Interpolación. Método de polinomios de Lagrange

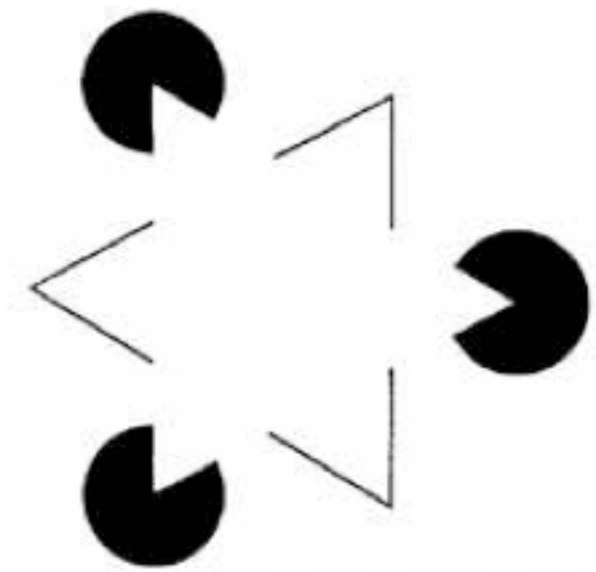
MAT-251

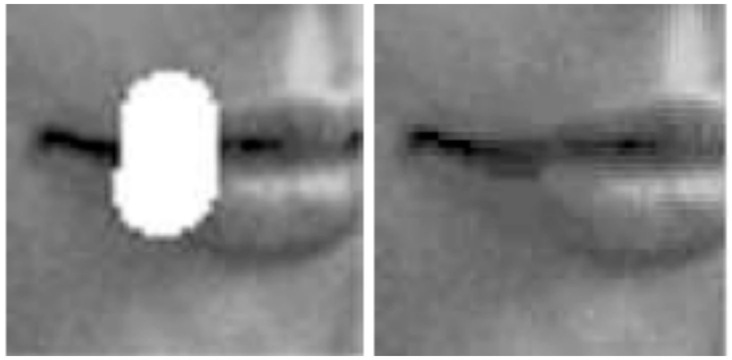
Dr. Alonso Ramírez Manzanares
CIMAT A.C.
e-mail: alram@cimat.mx
web: http://www.cimat.mx/~alram/met_num/

Dr. Salvador Botello
CIMAT A.C.
e-mail: botello@cimat.mx

Problemas generales

- En la visión computacional parece ser algo inherente



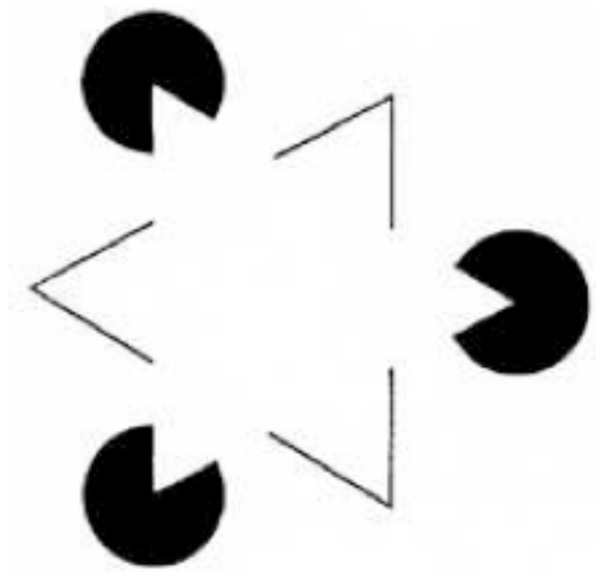


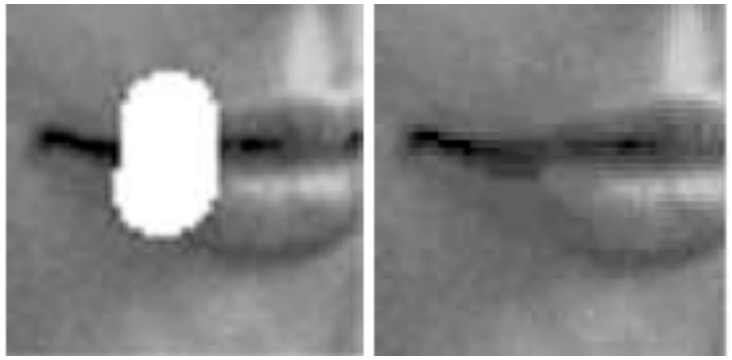
inpainting

- Estimar datos para años intermedios donde no se tiene información, o bien predecir la tendencia en años pasados/futuros cerca de intervalo de datos

Problemas generales

- En la visión computacional parece ser algo inherente





inpainting

- Estimar datos para años intermedios donde no se tiene información, o bien predecir la tendencia en años pasados/futuros cerca de intervalo de datos

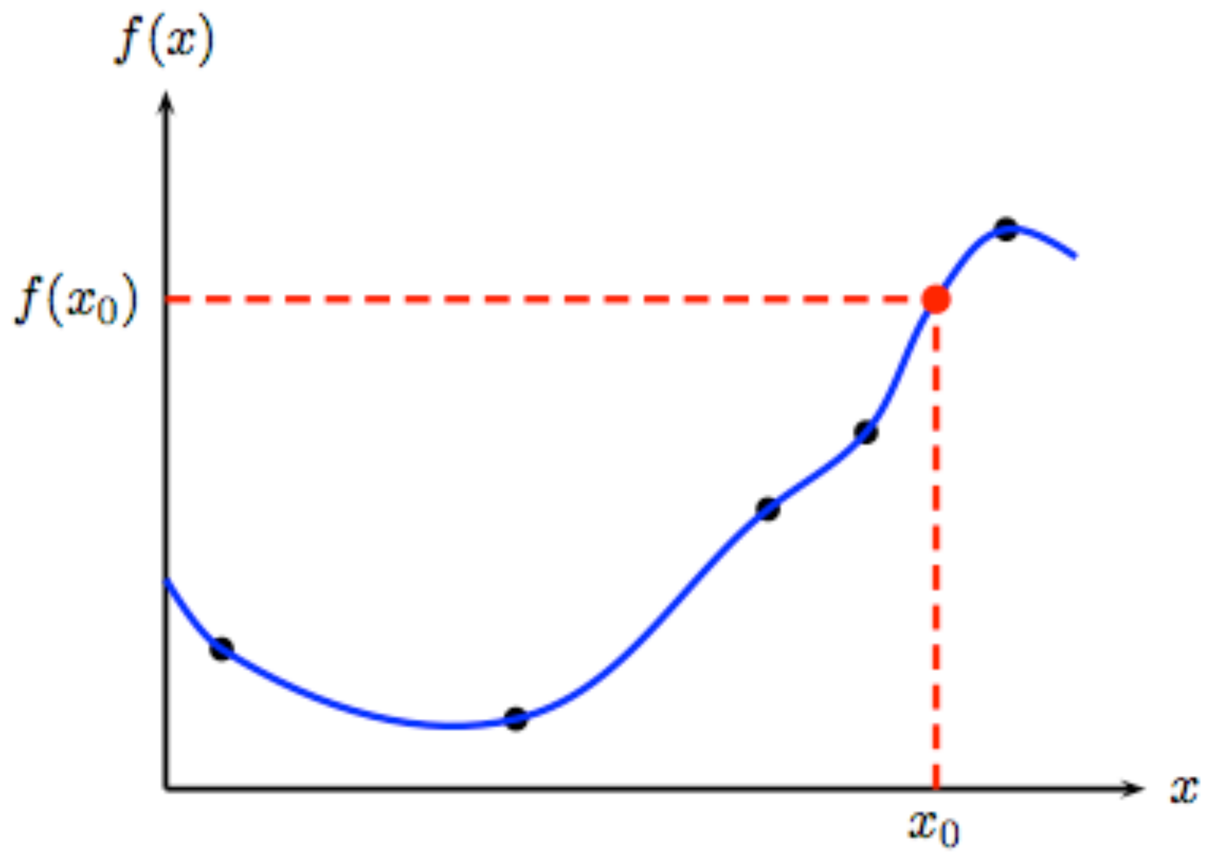
La población mundial para los años que se indicaran era:

Año	1965	1975	1985	1990
Población (millones)	3.340	4.080	4.850	5.290

Definición del problema de interpolación

Dada una tabla de valores (x_i, f_i) se desea estimar $f(x)$ para valores de x que no se encuentran en la tabla.

x_i	f_i
0.4	1.00
2.5	0.50
4.3	2.00
5.0	2.55
6.0	4.00



- Es decir, estaremos trabajando en este caso con funciones que van de $\Re \rightarrow \Re$.

Interpolación por aproximación polinomial

Interpolación por aproximación polinomial

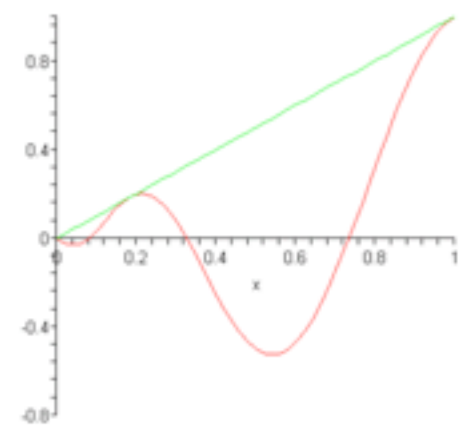
- Teorema de aproximación de Weierstrass (Teorema de análisis real): Suponga que la función f está definida y es continua en el intervalo $[a,b]$. Para cada $\varepsilon > 0$, existe un polinomio $P(x)$ tal que $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$, para toda x en $[a,b]$.

