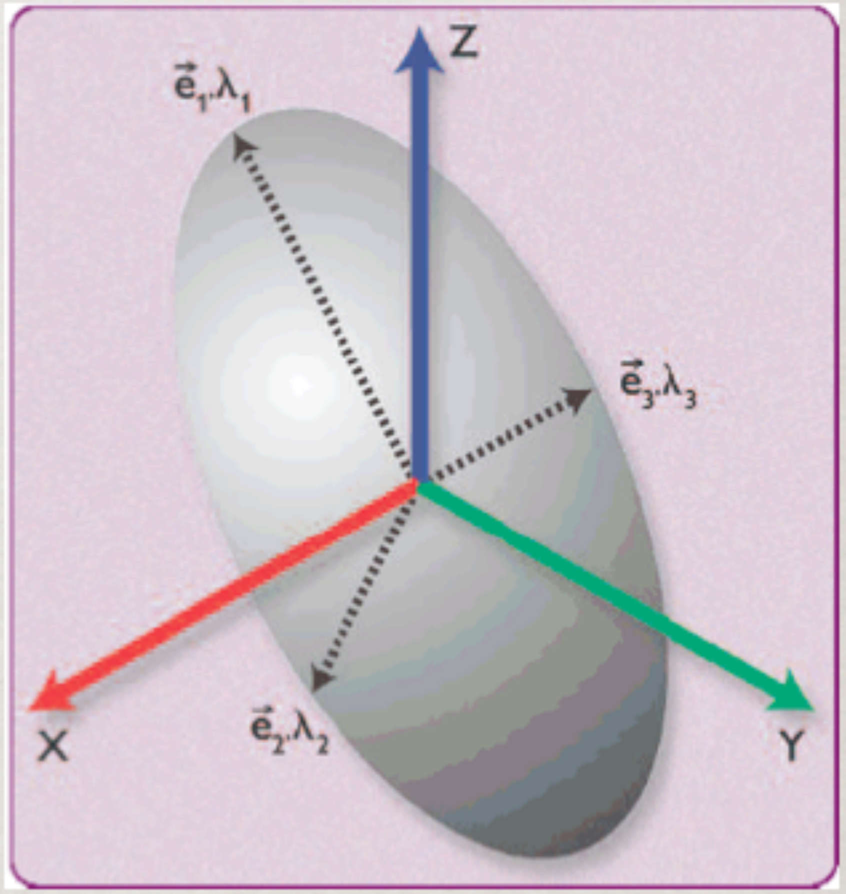
Uso de LS

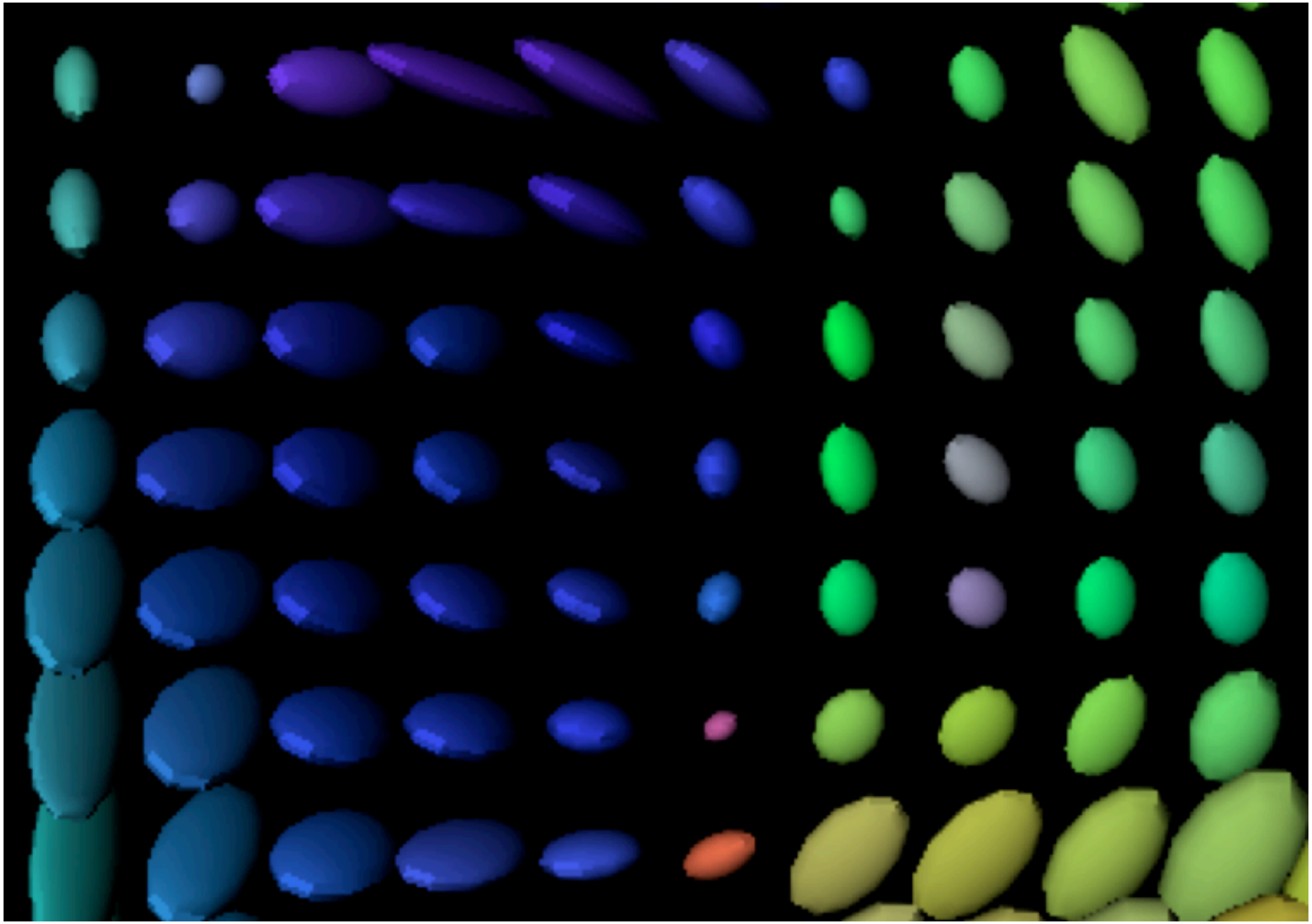
- $$\min \sum_{i}^{M} \left(S_i - S_0 \exp^{-b g_i^T \mathbf{D} g_i} \right)^2$$, con g_i en R^3

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{xx} & D_{xy} & D_{xz} \\ D_{yx} & D_{yy} & D_{yz} \\ D_{zx} & D_{zy} & D_{zz} \end{bmatrix} \longrightarrow$$

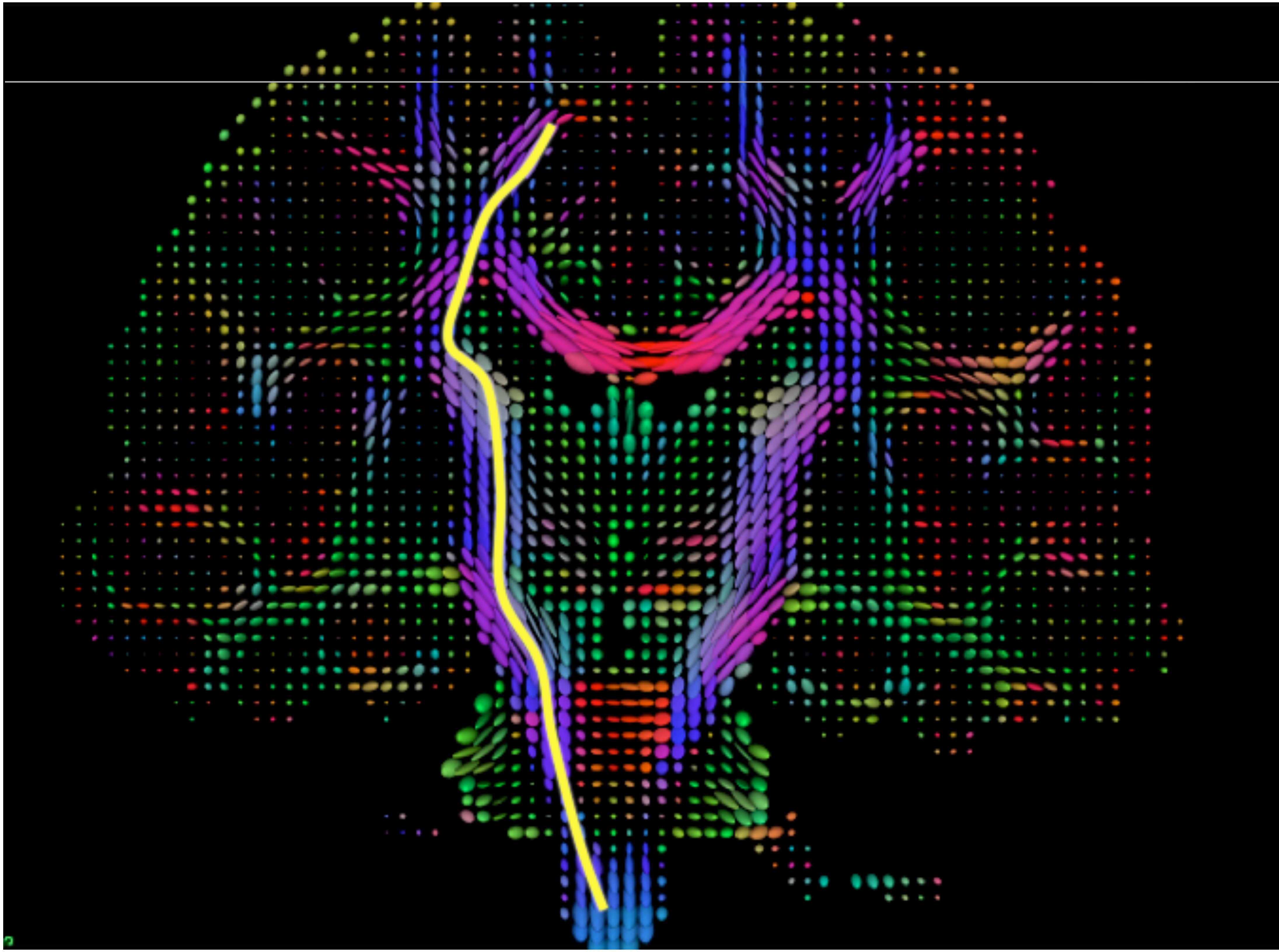


Esta matriz de 3x3 simétrica y definida positiva es un tensor de difusión de hidrógeno.

