000.000	2853.889	2986.866	2997.922	2999.722	3000.026
x_4	-250.000	-1872.778	-1969.974	-1995.201	-1999.320	-1999.953
x_5	-533.333	-919.048	-982.239	-992.414	-997.533	-999.193

	t=13	t=15	t=17	t=19	t=21	t=23
x_1	999.747	999.912	999.970	999.990	999.997	999.999
x_2	2000.297	2000.090	2000.028	2000.009	2000.003	2000.001
x_3	3000.031	3000.015	3000.006	3000.002	3000.001	3000.000
x_4	-2000.023	-2000.016	-2000.007	-2000.003	-2000.001	-2000.000
x_5	-999.736	-999.914	-999.972	-999.991	-999.997	-999.999

Otra condición suficiente.

Decimos que $\boldsymbol{v}$ es un *eigenvector* de la matriz $\boldsymbol{A}$ si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v},$$

y llamamos a λ es un *eigenvalor* asociado a $\boldsymbol{v}$.

El *radio espectral* $\rho(\boldsymbol{A})$ de una matriz $\boldsymbol{A}$ se define como

$$\rho(\boldsymbol{A}) = \max\{\, |\lambda| : \quad \lambda \text{ es eigenvalor de } \boldsymbol{A}\}$$

Proposición

Sea $\boldsymbol{A}$ una matriz $n \times n$. Entonces $\rho(\boldsymbol{A}) \leq \|\boldsymbol{A}\|$ para cualquier norma natural. Además, $\boldsymbol{A}^k \to \mathbf{0}$ si y sólo si $\rho(\boldsymbol{A}) < 1$.

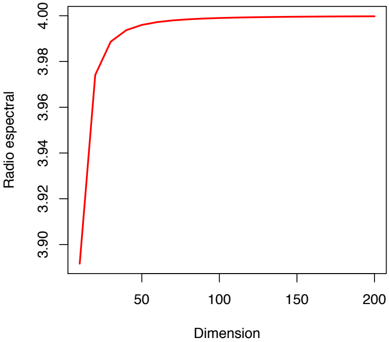
Proposición

La sucesión $\boldsymbol{x}^t = \boldsymbol{M}\boldsymbol{x}^{t-1} + \boldsymbol{c}$ converge para cualquier $\boldsymbol{x}^0$ si $\rho(\boldsymbol{M}) < 1$.

Ejemplo 2.

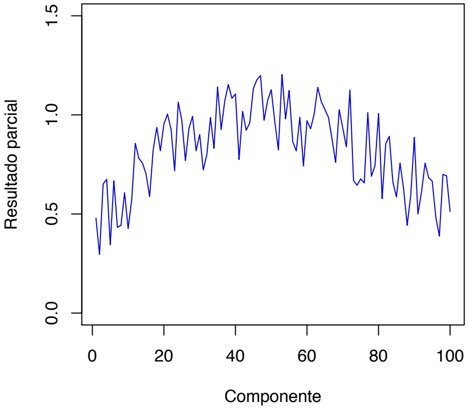
Consideremos las matrices de la forma

$$
\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
$$

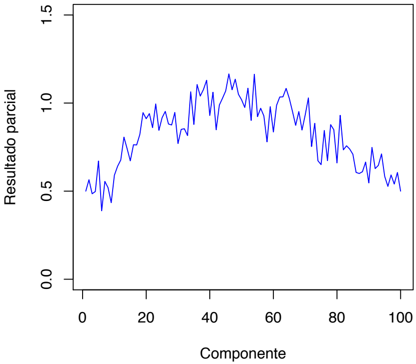


Ejemplo 2.

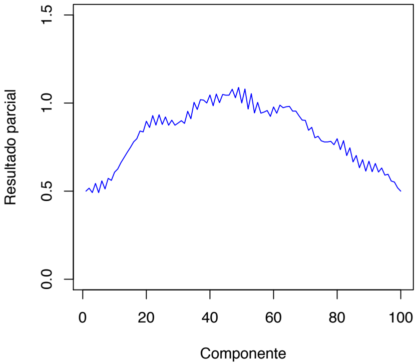
Fijamos $n = 100$. Sea $\boldsymbol{b} = (0.5, 0, 0, \ldots, 0, 0, 0.5)^\top$. Entonces, inicializamos el método de Jacobi con el siguiente vector $\boldsymbol{x}^0$:



Ejemplo 2.