Interpolación por aproximación polinomial

- Teorema de aproximación de Weierstrass (Teorema de análisis real): Suponga que la función f está definida y es continua en el intervalo $[a,b]$. Para cada $\varepsilon > 0$, existe un polinomio $P(x)$ tal que $| f(x) - P(x) | < \varepsilon$, para toda x en $[a,b]$.
    - En la demostración se ve que para unos polinomios (de Bernstein) cuando el grado del polinomio n tiende a infinito la diferencia $| f(x) - P_n(x) |$ tiende a cero.

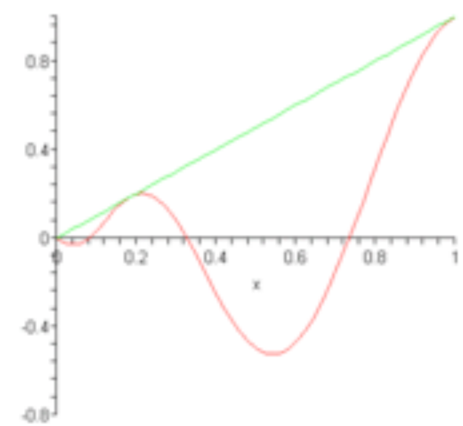
Interpolación por aproximación polinomial

- Teorema de aproximación de Weierstrass (Teorema de análisis real): Suponga que la función f está definida y es continua en el intervalo $[a,b]$. Para cada $\varepsilon > 0$, existe un polinomio $P(x)$ tal que $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$, para toda x en $[a,b]$.
    - En la demostración se ve que para unos polinomios (de Bernstein) cuando el grado del polinomio n tiende a infinito la diferencia $|f(x) - P_n(x)|$ tiende a cero.



Interpolación por aproximación polinomial

- Teorema de aproximación de Weierstrass (Teorema de análisis real): Suponga que la función f está definida y es continua en el intervalo $[a,b]$. Para cada $\varepsilon > 0$, existe un polinomio $P(x)$ tal que $| f(x) - P(x) | < \varepsilon$, para toda x en $[a,b]$.
  - En la demostración se ve que para unos polinomios (de Bernstein) cuando el grado del polinomio n tiende a infinito la diferencia $| f(x) - P_n(x) |$ tiende a cero.



- Ventajas de usar polinomios:
  - Derivadas e integrales están definidas de manera trivial y también son polinomios.
  - Computacionalmente, operaciones entre ellos, derivas e integrales son triviales de implementar.

Polinomios de aproximaciones de Taylor

Polinomios de aproximaciones de Taylor

- Uno pensaría que las aproximaciones polinomiales de Taylor serían la herramienta básica de aproximación en un intervalo, pero no lo son, ya que son poderosos para aproximaciones locales pero no para aproximaciones en intervalos grandes.

Polinomios de aproximaciones de Taylor

- Uno pensaría que las aproximaciones polinomiales de Taylor serían la herramienta básica de aproximación en un intervalo, pero no lo son, ya que son poderosos para aproximaciones locales pero no para aproximaciones en intervalos grandes.
- Ejemplo, veamos la aproximación de series de Taylor para $f(x) = e^x$, alrededor del punto a = 0.

Polinomios de aproximaciones de Taylor

- Uno pensaría que las aproximaciones polinomiales de Taylor serían la herramienta básica de aproximación en un intervalo, pero no lo son, ya que son poderosos para aproximaciones locales pero no para aproximaciones en intervalos grandes.
- Ejemplo, veamos la aproximación de series de Taylor para *f(x)* = e^x , alrededor del punto a = 0.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

Polinomios de aproximaciones de Taylor

- Uno pensaría que las aproximaciones polinomiales de Taylor serían la herramienta básica de aproximación en un intervalo, pero no lo son, ya que son poderosos para aproximaciones locales pero no para aproximaciones en intervalos grandes.

- Ejemplo, veamos la aproximación de series de Taylor para $f(x) = e^x$, alrededor del punto a = 0.

$$
\begin{aligned}
P_0(x) &= 1, \quad P_1(x) = 1 + x, \quad P_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}, \quad P_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}, \\
P_4(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}, \quad \text{and} \quad P_5(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120}.
\end{aligned}
$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

Polinomios de aproximaciones de Taylor

- Uno pensaría que las aproximaciones polinomiales de Taylor serían la herramienta básica de aproximación en un intervalo, pero no lo son, ya que son poderosos para aproximaciones locales pero no para aproximaciones en intervalos grandes.
- Ejemplo, veamos la aproximación de series de Taylor para *f(x)* = e^x , alrededor del punto a = 0.

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, \quad P_1(x) = 1 + x, \quad P_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}, \quad P_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}, \\ P_4(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}, \quad \text{and} \quad P_5(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120}. \end{aligned}$$

Esta aproximación de *f(x)* es mala

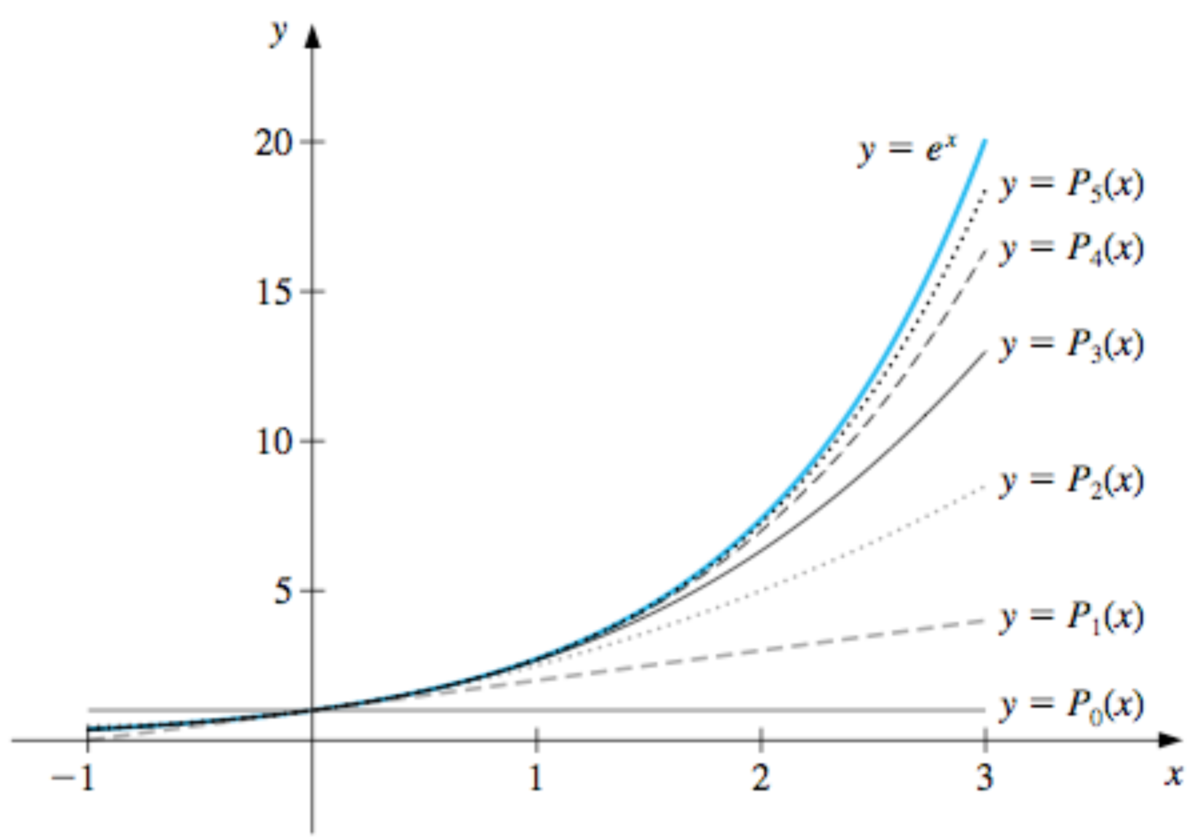
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

Incluso para esta función que se ve sencilla alrededor de 0.

Polinomios de aproximaciones de Taylor

- Uno pensaría que las aproximaciones polinomiales de Taylor serían la herramienta básica de aproximación en un intervalo, pero no lo son, ya que son poderosos para aproximaciones locales pero no para aproximaciones en intervalos grandes.
- Ejemplo, veamos la aproximación de series de Taylor para *f(x)* = e^x , alrededor del punto a = 0.

$$
\begin{aligned}
P_0(x) &= 1, \quad P_1(x) = 1 + x, \quad P_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}, \quad P_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}, \\
P_4(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}, \quad \text{and} \quad P_5(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120}.
\end{aligned}
$$



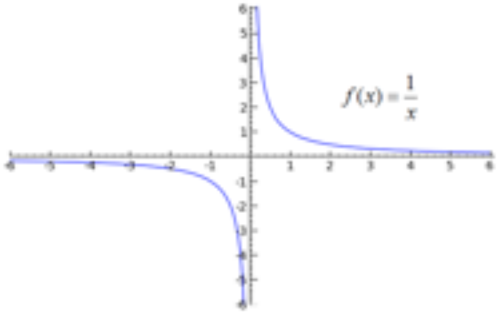
Esta aproximación de *f(x)* es mala

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

Incluso para esta función que se ve sencilla alrededor de 0.