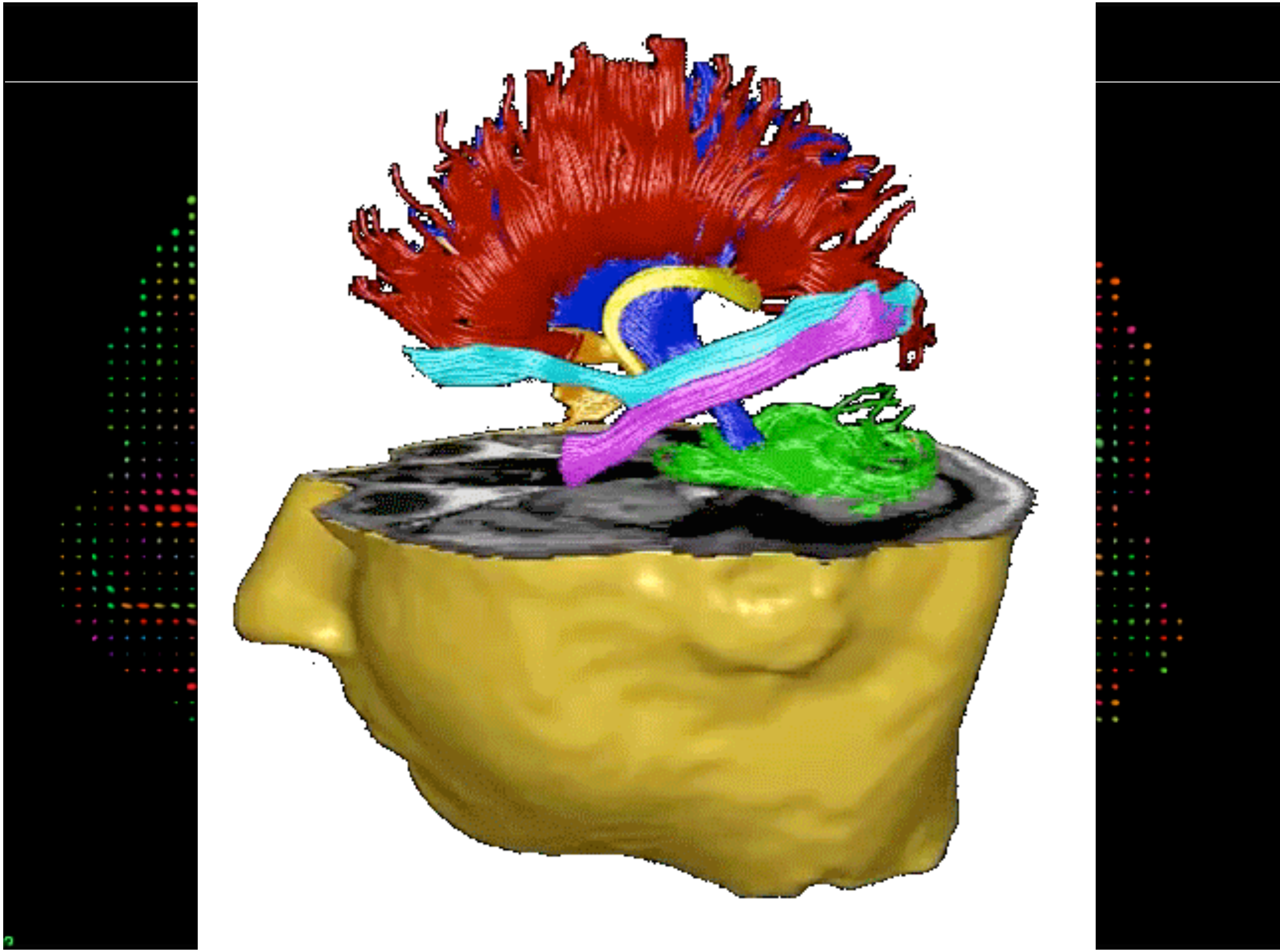
En cada posición del cerebro tenemos una matriz