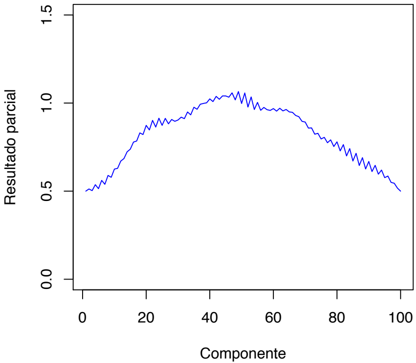


Iteración 1

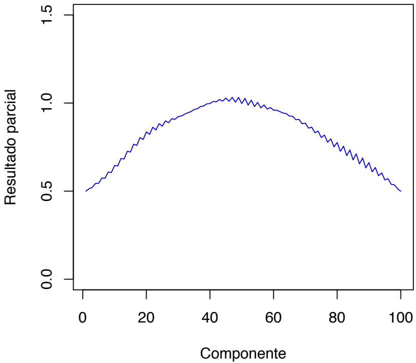


Iteración 10

Ejemplo 2.

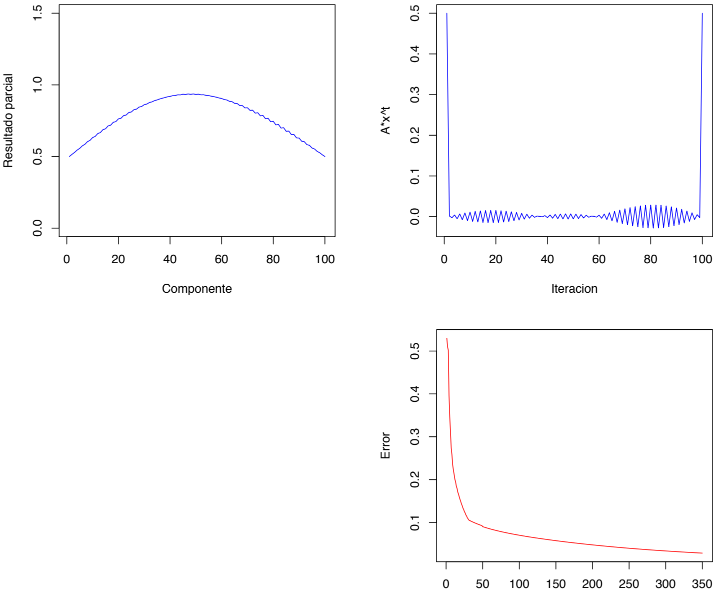


Iteración 20

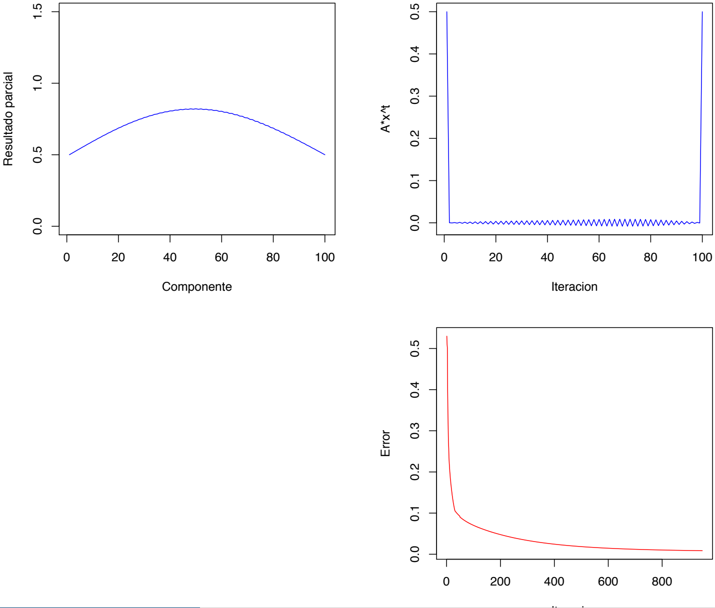


Iteración 50

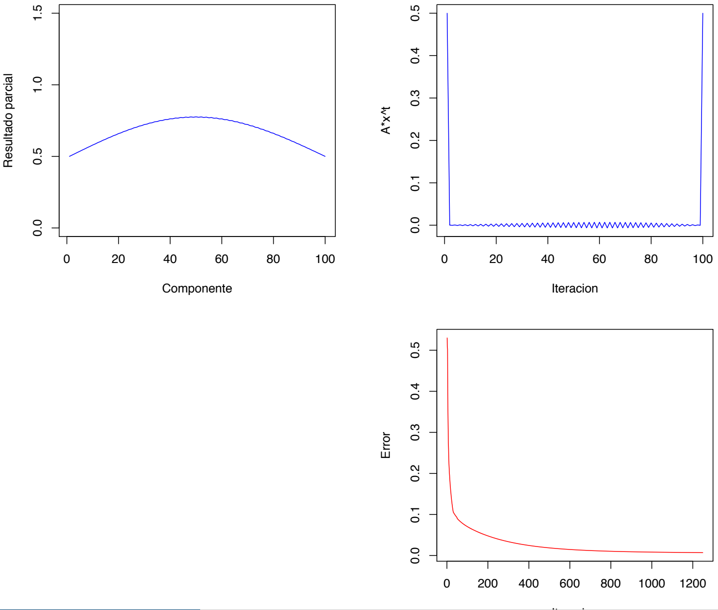