Polinomios de aproximaciones de Taylor

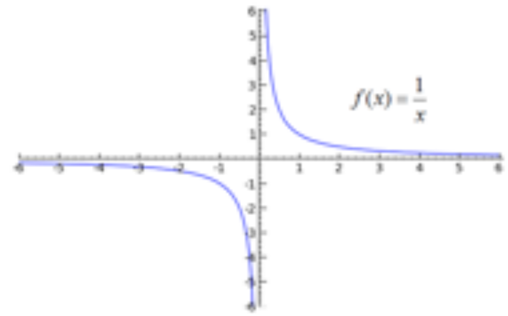
- Aunque parezca que si aumentamos el grado del polinomio de Taylor vamos a mejorar las aproximación esto no siempre es cierto:



  - Aproximar *f(3)* para *f(x) = 1/x*, alrededor de $x_0 = 1$.
  - Tenemos que
    - y observamos
  - Por lo tanto el polinomio de Taylor es :
  - Lo que nos lleva a las aproximaciones erróneas ya que solo podemos confiar en las aproximaciones cercanas a $x_0=1$.

Polinomios de aproximaciones de Taylor

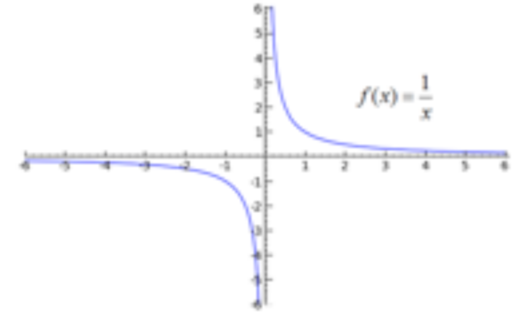
- Aunque parezca que si aumentamos el grado del polinomio de Taylor vamos a mejorar las aproximación esto no siempre es cierto:



  - Aproximar *f(3)* para *f(x) = 1/x*, alrededor de $x_0 = 1$.
  - Tenemos que $f(x) = x^{-1}, f'(x) = -x^{-2}, f''(x) = (-1)^2 2 \cdot x^{-3},$
    - y observamos
  - Por lo tanto el polinomio de Taylor es :
  - Lo que nos lleva a las aproximaciones erróneas ya que solo podemos confiar en las aproximaciones cercanas a x_0=1.

Polinomios de aproximaciones de Taylor

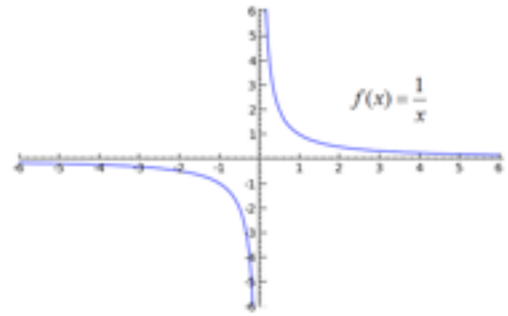
- Aunque parezca que si aumentamos el grado del polinomio de Taylor vamos a mejorar las aproximación esto no siempre es cierto:



  - Aproximar *f(3)* para *f(x) = 1/x*, alrededor de $x_0 = 1$.
  - Tenemos que $$f(x) = x^{-1}, f'(x) = -x^{-2}, f''(x) = (-1)^2 2 \cdot x^{-3},$$
    - y observamos $$f^{(n)}(x) = (-1)^n n! x^{-n-1},$$
  - Por lo tanto el polinomio de Taylor es :
  - Lo que nos lleva a las aproximaciones erróneas ya que solo podemos confiar en las aproximaciones cercanas a $x_0=1$.

Polinomios de aproximaciones de Taylor

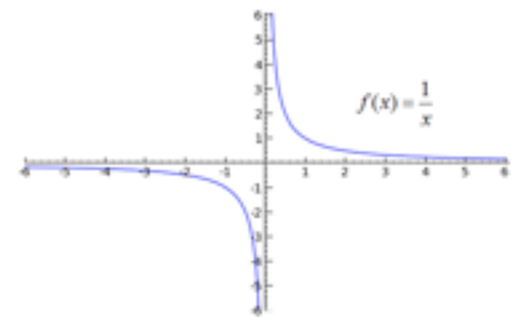
- Aunque parezca que si aumentamos el grado del polinomio de Taylor vamos a mejorar las aproximación esto no siempre es cierto:



  - Aproximar *f(3)* para *f(x) = 1/x*, alrededor de $x_0 = 1$.
  - Tenemos que $f(x) = x^{-1}, f'(x) = -x^{-2}, f''(x) = (-1)^2 2 \cdot x^{-3},$
    - y observamos $$f^{(n)}(x) = (-1)^n n! x^{-n-1},$$
  - Por lo tanto el polinomio de Taylor es $$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (x-1)^k.$$
  - Lo que nos lleva a las aproximaciones erróneas ya que solo podemos confiar en las aproximaciones cercanas a $x_0=1$.

Polinomios de aproximaciones de Taylor

- Aunque parezca que si aumentamos el grado del polinomio de Taylor vamos a mejorar las aproximación esto no siempre es cierto:

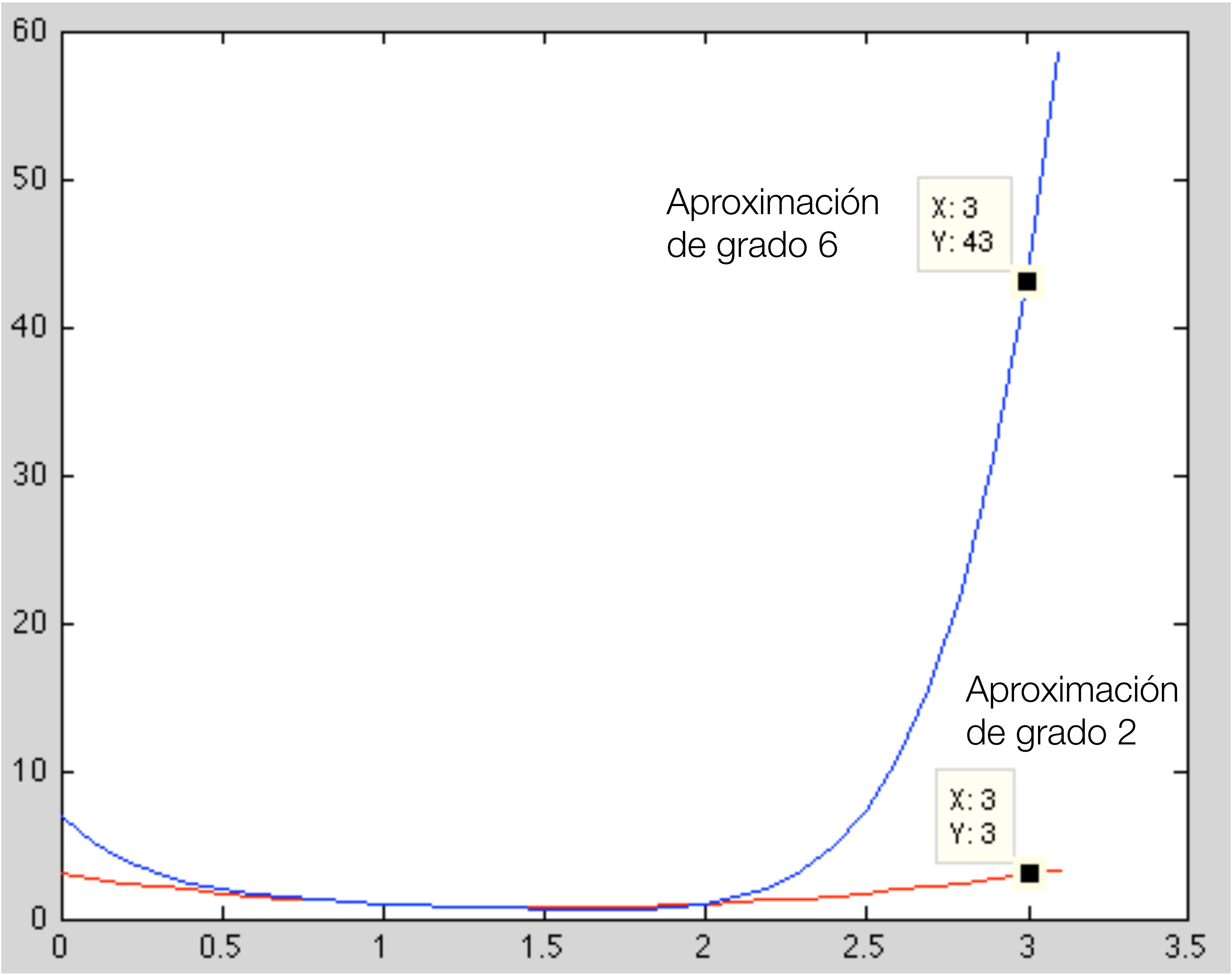


  - Aproximar *f(3)* para *f(x) = 1/x*, alrededor de $x_0 = 1$.
  - Tenemos que $f(x) = x^{-1}, f'(x) = -x^{-2}, f''(x) = (-1)^2 2 \cdot x^{-3},$
    - y observamos $$f^{(n)}(x) = (-1)^n n! x^{-n-1},$$
  - Por lo tanto el polinomio de Taylor es $$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k(x-1)^k.$$
  - Lo que nos lleva a las aproximaciones erróneas ya que solo podemos confiar en las aproximaciones cercanas a $x_0=1$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$P_n(3)$	1	-1	3	-5	11	-21	43	-85

Polinomios de aproximaciones de Taylor

- ¿Cómo se ve esta aproximación local?