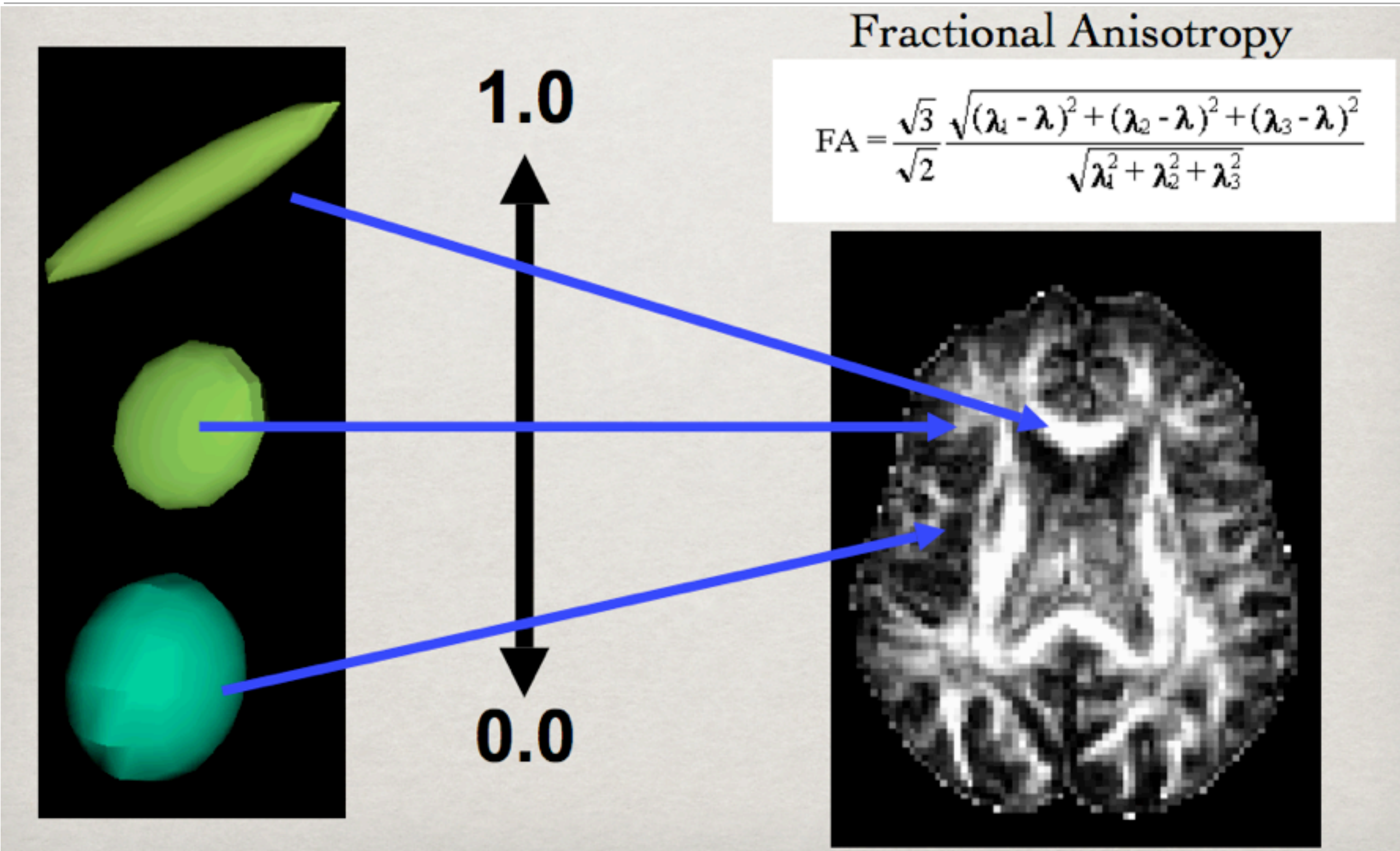
Tractografía cerebral



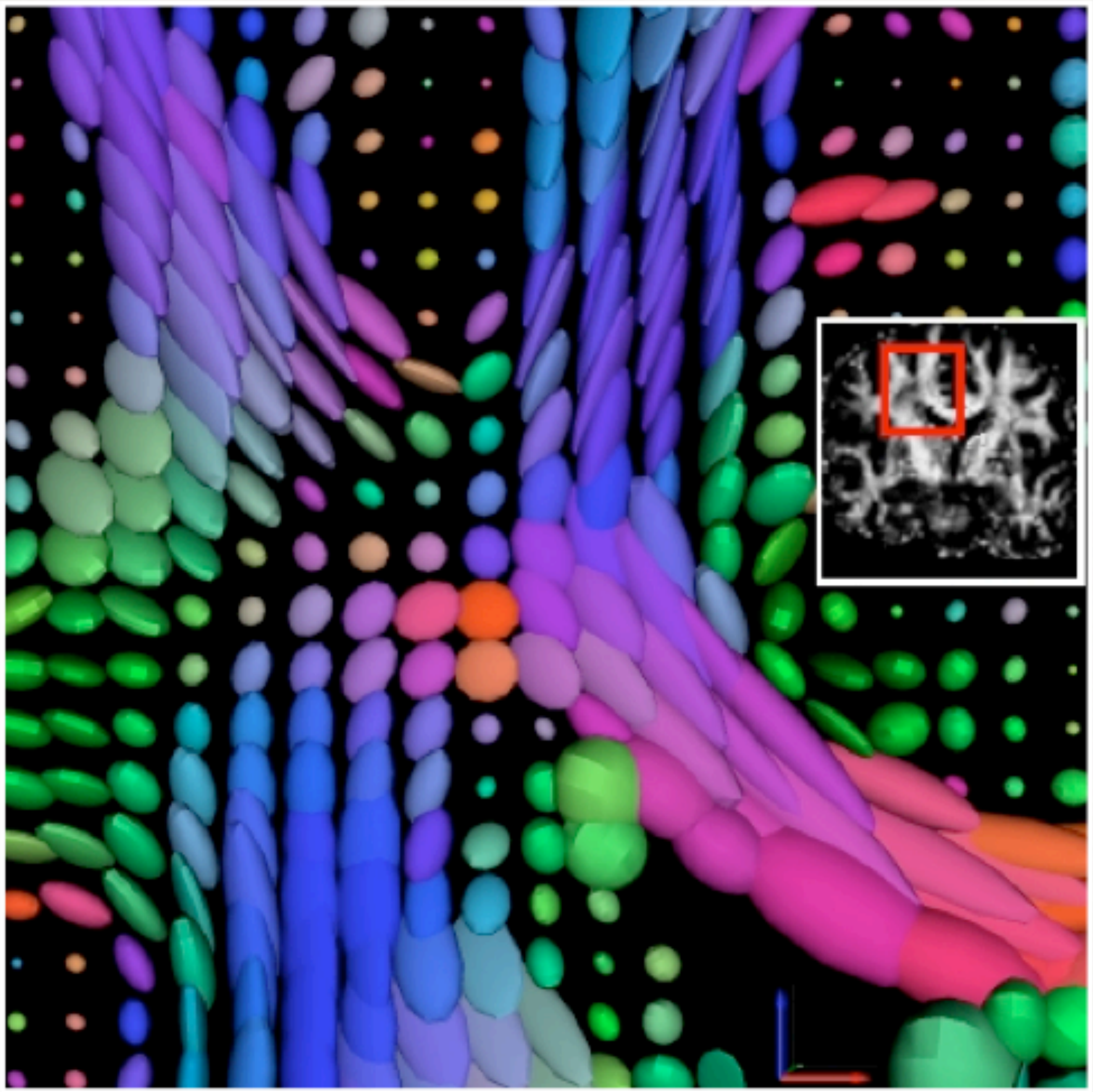
Tractografía cerebral

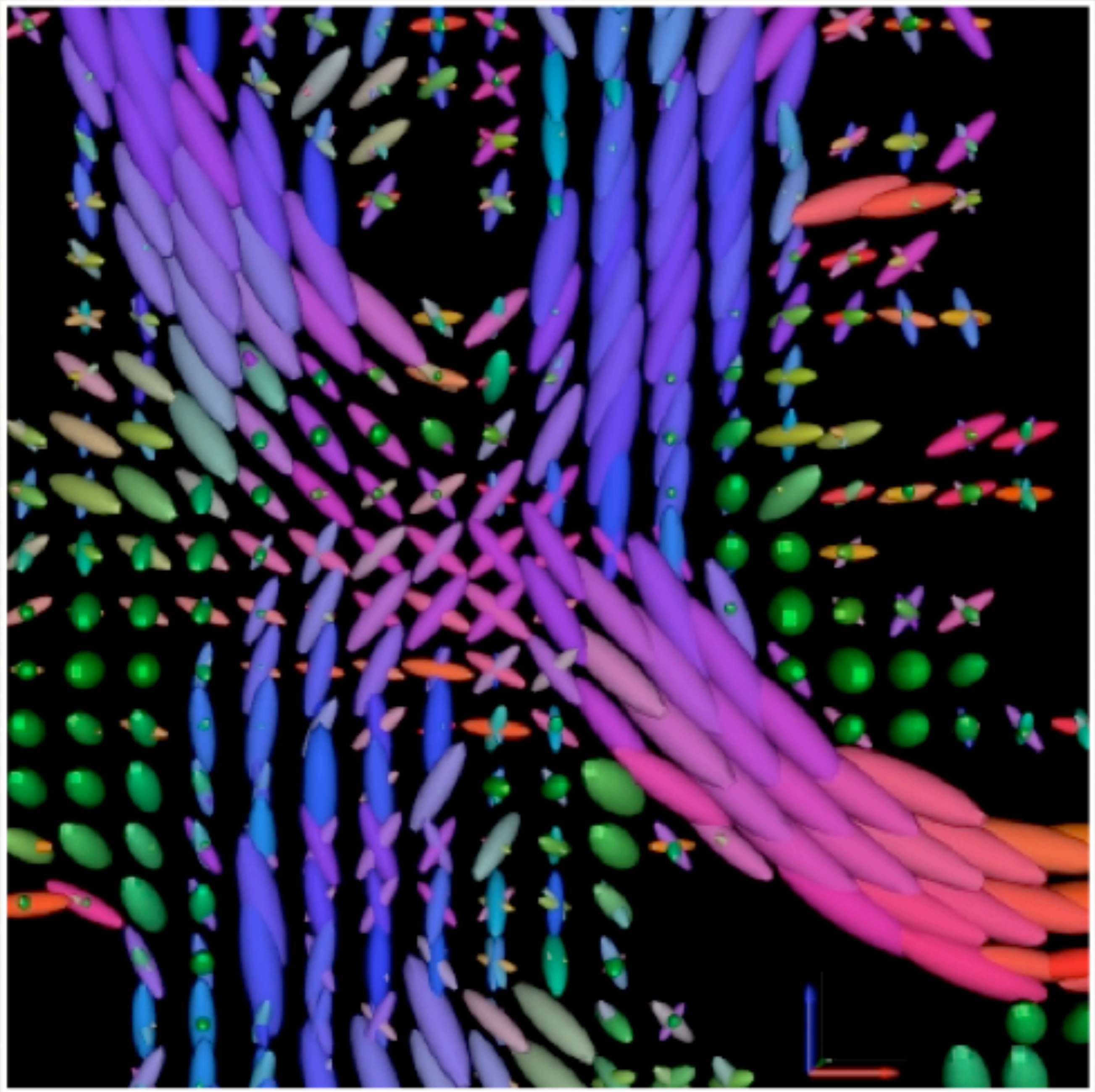


La forma de los elipsoides tambien es importante



A veces esta solución no es buena ....





- ¡No se pierda su próximo curso de optimización!

Descomposicion SVD y aplicaciones

MAT-251

Dr. Alonso Ramírez Manzanares
CIMAT
e-mail: alram@cimat.mx
web: http://www.cimat.mx/~alram/met_num/

Dr. Joaquín Peña Acevedo
CIMAT A.C.
e-mail: joaquin@cimat.mx

Descomposición SVD

- El nombre SVD viene de Singular Value Decomposition

- Partimos del teorema de algebra lineal que nos dice: *Cualquier matriz rectangular, siempre se puede descomponer como producto de 3 matrices*

$$A_{mn} = U_{mm} S_{mn} V_{nn}^T$$

  - donde ***U*** es ortonormal (cuadrada), ***S*** es diagonal y ***V*** es ortonormal (cuadrada). Entonces $\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{U}=\boldsymbol{I}$ y $\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{V} = \boldsymbol{I}$.

  - Las columnas de ***U*** son los eigenvectores (ortonormales) de $\boldsymbol{AA}^T$ y las columas de ***V*** son los eigenvectores (ortonormales) de $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$.

  - Las entradas de ***S*** se llaman *valores singulares* y son las raíces cuadradas de los eigenvalores de ***U*** o ***V*** en orden descendente, las cuales son no-negativas.

Descomposición SVD

- La descomposición es "casi" única: permutaciones en columnas y en los elementos de la diagonal generan otras descomposiciones.
    - ***U S V^T*** se puede descomponer como suma de matrices de rango 1.

$$USV^\top = s_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^\top + \cdots + s_r \mathbf{u}_r \mathbf{v}_r^\top$$

- Cuando la matriz A es compleja, la descomposición se da en términos de la transpuesta conjugada

Descomposición SVD

- La descomposición es "casi" única: permutaciones en columnas y en los elementos de la diagonal generan otras descomposiciones.
    - ***U S V^T*** se puede descomponer como suma de matrices de rango 1.

$$USV^\top = s_1\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1^\top + \cdots + s_r\mathbf{u}_r\mathbf{v}_r^\top$$

- Cuando la matriz A es compleja, la descomposición se da en términos de la transpuesta conjugada

$$A_{mn} = U_{mm}S_{mn}V_{nn}^*$$

Ejemplo:

- Dada $$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$
- Calculamos:
- Definición de descomposición espectral
- Uso del determinante
- Resolviendo el polinomio
- Sustituyendo en el SEL

Ejemplo:

- Dada $$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$
- Calculamos: $$AA^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 1 \\ 1 & 11 \end{bmatrix}$$
- Definición de descomposición espectral
- Uso del determinante
- Resolviendo el polinomio
- Sustituyendo en el SEL

Ejemplo:

- Dada $$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$
- Calculamos: $$AA^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 1 \\ 1 & 11 \end{bmatrix}$$
- Definición de descomposición espectral $$\begin{bmatrix} 11 & 1 \\ 1 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$
- Uso del determinante
- Resolviendo el polinomio
- Sustituyendo en el SEL

Ejemplo:

- Dada $$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$
- Calculamos: $$AA^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 1 \\ 1 & 11 \end{bmatrix}$$
- Definición de descomposición espectral $$\begin{bmatrix} 11 & 1 \\ 1 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$
- Uso del determinante $$\begin{vmatrix} (11-\lambda) & 1 \\ 1 & (11-\lambda) \end{vmatrix} = 0$$
- Resolviendo el polinomio
- Sustituyendo en el SEL

Ejemplo:

- Dada $$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$
- Calculamos: $$AA^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 1 \\ 1 & 11 \end{bmatrix}$$
- Definición de descomposición espectral $$\begin{bmatrix} 11 & 1 \\ 1 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$
- Uso del determinante $$\begin{vmatrix} (11 - \lambda) & 1 \\ 1 & (11 - \lambda) \end{vmatrix} = 0$$
- Resolviendo el polinomio $$\lambda = 10, \lambda = 12$$
- Sustituyendo en el SEL

Ejemplo:

- Dada $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$
- Calculamos: $AA^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 1 \\ 1 & 11 \end{bmatrix}$
- Definición de descomposición espectral $\begin{bmatrix} 11 & 1 \\ 1 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$
- Uso del determinante $\begin{vmatrix} (11-\lambda) & 1 \\ 1 & (11-\lambda) \end{vmatrix} = 0$
- Resolviendo el polinomio $\lambda = 10, \lambda = 12$
- Sustituyendo en el SEL $(11-10)x_1 + x_2 = 0$

$$x_1 = -x_2$$

Ejemplo:

- Dada $$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$
- Calculamos: $$AA^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 1 \\ 1 & 11 \end{bmatrix}$$
- Definición de descomposición espectral $$\begin{bmatrix} 11 & 1 \\ 1 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$
- Uso del determinante $$\begin{vmatrix} (11-\lambda) & 1 \\ 1 & (11-\lambda) \end{vmatrix} = 0$$
- Resolviendo el polinomio $$\lambda = 10, \lambda = 12$$
- Sustituyendo en el SEL $$(11-10)x_1 + x_2 = 0$$

$$x_1 = -x_2$$

$$\text{eigenvector } [1, -1]$$

Ejemplo:

- Dada $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$
- Calculamos: $AA^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 1 \\ 1 & 11 \end{bmatrix}$
- Definición de descomposición espectral $\begin{bmatrix} 11 & 1 \\ 1 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$
- Uso del determinante $\begin{vmatrix} (11-\lambda) & 1 \\ 1 & (11-\lambda) \end{vmatrix} = 0$
- Resolviendo el polinomio $\lambda = 10, \lambda = 12$
- Sustituyendo en el SEL

$$(11-10)x_1 + x_2 = 0 \qquad (11-12)x_1 + x_2 = 0$$

$$x_1 = -x_2 \qquad x_1 = x_2$$

$$\text{eigenvector } [1, -1]$$

Ejemplo:

- Dada $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$
- Calculamos: $AA^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 1 \\ 1 & 11 \end{bmatrix}$
- Definición de descomposición espectral $\begin{bmatrix} 11 & 1 \\ 1 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$
- Uso del determinante $\begin{vmatrix} (11-\lambda) & 1 \\ 1 & (11-\lambda) \end{vmatrix} = 0$
- Resolviendo el polinomio $\lambda = 10, \lambda = 12$
- Sustituyendo en el SEL

$$(11-10)x_1 + x_2 = 0 \qquad (11-12)x_1 + x_2 = 0$$

$$x_1 = -x_2 \qquad x_1 = x_2$$

eigenvector $[1, -1]$ eigenvector $[1, 1]$

Ejemplo (2)

- Usando la orthonormalización

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

- Hacemos el mismo proceso para

- Obteniendo

- Usando los eigenvalores antes calculados (o también los de $A^T A$) construimos

Ejemplo (2)

- Usando la orthonormalización
$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

- Hacemos el mismo proceso para
$$A^T A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 0 & 10 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

- Obteniendo

- Usando los eigenvalores antes calculados (o también los de $A^T A$) construimos

Ejemplo (2)

- Usando la orthonormalización

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

- Hacemos el mismo proceso para

$$A^T A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 0 & 10 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

- Obteniendo

$$V^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{-5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}$$

- Usando los eigenvalores antes calculados (o también los de $A^T A$) construimos

Ejemplo (2)

- Usando la orthonormalización
$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$
- Hacemos el mismo proceso para
$$A^T A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 0 & 10 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$
- Obteniendo
$$V^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{-5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}$$
- Usando los eigenvalores antes calculados (o también los de A^TA) construimos

$$S = \begin{bmatrix} \sqrt{12} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{10} & 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo (3)

$$A_{mn} = U_{mm} S_{mn} V_{nn}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{12} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{10} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{-5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{2}} & \frac{-\sqrt{10}}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{-5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo (3)

- Y finalmente

$$A_{mn} = U_{mm} S_{mn} V_{nn}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{12} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{10} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{-5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{2}} & \frac{-\sqrt{10}}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{-5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo (3)

- Y finalmente

$$A_{mn} = U_{mm} S_{mn} V_{nn}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{12} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{10} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{-5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{2}} & \frac{-\sqrt{10}}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{-5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo (3)

- Y finalmente

$$A_{mn} = U_{mm} S_{mn} V_{nn}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{12} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{10} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{-5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{2}} & \frac{-\sqrt{10}}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{-5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo (3)

- Y finalmente

$$A_{mn} = U_{mm} S_{mn} V_{nn}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{12} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{10} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{-5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{2}} & \frac{-\sqrt{10}}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{-5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo (3)

- Y finalmente

$$A_{mn} = U_{mm} S_{mn} V_{nn}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{12} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{10} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{-5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{2}} & \frac{-\sqrt{10}}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{-5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo (3)

- Y finalmente

$$A_{mn} = U_{mm} S_{mn} V_{nn}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{12} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{10} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{-5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{2}} & \frac{-\sqrt{10}}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{-5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

- Algo interesante es que esta descomposición nos indica que el operador lineal ***A*** aplicado a un vector realiza una rotación, luego un escalamiento y luego otra rotación.

Una aplicación: condicionamiento (1)

- Descomponemos la matriz como: $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{u}\,\boldsymbol{w}\,\boldsymbol{v}^T$

- con

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & w_1 & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & w_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 & w_n \end{bmatrix}$$

  - y sabemos que $\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{u}^T = \boldsymbol{I}$ y $\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{v}^T = \boldsymbol{I}$.

  - $w_1, w_2, \ldots, w_n >= 0$ (los valores singulares de la matriz).

Una aplicación: condicionamiento (2)

- Si la matriz ***a*** es cuadrada, las matrices ***u*** y ***v*** también lo son, entonces la inversa de ***a*** es
    - $\boldsymbol{a}^{-1} = (\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{w}\,\boldsymbol{v}^{T})^{-1}$

      $= (\boldsymbol{v}^{T})^{-1}\,\boldsymbol{w}^{-1}\,\boldsymbol{u}^{-1}$

      $= \boldsymbol{v}\,\boldsymbol{w}^{-1}\,\boldsymbol{u}^{T}$
- con
-

Una aplicación: condicionamiento (2)

- Si la matriz ***a*** es cuadrada, las matrices ***u*** y ***v*** también lo son, entonces la inversa de ***a*** es
  - $\boldsymbol{a}^{-1} = (\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{w}\,\boldsymbol{v}^{T})^{-1}$

    $= (\boldsymbol{v}^{T})^{-1}\,\boldsymbol{w}^{-1}\,\boldsymbol{u}^{-1}$

    $= \boldsymbol{v}\,\boldsymbol{w}^{-1}\,\boldsymbol{u}^{T}$
- con
-

$$\mathbf{w}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{w_1} & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{w_2} & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \frac{1}{w_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & \frac{1}{w_n} \end{bmatrix}$$

Una aplicación: condicionamiento (2)

- Si la matriz ***a*** es cuadrada, las matrices ***u*** y ***v*** también lo son, entonces la inversa de ***a*** es
    - $\boldsymbol{a}^{-1} = (\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{w}\,\boldsymbol{v}^{T})^{-1}$

      $= (\boldsymbol{v}^{T})^{-1}\,\boldsymbol{w}^{-1}\,\boldsymbol{u}^{-1}$

      $= \boldsymbol{v}\,\boldsymbol{w}^{-1}\,\boldsymbol{u}^{T}$
- con
-

$$\mathbf{w}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{w_1} & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{w_2} & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \frac{1}{w_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & \frac{1}{w_n} \end{bmatrix}$$

  - Cuando algún w_i es cero la matriz es singular.

Una aplicación: condicionamiento (3)

- Veamos que pasa al tratar de resolver un SLE con una matriz singular

$$
\begin{aligned}
ax &= y \\
a^{-1}(ax) &= a^{-1}y \\
(a^{-1}a)x &= a^{-1}y \\
x &= a^{-1}y = vw'u^t y
\end{aligned}
$$

- Para evitar errores por singularidad, usamos

Una aplicación: condicionamiento (3)

- Veamos que pasa al tratar de resolver un SLE con una matriz singular

$$\mathbf{a}\mathbf{x} = \mathbf{y}$$
$$\mathbf{a}^{-1}(\mathbf{a}\mathbf{x}) = \mathbf{a}^{-1}\mathbf{y}$$
$$(\mathbf{a}^{-1}\mathbf{a})\mathbf{x} = \mathbf{a}^{-1}\mathbf{y}$$
$$\mathbf{x} = \mathbf{a}^{-1}\mathbf{y} = \mathbf{v}\mathbf{w}'\mathbf{u}^{t}\mathbf{y}$$

- Para evitar errores por singularidad, usamos

$$\mathbf{w}' = \begin{bmatrix} w'_1 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & w'_2 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & w'_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & w'_n \end{bmatrix}$$

Una aplicación: condicionamiento (3)

- Veamos que pasa al tratar de resolver un SLE con una matriz singular

$$\mathbf{a}\mathbf{x} = \mathbf{y}$$
$$\mathbf{a}^{-1}(\mathbf{a}\mathbf{x}) = \mathbf{a}^{-1}\mathbf{y}$$
$$(\mathbf{a}^{-1}\mathbf{a})\mathbf{x} = \mathbf{a}^{-1}\mathbf{y}$$
$$\mathbf{x} = \mathbf{a}^{-1}\mathbf{y} = \mathbf{v}\mathbf{w}'\mathbf{u}^{t}\mathbf{y}$$

- Para evitar errores por singularidad, usamos

$$\mathbf{w}' = \begin{bmatrix} w'_1 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & w'_2 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & w'_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & w'_n \end{bmatrix}$$

con

Una aplicación: condicionamiento (3)

- Veamos que pasa al tratar de resolver un SLE con una matriz singular

$$\mathbf{a}\mathbf{x} = \mathbf{y}$$
$$\mathbf{a}^{-1}(\mathbf{a}\mathbf{x}) = \mathbf{a}^{-1}\mathbf{y}$$
$$(\mathbf{a}^{-1}\mathbf{a})\mathbf{x} = \mathbf{a}^{-1}\mathbf{y}$$
$$\mathbf{x} = \mathbf{a}^{-1}\mathbf{y} = \mathbf{v}\mathbf{w}'\mathbf{u}^t\mathbf{y}$$

- Para evitar errores por singularidad, usamos

$$\mathbf{w}' = \begin{bmatrix} w'_1 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & w'_2 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & w'_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & w'_n \end{bmatrix}$$

con

$$w'_i = \begin{cases} \dfrac{1}{w_i} & (w_i \geq \varepsilon) \\ 0 & (w_i < \varepsilon) \end{cases}$$

Una aplicación: condicionamiento (4)

- El valor de ε en

$$w'_i = \begin{cases} \dfrac{1}{w_i} & (w_i \geq \varepsilon) \\ 0 & (w_i < \varepsilon) \end{cases}$$

depende de la precisión de la máquina.

- Cuando la matriz ***a*** es singular el SLE no tiene solución, pero mediante esta formulación obtenemos la solución **x** de mínimos cuadrados $||\mathbf{ax}-\mathbf{y}||_2$.

- Es decir, la operación $$\mathbf{x} = \mathbf{a}^{-1}\mathbf{y} = \mathbf{v}\mathbf{w}'\mathbf{u}^t\mathbf{y}$$

  - se puede usar cuando tenemos mas ecuaciones que incógnitas, es decir se puede usar en solución general de mínimos cuadrados, esto es conocido como una *pseudo inversa* de SVD.