Ejemplo 2: Iteración 350



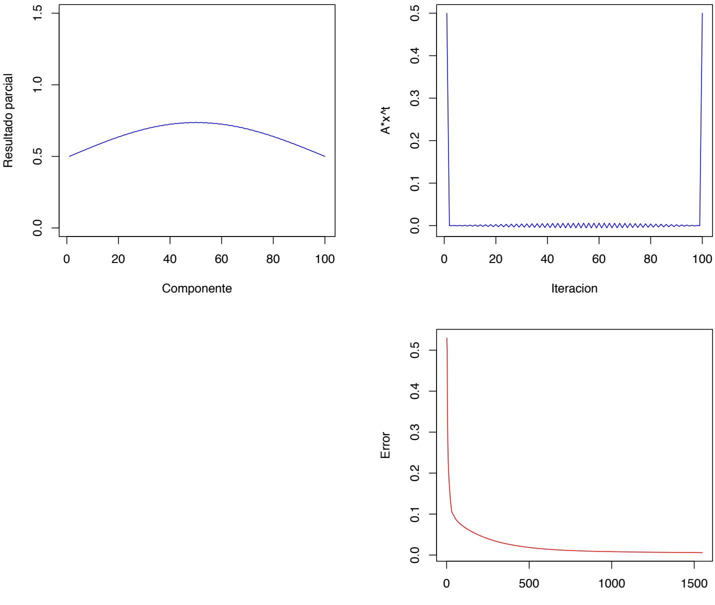
Ejemplo 2: Iteración 950



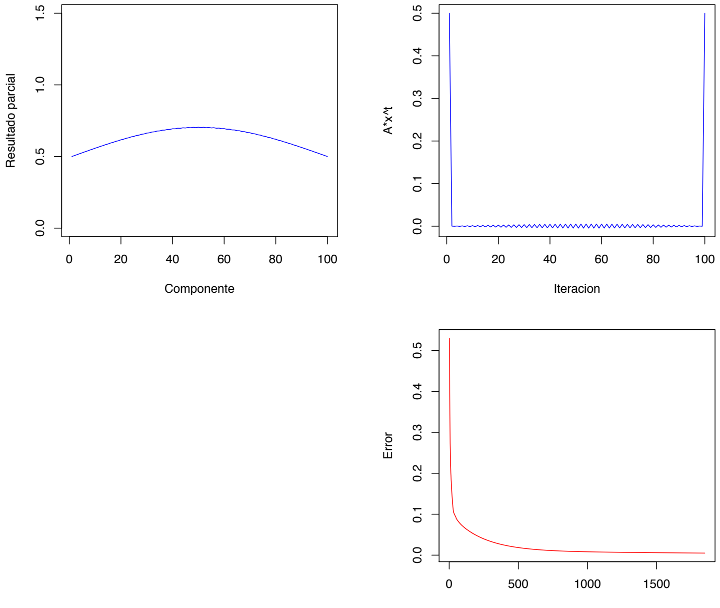
Ejemplo 2: Iteración 1250



Ejemplo 2: Iteración 1550



Ejemplo 2: Iteración 1850



Ejemplo 2: Iteración 2150