Polinomios de Lagrange para interpolación

- Se definen dados una serie de puntos por donde queremos que el polinomio no tenga diferencia (error) con respecto a las observaciones.
- Ejemplo, dados 2 puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1) el polinomio de primer grado que pasa por estos puntos, es un aproximador de la función en el rango de las abscisas definido por los 2 puntos.
- Definamos las funciones
- Implicando que:

Polinomios de Lagrange para interpolación

- Se definen dados una serie de puntos por donde queremos que el polinomio no tenga diferencia (error) con respecto a las observaciones.

- Ejemplo, dados 2 puntos (x_0,y_0) y (x_1,y_1) el polinomio de primer grado que pasa por estos puntos, es un aproximador de la función en el rango de las abscisas definido por los 2 puntos.

- Definamos las funciones $$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \quad \text{and} \quad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0},$$

- Implicando que:

Polinomios de Lagrange para interpolación

- Se definen dados una serie de puntos por donde queremos que el polinomio no tenga diferencia (error) con respecto a las observaciones.

- Ejemplo, dados 2 puntos (x_0,y_0) y (x_1,y_1) el polinomio de primer grado que pasa por estos puntos, es un aproximador de la función en el rango de las abscisas definido por los 2 puntos.

- Definamos las funciones $$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \quad \text{and} \quad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0},$$

- Implicando que:

$$L_0(x_0) = \frac{x_0 - x_1}{x_0 - x_1} = 1, \quad L_0(x_1) = \frac{x_1 - x_1}{x_0 - x_1} = 0, \quad L_1(x_0) = 0, \quad \text{and} \quad L_1(x_1) = 1.$$

Polinomios de Lagrange para interpolación

- Usando las funciones anteriores, definimos entonces el polinomio de aproximación de 1er orden como

$$P(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1).$$

- Este polinomio lineal cumple las propiedades que requerimos

Polinomios de Lagrange para interpolación

- Usando las funciones anteriores, definimos entonces el polinomio de aproximación de 1er orden como

$$P(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}f(x_1).$$

- Este polinomio lineal cumple las propiedades que requerimos

$$P(x_0) = 1 \cdot f(x_0) + 0 \cdot f(x_1) = f(x_0) = y_0$$

$$P(x_1) = 0 \cdot f(x_0) + 1 \cdot f(x_1) = f(x_1) = y_1.$$

Polinomios de Lagrange para interpolación

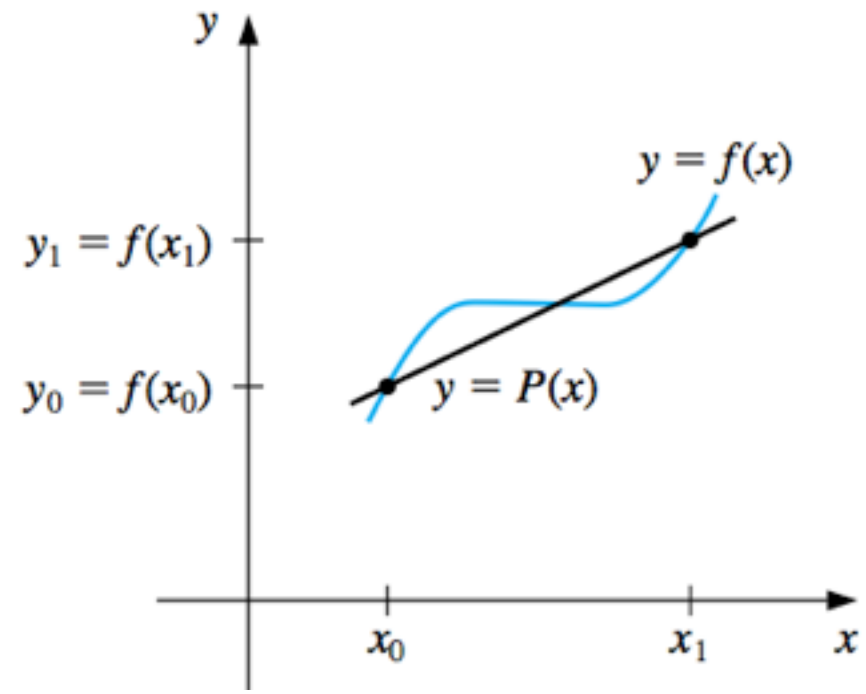
- Usando las funciones anteriores, definimos entonces el polinomio de aproximación de 1er orden como

$$P(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}f(x_1).$$

- Este polinomio lineal cumple las propiedades que requerimos

$$P(x_0) = 1 \cdot f(x_0) + 0 \cdot f(x_1) = f(x_0) = y_0$$

$$P(x_1) = 0 \cdot f(x_0) + 1 \cdot f(x_1) = f(x_1) = y_1.$$



Polinomios de Lagrange para interpolación

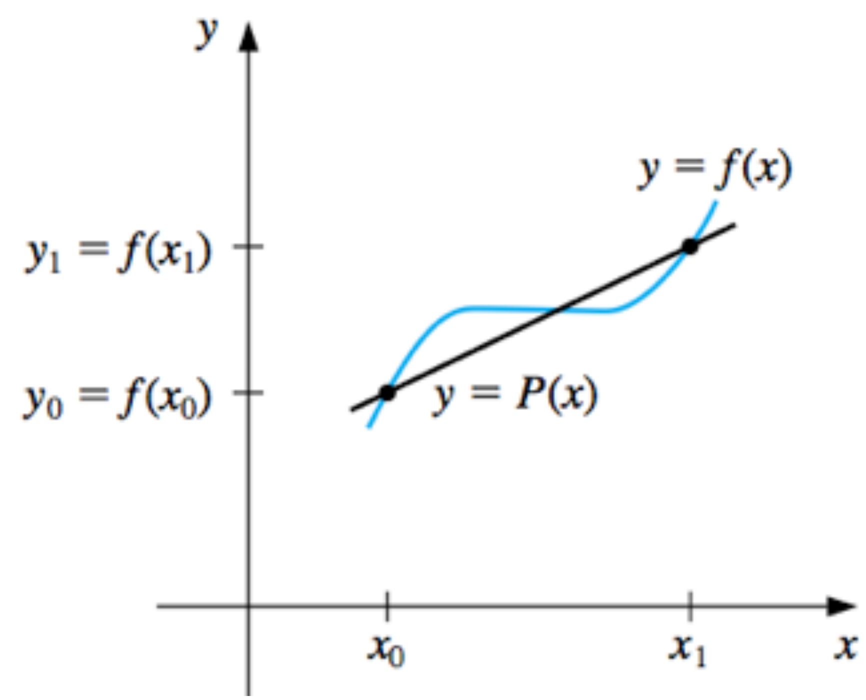
- Usando las funciones anteriores, definimos entonces el polinomio de aproximación de 1er orden como

$$P(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}f(x_1).$$

- Este polinomio lineal cumple las propiedades que requerimos

$$P(x_0) = 1 \cdot f(x_0) + 0 \cdot f(x_1) = f(x_0) = y_0$$

$$P(x_1) = 0 \cdot f(x_0) + 1 \cdot f(x_1) = f(x_1) = y_1.$$



¿Qué pasa si lo evaluamos en $P(\ (x_0+x_1)/2\ )$?

Polinomios de Lagrange para interpolación

- Teorema: De manera general, para construir el polinomio de Lagrange de grado *n* que pasa por *n+1* puntos $(x_0, f(x_0)),\ (x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n)).$

- Construimos un polinomio de grado ***n*** para cada $k=0,1,\ldots,n$, el cual denotaremos como $L_{n,k}(x)$ de tal forma que $L_{n,k}(x_i)=0$ cuando $i \neq k$ y $L_{n,k}(x_k)=1$.