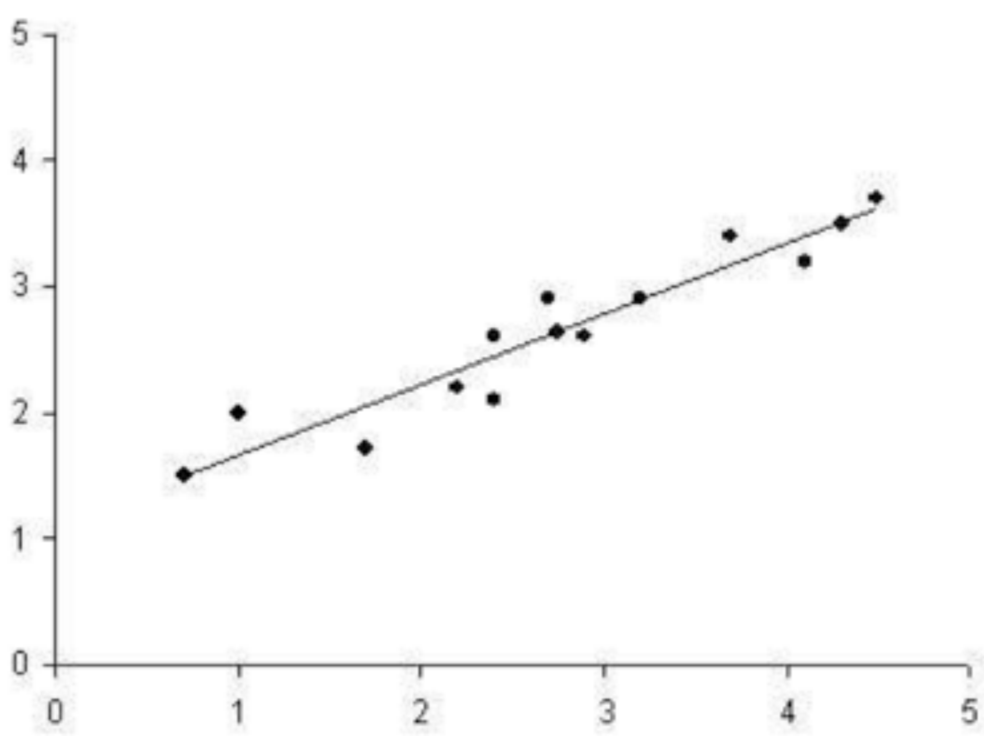
Condicionamiento

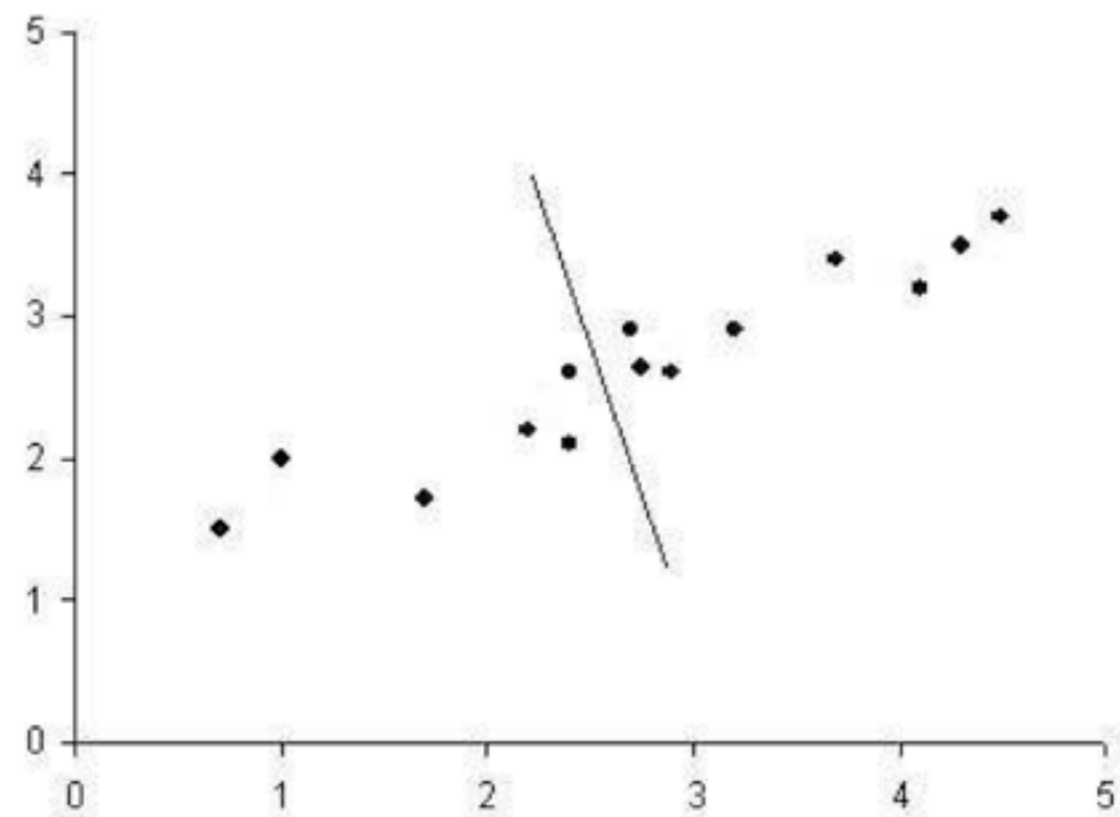
- Nótese que en este caso explícitamente sabemos qué es lo que está fallando, es decir, que tan singular es la matriz, mientras que si usamos eliminación Gaussiana o descomposición LU no tenemos la información.

Otra aplicación Reducción de dimensionalidad en Datos (1)

- En este ejemplo trabajaremos con algo que se llama SVD reducido.

- La idea es capturar la información relevante de un conjunto de datos y eliminar la que no nos sirve (a veces es ruido), veamos esto graficamente:



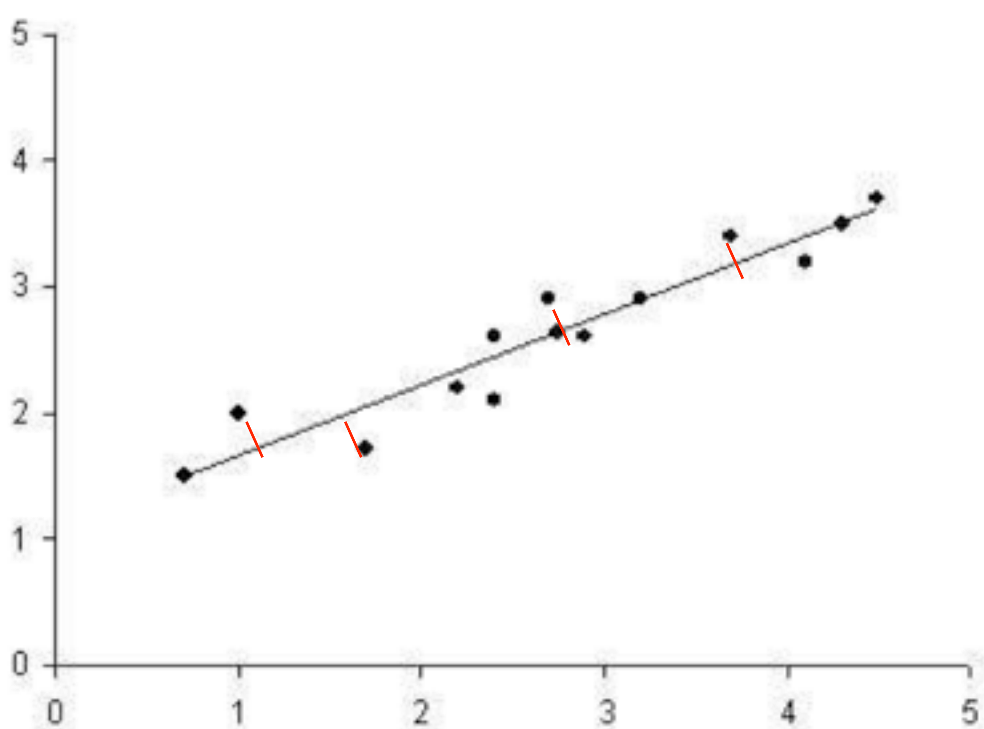


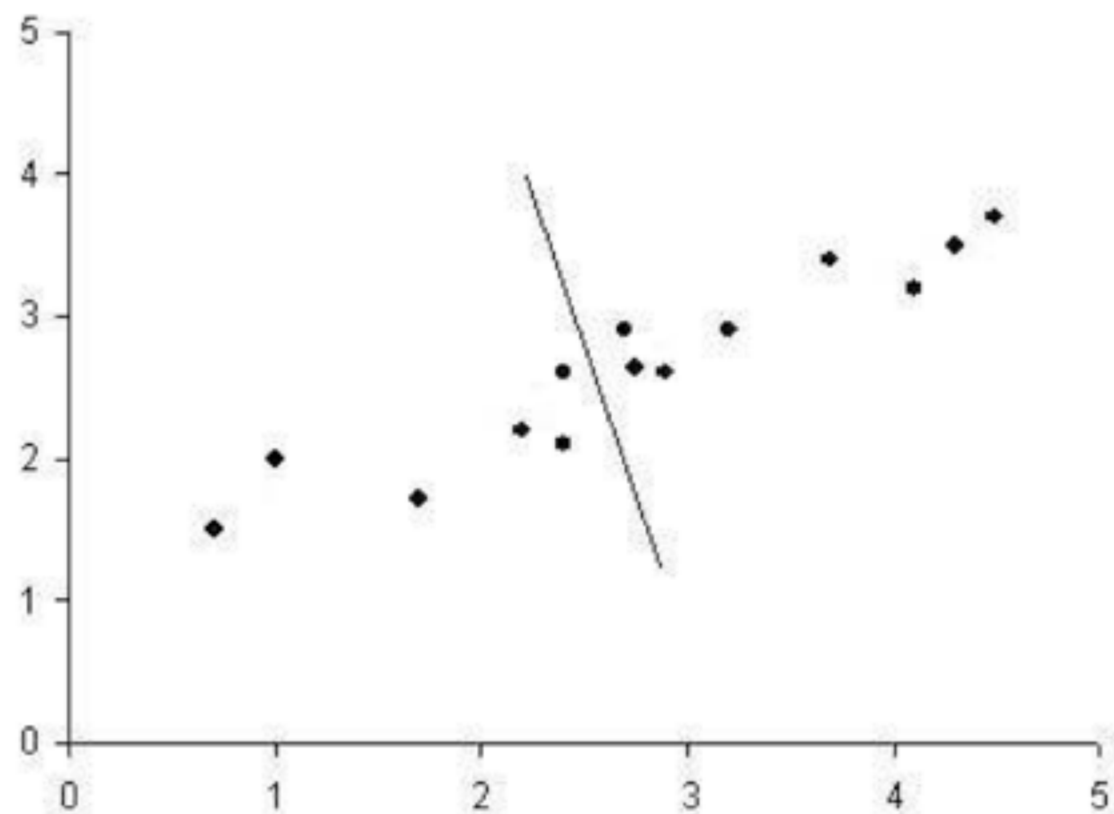
- Entonces, lo que queremos es explicar los datos en bajas dimensiones.