Polinomios de Lagrange para interpolación

- Teorema: De manera general, para construir el polinomio de Lagrange de grado *n* que pasa por *n+1* puntos $(x_0, f(x_0)),\ (x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n)).$

- Construimos un polinomio de grado ***n*** para cada $k=0,1,\ldots,n$, el cual denotaremos como $L_{n,k}(x)$ de tal forma que $L_{n,k}(x_i)=0$ cuando $i \neq k$ y $L_{n,k}(x_k)=1$.

$$L_{n,k}(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

Polinomios de Lagrange para interpolación

- Teorema: De manera general, para construir el polinomio de Lagrange de grado *n* que pasa por *n+1* puntos $(x_0, f(x_0)),\ (x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n)).$
- Construimos un polinomio de grado ***n*** para cada $k=0,1,\ldots,n$, el cual denotaremos como $L_{n,k}(x)$ de tal forma que $L_{n,k}(x_i)=0$ cuando $i \neq k$ y $L_{n,k}(x_k)=1$.

$$L_{n,k}(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

Polinomios de Lagrange para interpolación

- Teorema: De manera general, para construir el polinomio de Lagrange de grado *n* que pasa por *n+1* puntos $(x_0, f(x_0)),\ (x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n)).$
- Construimos un polinomio de grado ***n*** para cada $k=0,1,\ldots,n$, el cual denotaremos como $L_{n,k}(x)$ de tal forma que $L_{n,k}(x_i)=0$ cuando $i \neq k$ y $L_{n,k}(x_k)=1$.

Es cero para todo x_i con $i \neq k$

$$L_{n,k}(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

Polinomios de Lagrange para interpolación

- Teorema: De manera general, para construir el polinomio de Lagrange de grado *n* que pasa por *n+1* puntos $(x_0, f(x_0)),\ (x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n)).$
- Construimos un polinomio de grado ***n*** para cada $k=0,1,\ldots,n$, el cual denotaremos como $L_{n,k}(x)$ de tal forma que $L_{n,k}(x_i)=0$ cuando $i \neq k$ y $L_{n,k}(x_k)=1$.

Es cero para todo x_i con $i \neq k$

$$L_{n,k}(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

Polinomios de Lagrange para interpolación

- Teorema: De manera general, para construir el polinomio de Lagrange de grado *n* que pasa por *n+1* puntos $(x_0, f(x_0)),\ (x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n)).$

- Construimos un polinomio de grado ***n*** para cada $k=0,1,\ldots,n$, el cual denotaremos como $L_{n,k}(x)$ de tal forma que $L_{n,k}(x_i)=0$ cuando $i \neq k$ y $L_{n,k}(x_k)=1$.

Es cero para todo x_i con $i \neq k$

$$L_{n,k}(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

Normaliza a 1 cuando es evaluado en x_k

Polinomios de Lagrange para interpolación

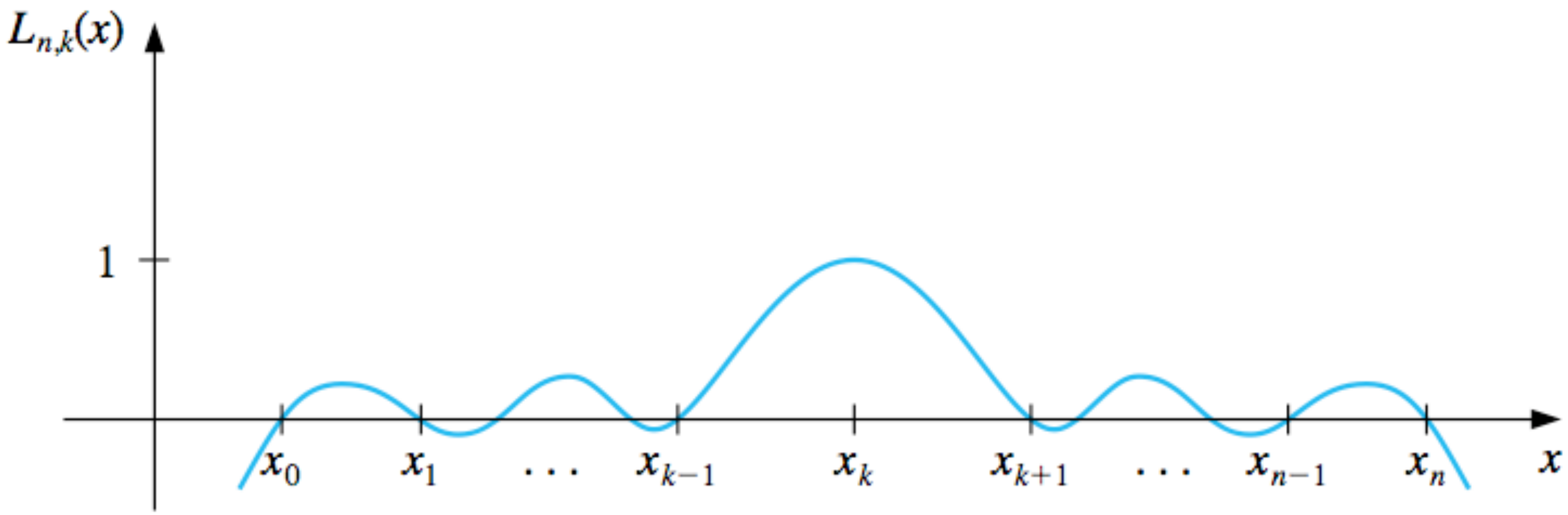
- Cómo se ve la “influencia” de este polinomio

$$L_{n,k}(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}.$$

Polinomios de Lagrange para interpolación

- Cómo se ve la “influencia” de este polinomio

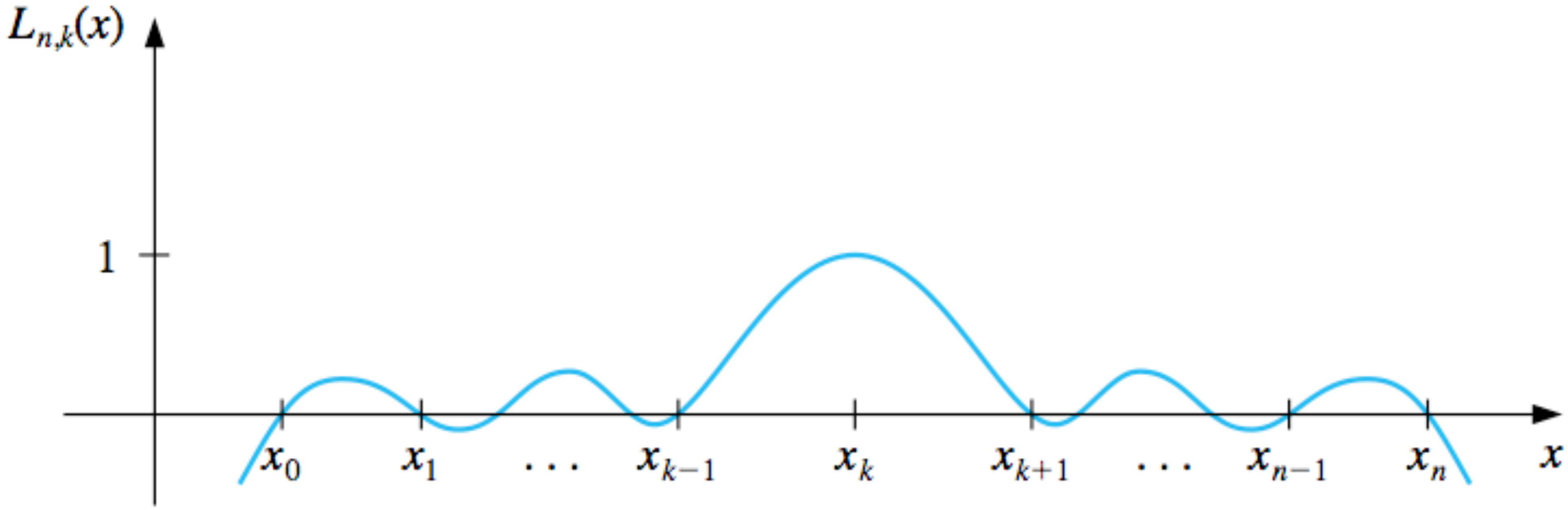
$$L_{n,k}(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}.$$

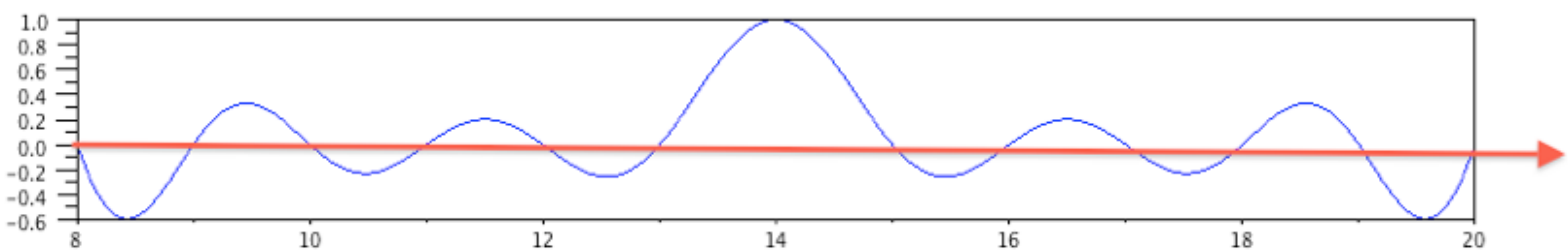


Polinomios de Lagrange para interpolación

- Cómo se ve la "influencia" de este polinomio

$$L_{n,k}(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}.$$

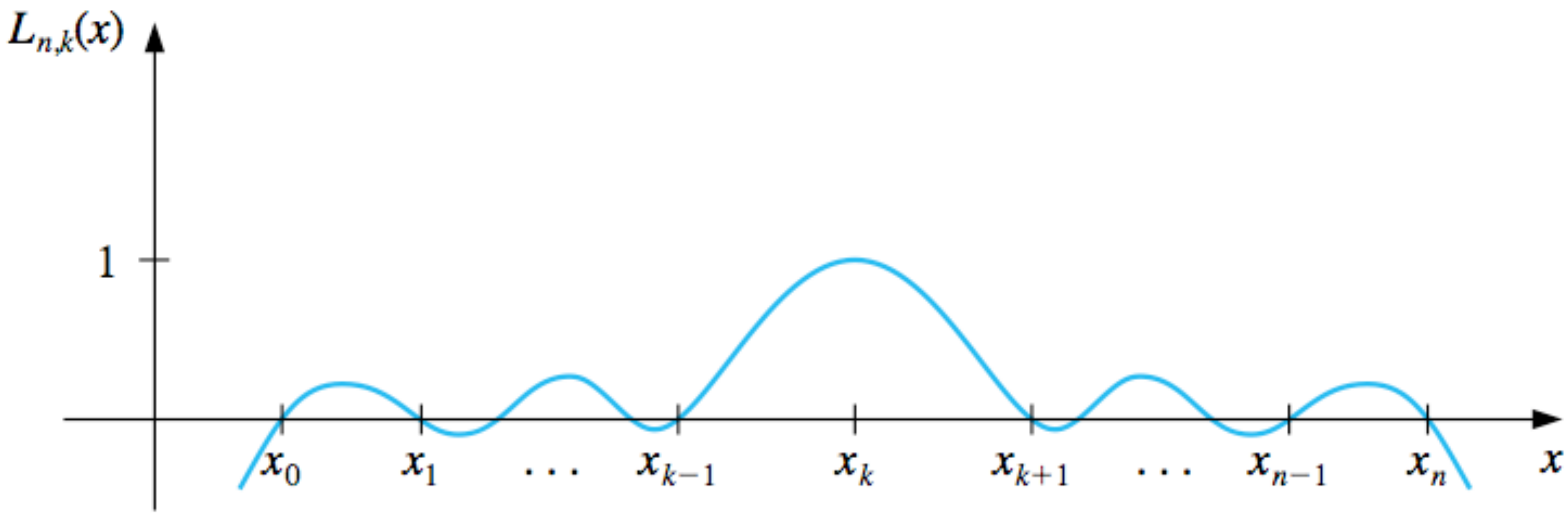


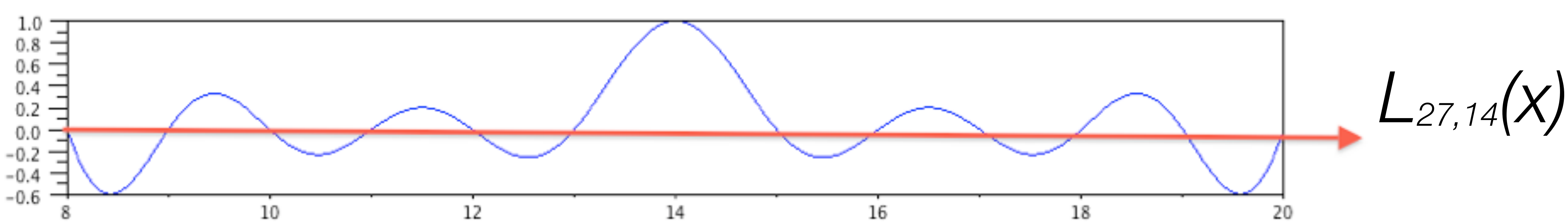


Polinomios de Lagrange para interpolación

- Cómo se ve la "influencia" de este polinomio

$$L_{n,k}(x) = \frac{(x - x_0)\cdots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\cdots(x - x_n)}{(x_k - x_0)\cdots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\cdots(x_k - x_n)}.$$





Polinomios de Lagrange para interpolación

- La forma general queda:

$$P_n(x) = f(x_0)L_{n,0}(x) + \cdots + f(x_n)L_{n,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)L_{n,k}(x),$$

- La notación final de $P_n(x)$ es un poco complicada, pues es una suma de $n+1$ polinomios de grado n.

Polinomios de Lagrange para interpolación

- La forma general queda:

$$P_n(x) = f(x_0)L_{n,0}(x) + \cdots + f(x_n)L_{n,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)L_{n,k}(x),$$

$$L_{n,k}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

- La notación final de $P_n(x)$ es un poco complicada, pues es una suma de $n+1$ polinomios de grado n.

Polinomios de Lagrange para interpolación

- La forma general queda:

$$P_n(x) = f(x_0)L_{n,0}(x) + \cdots + f(x_n)L_{n,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)L_{n,k}(x),$$

$$L_{n,k}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

$$= \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)}$$

- La notación final de $P_n(x)$ es un poco complicada, pues es una suma de $n+1$ polinomios de grado n.

Unicidad

- El polinomio *P(x)* de grado ***n*** pasa por ***n+1*** puntos
- si existe otro,*Q(x)* polinomio de grado ***n*** pasa por ***n+1*** puntos
- El polinomio diferencia *R(x)* = *P(x) - Q(x)*
  - es un polinomion de grado ***n***, que tiene ***n+1*** raices, entonces es el polinomio **0**

Polinomios de Lagrange para interpolación

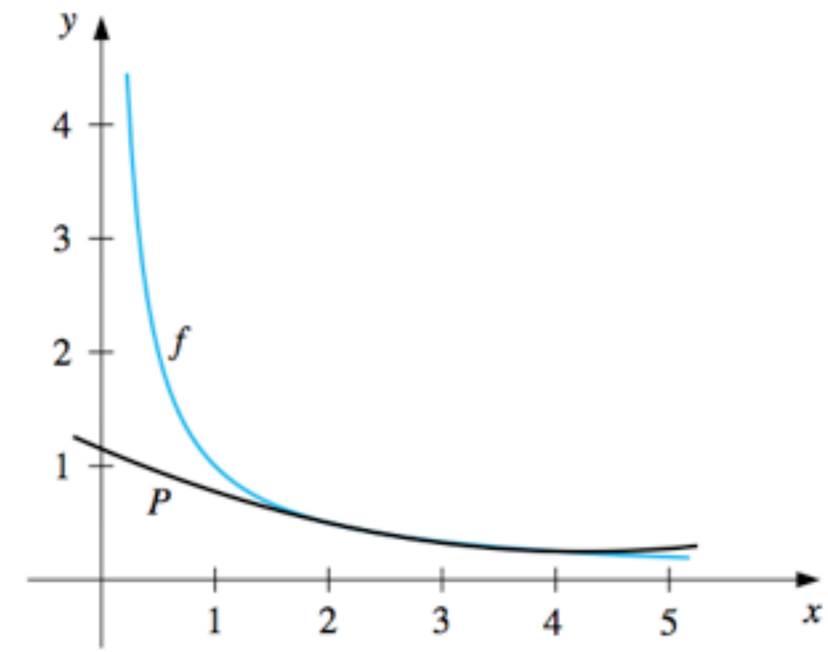
- Usando los números (llamados también ***nodos***), $x_0=2$, $x_1=2.5$ y $x_2=4$ para obtener el interpolador de segundo orden de f(x) = 1/x, entonces hay que determinar $L_{2,k}(x)$, $k=0,1,2$. Calculamos:

- Finalmente tenemos la aprox. :

- ¿Cómo es el residuo?

Polinomios de Lagrange para interpolación

- Usando los números (llamados también ***nodos***), $x_0=2$, $x_1=2.5$ y $x_2=4$ para obtener el interpolador de segundo orden de f(x) = 1/x, entonces hay que determinar $L_{2,k}(x)$, $k=0,1,2$. Calculamos:



$$L_0(x) = \frac{(x-2.5)(x-4)}{(2-2.5)(2-4)} = \frac{x^2-6.5x+10}{1} = (x-6.5)x+10,$$

$$L_1(x) = \frac{(x-2)(x-4)}{(2.5-2)(2.5-4)} = \frac{x^2-6x+8}{-3/4} = \frac{(-4x+24)x-32}{3},$$

$$L_2(x) = \frac{(x-2)(x-2.5)}{(4-2)(4-2.5)} = \frac{x^2-4.5x+5}{3} = \frac{(x-4.5)x+5}{3}.$$

$$f(x_0) = f(2) = 0.5, \quad f(x_1) = f(2.5) = 0.4, \quad f(x_2) = f(4) = 0.25$$

- Finalmente tenemos la aprox. : $f(3) \approx P(3) = 0.325.$

- ¿Cómo es el residuo?

Polinomios de Lagrange para interpolación

- Teorema: El error de aproximación de la polinomio de grado *n* del polinomio de Lagrange, para $n+1$ puntos distintos $x_0,\ldots,x_n$, a una función $f \in C^{n+1}[a,b]$ está dado por:

(3.3)

  - donde para cada *x* en [a,b] existe un número $\xi(x)$ en (a,b). Esto nos sirve solo cuando sabemos como se comportan las derivadas de *f(x)*.