Otra aplicación Reducción de dimensionalidad en Datos (1)

- En este ejemplo trabajaremos con algo que se llama SVD reducido.

- La idea es capturar la información relevante de un conjunto de datos y eliminar la que no nos sirve (a veces es ruido), veamos esto graficamente:



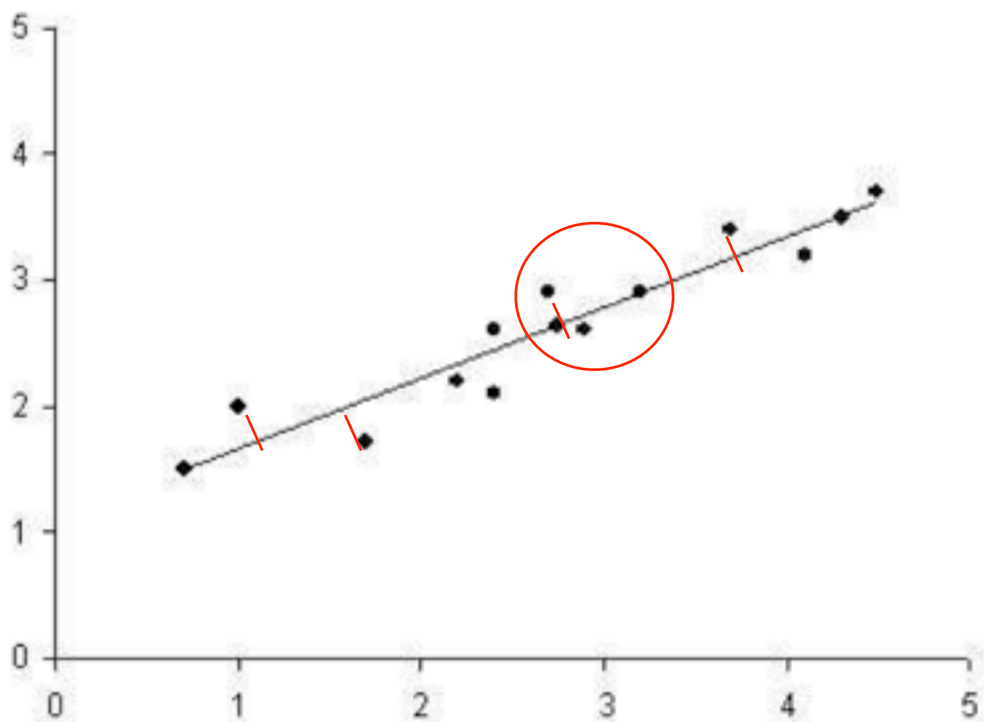


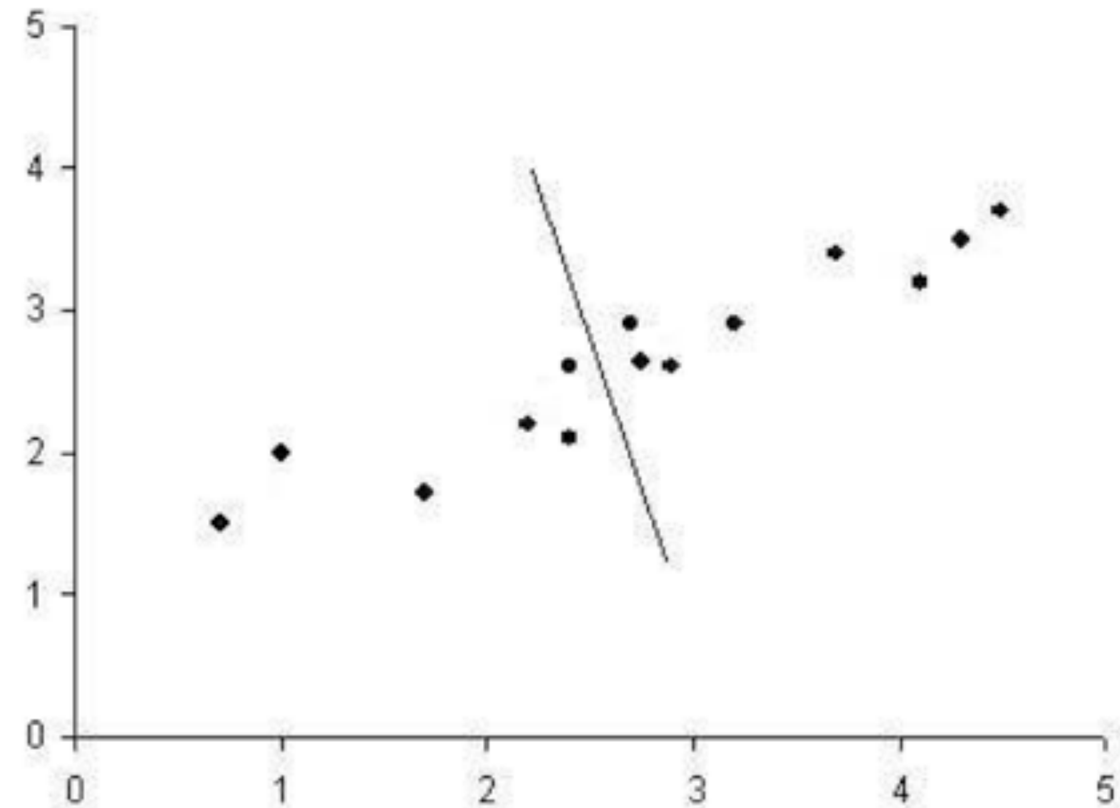
- Entonces, lo que queremos es explicar los datos en bajas dimensiones.

Otra aplicación Reducción de dimensionalidad en Datos (1)

- En este ejemplo trabajaremos con algo que se llama SVD reducido.

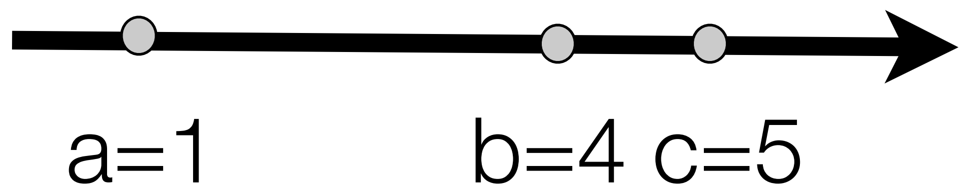
- La idea es capturar la información relevante de un conjunto de datos y eliminar la que no nos sirve (a veces es ruido), veamos esto graficamente:





- Entonces, lo que queremos es explicar los datos en bajas dimensiones.

Maldición de la dimensionalidad, experimento

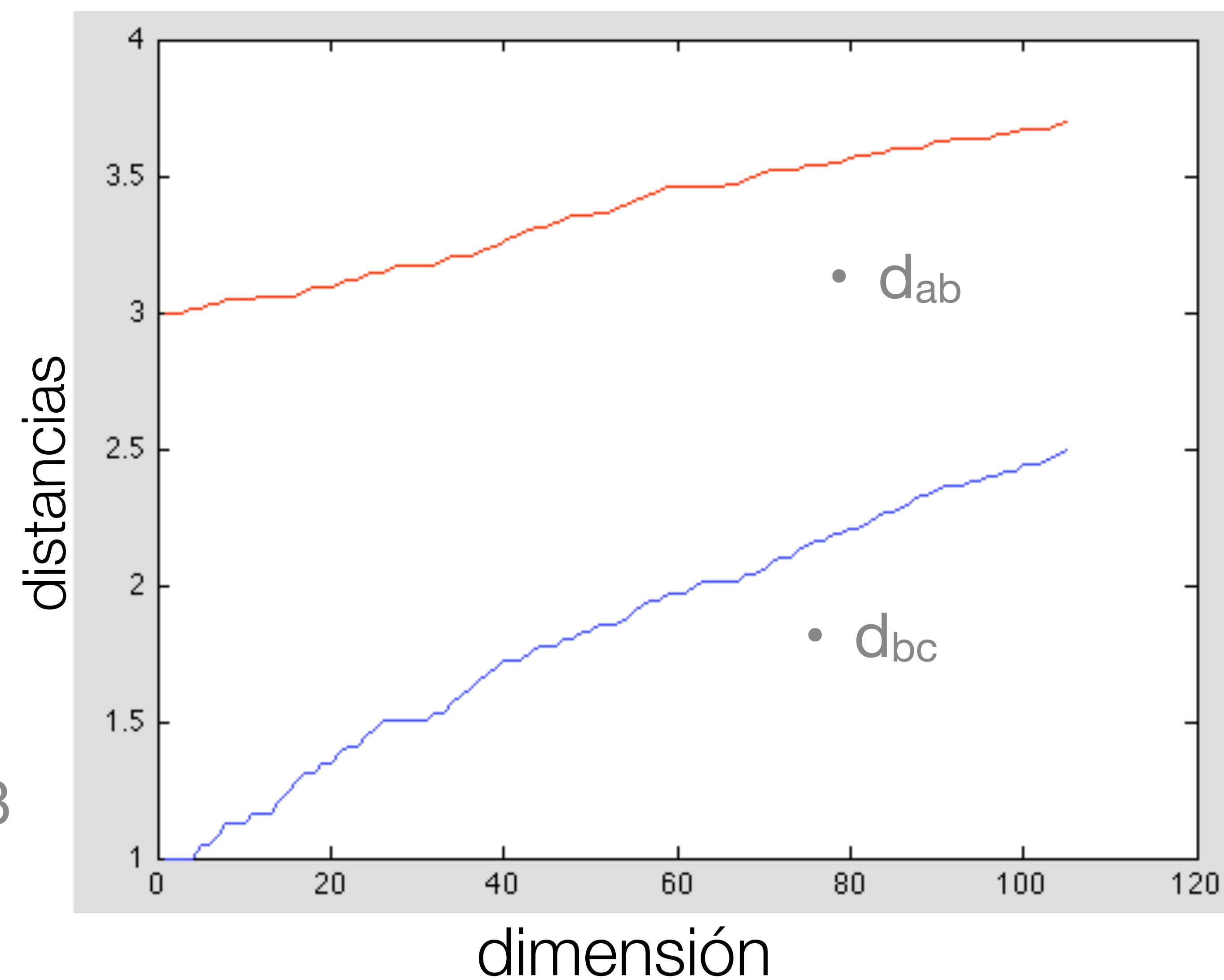


- En $\boldsymbol{R}^1$ $d_{ab} = 3$, $d_{bc} = 1$

- Cuando aumentamos de dimensión solo agregamos $\pm\epsilon$ en la nueva dimensión con signo aleatorio, de tal forma que los puntos a, b y c siguen muy cerca de 1, 4 y 5 en la recta $\boldsymbol{R}^1$ respectivamente.

- En R^{105} $d_{ab} = 3.698648$, $d_{bc} = 2.493993$

- Con $\epsilon = 0.15$



Otra aplicación Reducción de dimensionalidad en Datos (1)

- Veamos como se aplica esto a datos de un análisis de semántica llamado latente, la matriz tiene información de la ocurrencia de palabras en documentos de texto, entones es una matriz *palabras* x *documentos*

$$
\begin{array}{ccl}
 & \begin{array}{ccccc} \text{doc 1} & \text{doc 2} & \text{doc 3} & \text{doc 4} & \text{doc 5} \end{array} & \\
A = & \left[\begin{array}{ccccc} 2 & 0 & 8 & 6 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 1 & 7 \\ 5 & 0 & 7 & 4 & 0 \\ 7 & 0 & 8 & 5 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right] & \begin{array}{l} \text{doctor} \\ \text{car} \\ \text{nurse (enfermera)} \\ \text{hospital} \\ \text{wheel (rueda)} \end{array}
\end{array}
$$

- ¿Qué información tiene un renglón de la matriz?

- ¿ Qué información tiene una columna de la matriz?

Otra aplicación Reducción de dimensionalidad en Datos (1)

- Veamos como se aplica esto a datos de un análisis de semántica llamado latente, la matriz tiene información de la ocurrencia de palabras en documentos de texto, entones es una matriz *palabras* x *documentos*

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} \text{doc 1} & \text{doc 2} & \text{doc 3} & \text{doc 4} & \text{doc 5} \end{array} \\ A = & \begin{bmatrix} 2 & 0 & 8 & 6 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 1 & 7 \\ 5 & 0 & 7 & 4 & 0 \\ 7 & 0 & 8 & 5 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{doctor} \\ \text{car} \\ \text{nurse (enfermera)} \\ \text{hospital} \\ \text{wheel (rueda)} \end{array} \end{array}$$

- ¿Qué información tiene un renglón de la matriz?
  - Características de las palabras en R^5
- ¿ Qué información tiene una columna de la matriz?

Otra aplicación Reducción de dimensionalidad en Datos (1)

- Veamos como se aplica esto a datos de un análisis de semántica llamado latente, la matriz tiene información de la ocurrencia de palabras en documentos de texto, entones es una matriz *palabras* x *documentos*

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} \text{doc 1} & \text{doc 2} & \text{doc 3} & \text{doc 4} & \text{doc 5} \end{array} \\
A = & \begin{bmatrix} 2 & 0 & 8 & 6 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 1 & 7 \\ 5 & 0 & 7 & 4 & 0 \\ 7 & 0 & 8 & 5 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}
\begin{array}{l} \text{doctor} \\ \text{car} \\ \text{nurse (enfermera)} \\ \text{hospital} \\ \text{wheel (rueda)} \end{array}
\end{array}
$$

- ¿Qué información tiene un renglón de la matriz?
  - Características de las palabras en R^5
- ¿ Qué información tiene una columna de la matriz?
  - Características de los documentos en R^5

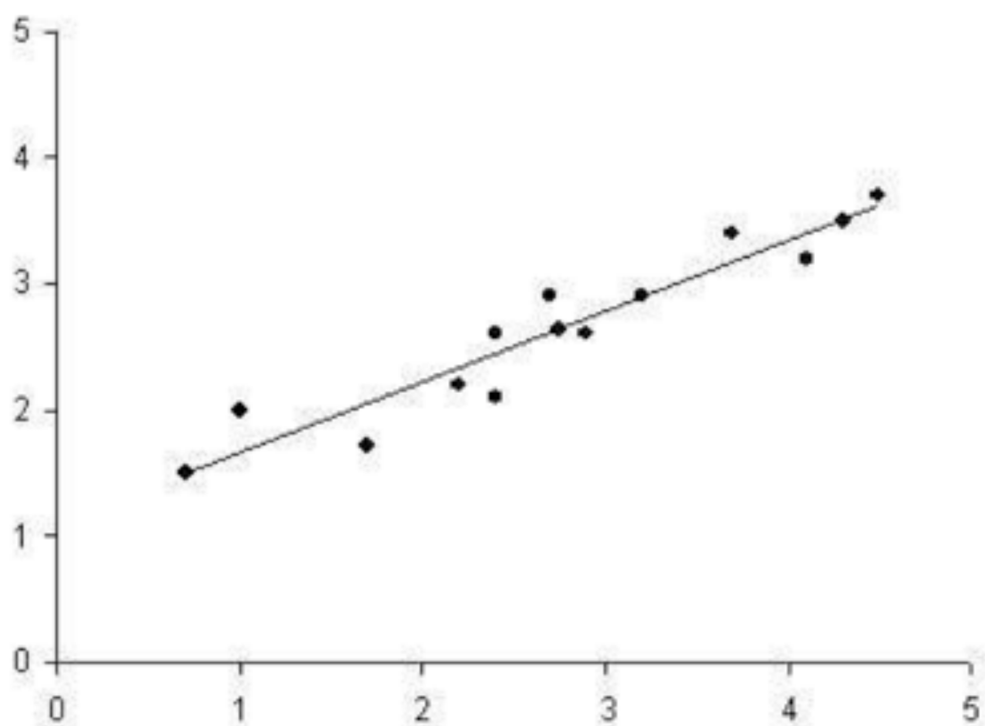
Otra aplicación Reducción de dimensionalidad en Datos (1)

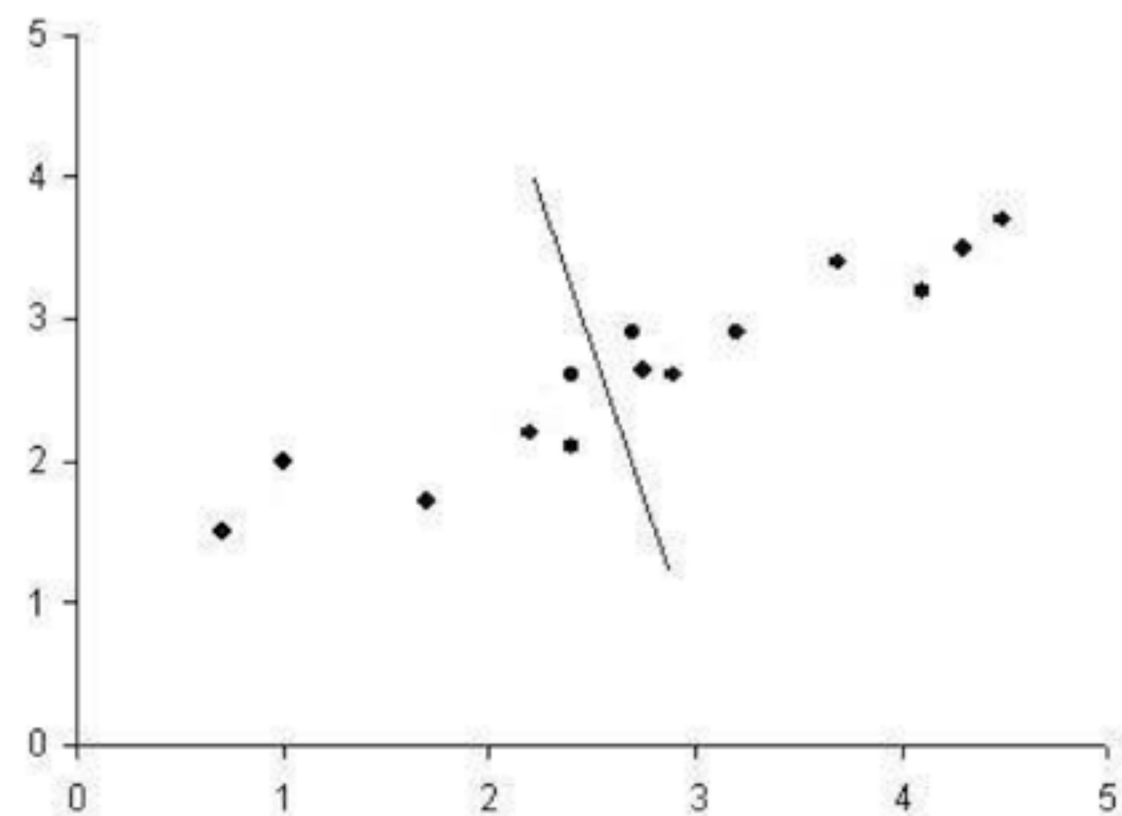
- De la descomposición de $A = USV^T$
- $$AA^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 8 & 6 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 1 & 7 \\ 5 & 0 & 7 & 4 & 0 \\ 7 & 0 & 8 & 5 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 7 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 10 \\ 8 & 0 & 7 & 8 & 0 \\ 6 & 1 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 104 & 8 & 90 & 108 & 0 \\ 8 & 87 & 9 & 12 & 109 \\ 90 & 9 & 90 & 111 & 0 \\ 108 & 12 & 111 & 138 & 0 \\ 0 & 109 & 0 & 0 & 149 \end{bmatrix}$$

  - tiene los productos puntos de los descriptores de palabras es decir sus vectores involucrados contienen características de palabras. Por otro lado, $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ contiene información de las características de los documentos.