- En cambio, el error de aproximación del polinomio de grado *n* de la serie de Taylor está dado como:

  - donde para cada *x* en [*a*,*b*] el número $\xi(x)$ está entre *x* y x_0.

Polinomios de Lagrange para interpolación

- Teorema: El error de aproximación de la polinomio de grado *n* del polinomio de Lagrange, para *n+1* puntos distintos $x_0,\ldots,x_n$, a una función $f \in C^{n+1}[a,b]$ está dado por:

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n), \qquad (3.3)$$

  - donde para cada *x* en [a,b] existe un número $\xi(x)$ en (a,b). Esto nos sirve solo cuando sabemos como se comportan las derivadas de *f(x)*.

- En cambio, el error de aproximación del polinomio de grado *n* de la serie de Taylor está dado como:

  - donde para cada *x* en [*a*,*b*] el número $\xi(x)$ está entre *x* y x_0.

Polinomios de Lagrange para interpolación

- Teorema: El error de aproximación de la polinomio de grado *n* del polinomio de Lagrange, para *n+1* puntos distintos $x_0,\ldots,x_n$, a una función $f \in C^{n+1}[a,b]$ está dado por:

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n), \qquad (3.3)$$

  - donde para cada *x* en [a,b] existe un número $\xi(x)$ en (a,b). Esto nos sirve solo cuando sabemos como se comportan las derivadas de *f(x)*.

- En cambio, el error de aproximación del polinomio de grado *n* de la serie de Taylor está dado como:

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

  - donde para cada *x* en [*a*,*b*] el número $\xi(x)$ está entre *x* y x_0.

• Demostración del teorema (1/2):

Demostración Observe primero que, si $x = x_k$ para $k = 0, 1, \ldots, n$, entonces $f(x_k) = P(x_k)$, y al seleccionar $\xi(x_k)$ arbitrariamente en (a, b) se obtiene la ecuación (3.3). Si $x \neq x_k$ para cualquier $k = 0, 1, \ldots, n$, defina la función g para t en $[a, b]$ por medio de

$$g(t) = f(t) - P(t) - [f(x) - P(x)] \frac{(t - x_0)(t - x_1) \cdots (t - x_n)}{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)}$$

$$= f(t) - P(t) - [f(x) - P(x)] \prod_{i=0}^{n} \frac{(t - x_i)}{(x - x_i)}.$$

Puesto que $f \in C^{n+1}[a, b]$, y $P \in C^{\infty}[a, b]$, se deduce que $g \in C^{n+1}[a, b]$. Cuando $t = x_k$ tendremos

$$g(x_k) = f(x_k) - P(x_k) - [f(x) - P(x)] \prod_{i=0}^{n} \frac{(x_k - x_i)}{(x - x_i)} = 0 - [f(x) - P(x)] \cdot 0 = 0.$$

Además,

$$g(x) = f(x) - P(x) - [f(x) - P(x)] \prod_{i=0}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x - x_i)} = f(x) - P(x) - [f(x) - P(x)] = 0.$$

Por tanto, $g \in C^{n+1}[a, b]$, y g se anula en los $n + 2$ números distintos $x, x_0, x_1, \ldots, x_n$. Conforme al teorema generalizado de Rolle, existe ξ en (a, b) tal que $g^{(n+1)}(\xi) = 0$.

• Demostración del teorema (2/2):

Por tanto,

$$0 = g^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - P^{(n+1)}(\xi) - [f(x) - P(x)] \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \left[\prod_{i=0}^{n} \frac{(t - x_i)}{(x - x_i)} \right]_{t=\xi} \tag{3.4}$$

Por ser $P(x)$ un polinomio de grado a lo más n, su $(n + 1)$-ésima derivada, $P^{(n+1)}(x)$, será igual a cero. Asimismo, $\prod_{i=0}^{n} [(t - x_i)/(x - x_i)]$ es un polinomio de grado $(n + 1)$ y, por tanto,

$$\prod_{i=0}^{n} \frac{(t - x_i)}{(x - x_i)} = \left[\frac{1}{\prod_{i=0}^{n} (x - x_i)} \right] t^{n+1} + (\text{término de menor grado en } t),$$

y

$$\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \prod_{i=0}^{n} \frac{(t - x_i)}{(x - x_i)} = \frac{(n + 1)!}{\prod_{i=0}^{n} (x - x_i)}.$$

La ecuación (3.4) ahora se convierte en

$$0 = f^{(n+1)}(\xi) - 0 - [f(x) - P(x)] \frac{(n + 1)!}{\prod_{i=0}^{n} (x - x_i)},$$

y luego de despejar $f(x)$, tendremos

$$f(x) = P(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i). \qquad \blacksquare\ \blacksquare\ \blacksquare$$

Polinomios de Lagrange para interpolación

- Veamos como se comportan los diferentes polinomios de Lagrange para los valores de la siguiente tabla. Queremos estimar el valor de *f*(1.5). Por lo tanto podemos calcular todos los siguientes polinomios:

x	$f(x)$
1.0	0.7651977
1.3	0.6200860
1.6	0.4554022
1.9	0.2818186
2.2	0.1103623

Polinomios de Lagrange para interpolación

- Veamos como se comportan los diferentes polinomios de Lagrange para los valores de la siguiente tabla. Queremos estimar el valor de $f(1.5)$. Por lo tanto podemos calcular todos los siguientes polinomios:

x	$f(x)$
1.0	0.7651977
1.3	0.6200860
1.6	0.4554022
1.9	0.2818186
2.2	0.1103623

$P_4(x)$ $P_3(x)$ $P_1(x)$ $\hat{P}_2(x)$ $P_2(x)$ $\hat{P}_3(x)$

Polinomios de Lagrange para interpolación

- El valor real *f*(1.5) es 0.5118277, que nos da la siguiente información:

$$
\begin{aligned}
|P_1(1.5) - f(1.5)| &\approx 1.53 \times 10^{-3}, & |P_2(1.5) - f(1.5)| &\approx 5.42 \times 10^{-4},\\
|\hat{P}_2(1.5) - f(1.5)| &\approx 6.44 \times 10^{-4}, & |P_3(1.5) - f(1.5)| &\approx 2.5 \times 10^{-6},\\
|\hat{P}_3(1.5) - f(1.5)| &\approx 1.50 \times 10^{-5}, & |P_4(1.5) - f(1.5)| &\approx 7.7 \times 10^{-6}.
\end{aligned}
$$

- Resulta entonces que P_3 es la mejor aproximación, contrario a lo que diría la intuición (que P_4 sería mejor interpolador).

- Lo que pasa aquí es que *f(x)* es una función de Bessel y no tenemos información sobre la cuarta/quinta derivada de *f(x)*.

- Este es el caso común en la realidad, no sabemos sobre las derivadas de *f(x)*.

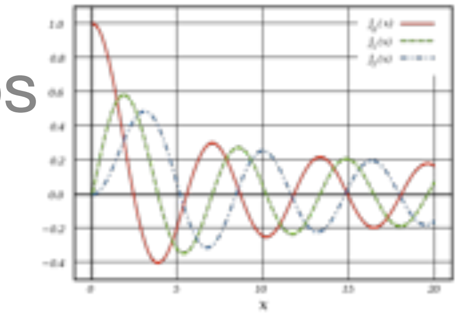
Polinomios de Lagrange para interpolación

- El valor real $f(1.5)$ es 0.5118277, que nos da la siguiente información:

$$
\begin{aligned}
|P_1(1.5) - f(1.5)| &\approx 1.53 \times 10^{-3}, & |P_2(1.5) - f(1.5)| &\approx 5.42 \times 10^{-4}, \\
|\hat{P}_2(1.5) - f(1.5)| &\approx 6.44 \times 10^{-4}, & |P_3(1.5) - f(1.5)| &\approx 2.5 \times 10^{-6}, \\
|\hat{P}_3(1.5) - f(1.5)| &\approx 1.50 \times 10^{-5}, & |P_4(1.5) - f(1.5)| &\approx 7.7 \times 10^{-6}.
\end{aligned}
$$

- Resulta entonces que P_3 es la mejor aproximación, contrario a lo que diría la intuición (que P_4 sería mejor interpolador).

- Lo que pasa aquí es que *f(x)* es una función de Bessel y no tenemos información sobre la cuarta/quinta derivada de *f(x)*.



- Este es el caso común en la realidad, no sabemos sobre las derivadas de *f(x)*.

Polinomios de Lagrange generados recursivamente

- Como no podemos saber cual solución es la mas correcta, debemos de generar polinomios de grado mayor hasta que dada una tolerancia dada, ya no haya ganancia en el error.
- Para esto definiremos cómo calcular los polinomios de alto grado en base a otros calculados recursivamente.

Polinomios de Lagrange generados recursivamente

- Definicion: sea *f(x)* definida en $x_0, x_1, \ldots, x_n$ *y* $m_1, m_2, \ldots, m_k$ *k números enteros distintos tal que* $0 <= m_i <= n$, $P_{m1,m2,\ldots,mk}(x)$ *es el polinomio de Lagrange que interpola en los k puntos* $x_{m1}, x_{m2}, \ldots, x_{mk}$.