Otra aplicación Reducción de dimensionalidad en Datos (1)

- Cuando calculamos ***U*** y ***V*** **,** es decir los eigenvectores de $\boldsymbol{AA}^T$ y de $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$, estamos obteniendo componentes ortogonales que describen los datos y la matriz ***S*** tiene los valores singulares que indican que componentes son más importantes ya que es donde hay mas variabilidad entre los datos.
-





Otra aplicación Reducción de dimensionalidad en Datos (1)

- Haciendo los cálculos para obtener ***U*** y ***V*** tenemos:

$$\boldsymbol{A} = \begin{matrix} 2 & 0 & 8 & 6 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 1 & 7 \\ 5 & 0 & 7 & 4 & 0 \\ 7 & 0 & 8 & 5 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 7 \end{matrix} =$$

$$\begin{matrix} -0.5423 & 0.0650 & 0.8216 & 0.1057 & -0.1245 \\ -0.1018 & -0.5935 & -0.1126 & 0.7881 & 0.0603 \\ -0.5250 & 0.0594 & -0.2130 & -0.1157 & 0.8137 \\ -0.6449 & 0.0704 & -0.5087 & -0.0599 & -0.5628 \\ -0.0645 & -0.7969 & 0.0900 & -0.5922 & -0.0441 \end{matrix} * \begin{matrix} 17.9184 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 15.1714 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3.5640 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.9842 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3496 \end{matrix} * \begin{matrix} -0.4646 & 0.0215 & -0.8685 & 0.0008 & -0.1713 \\ -0.0701 & -0.7600 & 0.0631 & -0.6013 & -0.2278 \\ -0.7351 & 0.0988 & 0.2840 & -0.2235 & 0.5650 \\ -0.4844 & 0.0254 & 0.3989 & 0.3327 & -0.7035 \\ -0.0650 & -0.6415 & -0.0443 & 0.6912 & 0.3233 \end{matrix}^{T}$$

- A esta reconstrucción se le llama SVD completo (full - SVD)

Otra aplicación Reducción de dimensionalidad en Datos (1)

- Por otro lado, ¿qué pasa si tomamos únicamente las primeras 4 dimensiones con más variabilidad?, las 4 más importantes:

$$
\boldsymbol{A} = \begin{matrix} 2 & 0 & 8 & 6 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 1 & 7 \\ 5 & 0 & 7 & 4 & 0 \\ 7 & 0 & 8 & 5 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 7 \end{matrix}
$$

$$
\begin{array}{|cccc|c}
\cline{1-4}
-0.5423 & 0.0650 & 0.8216 & 0.1057 & -0.1245 \\
-0.1018 & -0.5935 & -0.1126 & 0.7881 & 0.0603 \\
-0.5250 & 0.0594 & -0.2130 & -0.1157 & 0.8137 \\
-0.6449 & 0.0704 & -0.5087 & -0.0599 & -0.5628 \\
-0.0645 & -0.7969 & 0.0900 & -0.5922 & -0.0441 \\
\cline{1-4}
\end{array}
*
\begin{array}{|cccc|c}
\cline{1-4}
17.9184 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 15.1714 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 3.5640 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1.9842 & 0 \\
\cline{1-4}
0 & 0 & 0 & 0 & 0.3496
\end{array}
*
\begin{array}{|cccc|c}
\cline{1-4}
-0.4646 & 0.0215 & -0.8685 & 0.0008 & -0.1713 \\
-0.0701 & -0.7600 & 0.0631 & -0.6013 & -0.2278 \\
-0.7351 & 0.0988 & 0.2840 & -0.2235 & 0.5650 \\
-0.4844 & 0.0254 & 0.3989 & 0.3327 & -0.7035 \\
-0.0650 & -0.6415 & -0.0443 & 0.6912 & 0.3233 \\
\cline{1-4}
\end{array}^{T}
$$

$$
= \begin{matrix} 1.9925 & -0.0099 & 8.0246 & 5.9694 & 0.0141 \\ 1.0036 & 6.0048 & -0.0119 & 1.0148 & 6.9932 \\ 5.0487 & 0.0648 & 6.8393 & 4.2001 & -0.0920 \\ 6.9663 & -0.0448 & 8.1112 & 4.8616 & 0.0636 \\ -0.0026 & 9.9965 & 0.0087 & -0.0109 & 7.0050 \end{matrix} = \hat{\boldsymbol{A}}
$$

- A esta reconstrucción se le llama SVD reducido (reduced - SVD)

Otra aplicación Reducción de dimensionalidad en Datos (1)

- Por otro lado, que pasa si tomamos únicamente las primeras 3 dimensiones con mas variabilidad, las 3 más importantes:

$$
\boldsymbol{A} = \begin{matrix} 2 & 0 & 8 & 6 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 1 & 7 \\ 5 & 0 & 7 & 4 & 0 \\ 7 & 0 & 8 & 5 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 7 \end{matrix}
$$

$$
\begin{matrix} -0.5423 & 0.0650 & 0.8216 & 0.1057 & -0.1245 \\ -0.1018 & -0.5935 & -0.1126 & 0.7881 & 0.0603 \\ -0.5250 & 0.0594 & -0.2130 & -0.1157 & 0.8137 \\ -0.6449 & 0.0704 & -0.5087 & -0.0599 & -0.5628 \\ -0.0645 & -0.7969 & 0.0900 & -0.5922 & -0.0441 \end{matrix}
*
\begin{matrix} 17.9184 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 15.1714 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3.5640 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.9842 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3496 \end{matrix}
*
\begin{matrix} -0.4646 & 0.0215 & -0.8685 & 0.0008 & -0.1713 \\ -0.0701 & -0.7600 & 0.0631 & -0.6013 & -0.2278 \\ -0.7351 & 0.0988 & 0.2840 & -0.2235 & 0.5650 \\ -0.4844 & 0.0254 & 0.3989 & 0.3327 & -0.7035 \\ -0.0650 & -0.6415 & -0.0443 & 0.6912 & 0.3233 \end{matrix}^{T}
$$

$$
= \begin{matrix} 1.9924 & 0.1163 & 8.0715 & 5.8996 & -0.1310 \\ 1.0024 & 6.9452 & 0.3376 & 0.4946 & 5.9123 \\ 5.0489 & -0.0733 & 6.7880 & 4.2765 & 0.0668 \\ 6.9664 & -0.1163 & 8.0846 & 4.9011 & 0.1458 \\ -0.0017 & 9.2899 & -0.2539 & 0.3801 & 7.8172 \end{matrix} = \hat{\boldsymbol{A}}
$$

- A esta reconstrucción se le llama SVD [más :)] reducido (reduced - SVD)

Otra aplicación Reducción de dimensionalidad en Datos (1)

- Existen criterios basados en la varianza para determinar cuantas dimensiones nos quedamos. Por ahora nos quedaremos con 3.

- Dado que ***U*** tiene la información (ortonormal) de las palabras, si operamos las matrices reducidas (las delimitadas en los rectángulos rojos) $U_r S_r$ (es decir, pesamos los componentes ortogonales por su importancia dada por los valores singulares) obtenemos:

doctor	-9.7163	0.9861	2.9282
car	-1.8243	-9.0036	-0.4011
nurse (enfermera)	-9.4063	0.9009	-0.7590
hospital	-11.5550	1.0682	-1.8132
wheel (rueda)	-1.1556	-12.0905	0.3208

Otra aplicación Reducción de dimensionalidad en Datos (1)

- Por el otro lado, la matriz $\boldsymbol{V}$ tiene la información de los documentos, de tal forma que si operamos la matrices reducidas $\boldsymbol{V_r S_r}$ (las delimitadas en los rectángulos rojos) obtenemos:

doc 1	-8.3252	0.3263	-3.0954
doc 2	-1.2558	-11.5301	0.2248
doc 3	-13.1717	1.4989	1.0122
doc 4	-8.6795	0.3861	1.4216
doc 5	-1.1642	-9.7327	-0.1578

- Con lo cual tenemos descriptores de dimensionalidad menor ($\boldsymbol{R}^3$) que nos pueden servir para clasificar de manera más eficiente.

Nota General

- Nótese que dado que estamos aproximando la matriz con menos eigenvalores y vectores, en dado caso de que la matriz sea cercana a ser singular podemos eliminar todas las columnas asociadas a los valores singulares muy pequeños y tener aun así una buena aproximación de la matriz con una no singular.

- O quizá una mala representación pero que no es singular, todo depende de la aplicación.

Más aplicaciones

Solving homogeneous linear equations

A set of homogeneous linear equations can be written as $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ for a matrix $\mathbf{A}$ and vector $\mathbf{x}$. A typical situation is that $\mathbf{A}$ is known and a non-zero $\mathbf{x}$ is to be determined which satisfies the equation. Such an $\mathbf{x}$ belongs to $\mathbf{A}$'s null space and is sometimes called a (right) null vector of $\mathbf{A}$. $\mathbf{x}$ can be characterized as a right-singular vector corresponding to a singular value of $\mathbf{A}$ that is zero. This observation means that if $\mathbf{A}$ is a square matrix and has no vanishing singular value, the equation has no non-zero $\mathbf{x}$ as a solution. It also means that if there are several vanishing singular values, any linear combination of the corresponding right-singular vectors is a valid solution.

As a consequence, the rank equals the number of non-zero singular values which is the same as the number of non-zero diagonal elements in Σ.

Más aplicaciones

Solving homogeneous linear equations

A set of homogeneous linear equations can be written as $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ for a matrix $\mathbf{A}$ and vector $\mathbf{x}$. A typical situation is that $\mathbf{A}$ is known and a non-zero $\mathbf{x}$ is to be determined which satisfies the equation. Such an $\mathbf{x}$ belongs to $\mathbf{A}$'s null space and is sometimes called a (right) null vector of $\mathbf{A}$. $\mathbf{x}$ can be characterized as a right-singular vector corresponding to a singular value of $\mathbf{A}$ that is zero. This observation means that if $\mathbf{A}$ is a square matrix and has no vanishing singular value, the equation has no non-zero $\mathbf{x}$ as a solution. It also means that if there are several vanishing singular values, any linear combination of the corresponding right-singular vectors is a valid solution.

As a consequence, the rank equals the number of non-zero singular values which is the same as the number of non-zero diagonal elements in Σ.

Total least squares minimization

A total least squares problem refers to determining the vector $\mathbf{x}$ which minimizes the 2-norm of a vector $\mathbf{A}\,\mathbf{x}$ under the constraint $\|\mathbf{x}\| = 1$. The solution turns out to be the right-singular vector of $\mathbf{A}$ corresponding to the smallest singular value.

Más aplicaciones

Nearest orthogonal matrix

It is possible to use the SVD of A to determine the orthogonal matrix R closest to A. The closeness of fit is measured by the Frobenius norm of $R - A$. The solution is the product UV^*.[3] This intuitively makes sense because an orthogonal matrix would have the decomposition UIV^* where I is the identity matrix, so that if $A = U\Sigma V^*$ then the product $A = UV^*$ amounts to replacing the singular values with ones.