- Definición: Sea *f* definida en $x_0, x_1, \ldots, x_k$ y sean x_j and x_i dos números dentro de ese conjunto. Si

$$P(x) = \frac{(x - x_j)P_{0,1,\ldots,j-1,j+1,\ldots,k}(x) - (x - x_i)P_{0,1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,k}(x)}{(x_i - x_j)},$$

- entonces *P(x)* es el polinomio de Lagrange de grado k-ésimo que interpola *f(x)* en los *k+1* puntos $x_0, x_1, \ldots, x_k$.

Polinomios de Lagrange generados recursivamente

- Para verificar la fórmula definamos los 2 polinomios de grado *k-1*

$$Q \equiv P_{0,1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,k} \qquad \hat{Q} \equiv P_{0,1,\ldots,j-1,j+1,\ldots,k}$$

- De tal forma que el siguiente es de grado *k*:

$$P(x) = \frac{(x - x_j)\hat{Q}(x) - (x - x_i)Q(x)}{(x_i - x_j)}$$

- Si $0 \leq r \leq k$ con $r \neq i$ y $r \neq j$, $\longrightarrow Q(x_r) = \hat{Q}(x_r) = f(x_r)$

Entonces $P(x_r) = \dfrac{(x_r - x_j)\hat{Q}(x_r) - (x_r - x_i)Q(x_r)}{x_i - x_j} = \dfrac{(x_i - x_j)}{(x_i - x_j)} f(x_r) = f(x_r).$

Polinomios de Lagrange generados recursivamente

- Para verificar la fórmula definamos los 2 polinomios de grado *k-1*

$$Q \equiv P_{0,1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,k} \qquad \hat{Q} \equiv P_{0,1,\ldots,j-1,j+1,\ldots,k}$$

- De tal forma que el siguiente es de grado *k*:

$$P(x) = \frac{(x-x_j)\hat{Q}(x) - (x-x_i)Q(x)}{(x_i - x_j)}$$

- Si $0 \leq r \leq k$ con $r \neq i$ y $r \neq j$, $\longrightarrow Q(x_r) = \hat{Q}(x_r) = f(x_r)$

Entonces $$P(x_r) = \frac{(\cancel{x_r} - x_j)\hat{Q}(x_r) - (x_r - x_i)Q(x_r)}{x_i - x_j} = \frac{(x_i - x_j)}{(x_i - x_j)} f(x_r) = f(x_r).$$

Polinomios de Lagrange generados recursivamente

- Para verificar la fórmula definamos los 2 polinomios de grado *k-1*

$$Q \equiv P_{0,1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,k} \qquad \hat{Q} \equiv P_{0,1,\ldots,j-1,j+1,\ldots,k}$$

- De tal forma que el siguiente es de grado *k*:

$$P(x) = \frac{(x - x_j)\hat{Q}(x) - (x - x_i)Q(x)}{(x_i - x_j)}$$

- Si $0 \leq r \leq k$ con $r \neq i$ y $r \neq j$, $\longrightarrow Q(x_r) = \hat{Q}(x_r) = f(x_r)$

Entonces $$P(x_r) = \frac{(\cancel{x_r} - x_j)\hat{Q}(x_r) - (\cancel{x_r} - x_i)Q(x_r)}{x_i - x_j} = \frac{(x_i - x_j)}{(x_i - x_j)} f(x_r) = f(x_r).$$

Polinomios de Lagrange generados recursivamente

- Además

$$P(x_i) = \frac{(x_i - x_j)\hat{Q}(x_i) - (x_i - x_i)Q(x_i)}{x_i - x_j} = \frac{(x_i - x_j)}{(x_i - x_j)} f(x_i) = f(x_i),$$

- De manera análoga

- Entonces, como hay un solo polinomio de grado a lo mas *k* que concuerda con *f(x)* en $x_0, x_1, \ldots, x_n$, por consiguiente ≡ .

- Esto implica que aproximaciones de interpolación se pueden generar de manera recursiva.

Polinomios de Lagrange generados recursivamente

$f(x_i)$

- Además

$$P(x_i) = \frac{(x_i - x_j)\hat{Q}(x_i) - (x_i - x_i)Q(x_i)}{x_i - x_j} = \frac{(x_i - x_j)}{(x_i - x_j)} f(x_i) = f(x_i),$$

- De manera análoga

- Entonces, como hay un solo polinomio de grado a lo mas *k* que concuerda con *f(x)* en $x_0, x_1, \ldots, x_n$, por consiguiente ≡ .

- Esto implica que aproximaciones de interpolación se pueden generar de manera recursiva.

Polinomios de Lagrange generados recursivamente

- Además

$$P(x_i) = \frac{(x_i - x_j)\overset{f(x_i)}{\hat{Q}(x_i)} - (x_i - x_i)Q(x_i)}{x_i - x_j} = \frac{(x_i - x_j)}{(x_i - x_j)} f(x_i) = f(x_i),$$

- De manera análoga

- Entonces, como hay un solo polinomio de grado a lo mas *k* que concuerda con *f(x)* en $x_0, x_1, \ldots, x_n$, por consiguiente ≡ .

- Esto implica que aproximaciones de interpolación se pueden generar de manera recursiva.

Polinomios de Lagrange generados recursivamente

- Además

$f(x_i)$

$$P(x_i) = \frac{(x_i - x_j)\hat{Q}(x_i) - (x_i - x_i)Q(x_i)}{x_i - x_j} = \frac{(x_i - x_j)}{(x_i - x_j)} f(x_i) = f(x_i),$$

- De manera análoga

- Entonces, como hay un solo polinomio de grado a lo mas *k* que concuerda con *f(x)* en $x_0, x_1, \ldots, x_n$, por consiguiente ≡ .

- Esto implica que aproximaciones de interpolación se pueden generar de manera recursiva.

Polinomios de Lagrange generados recursivamente

- Además

$$P(x_i) = \frac{(x_i - x_j)\overbrace{\hat{Q}(x_i)}^{f(x_i)} - \overbrace{(x_i - x_i)}^{0}Q(x_i)}{x_i - x_j} = \frac{(x_i - x_j)}{(x_i - x_j)} f(x_i) = f(x_i),$$

- De manera análoga

- Entonces, como hay un solo polinomio de grado a lo mas *k* que concuerda con *f(x)* en $x_0, x_1, \ldots, x_n$, por consiguiente $\equiv$.

- Esto implica que aproximaciones de interpolación se pueden generar de manera recursiva.

Polinomios de Lagrange generados recursivamente

- Además

$$P(x_i) = \frac{(x_i - x_j)\overbrace{\hat{Q}(x_i)}^{f(x_i)} - \overbrace{(x_i - x_i)}^{0}Q(x_i)}{x_i - x_j} = \frac{(x_i - x_j)}{(x_i - x_j)}f(x_i) = f(x_i),$$

- De manera análoga $P(x_j) = f(x_j)$

- Entonces, como hay un solo polinomio de grado a lo mas *k* que concuerda con *f(x)* en $x_0, x_1, \ldots, x_n$, por consiguiente ≡ .

- Esto implica que aproximaciones de interpolación se pueden generar de manera recursiva.

Polinomios de Lagrange generados recursivamente

- Además

$$P(x_i) = \frac{(x_i - x_j)\overbrace{\hat{Q}(x_i)}^{f(x_i)} - \overbrace{(x_i - x_i)}^{0}Q(x_i)}{x_i - x_j} = \frac{(x_i - x_j)}{(x_i - x_j)} f(x_i) = f(x_i),$$

- De manera análoga $P(x_j) = f(x_j)$

- Entonces, como hay un solo polinomio de grado a lo mas *k* que concuerda con *f(x)* en $x_0, x_1, \ldots, x_n$, por consiguiente $P(x) \equiv$.

- Esto implica que aproximaciones de interpolación se pueden generar de manera recursiva.

Polinomios de Lagrange generados recursivamente

- Además

$$P(x_i) = \frac{(x_i - x_j)\overbrace{\hat{Q}(x_i)}^{f(x_i)} - (x_i \overbrace{-x_i}^{0})Q(x_i)}{x_i - x_j} = \frac{(x_i - x_j)}{(x_i - x_j)} f(x_i) = f(x_i),$$

- De manera análoga $P(x_j) = f(x_j)$

- Entonces, como hay un solo polinomio de grado a lo mas *k* que concuerda con *f(x)* en $x_0, x_1, \ldots, x_n$, por consiguiente $P(x) \equiv P_{0,1,\ldots,k}(x)$

- Esto implica que aproximaciones de interpolación se pueden generar de manera recursiva.

Polinomios de Lagrange generados recursivamente

- Lo anterior da origen al método de Naville, donde cada renglón de la siguiente tabla se termina antes de iniciar el siguiente.

$$
\begin{array}{llllll}
\hline
x_0 & P_0 = Q_{0,0} & & & & \\
x_1 & P_1 = Q_{1,0} & P_{0,1} = Q_{1,1} & & & \\
x_2 & P_2 = Q_{2.0} & P_{1,2} = Q_{2,1} & P_{0,1,2} = Q_{2,2} & & \\
x_3 & P_3 = Q_{3,0} & P_{2,3} = Q_{3,1} & P_{1,2,3} = Q_{3,2} & P_{0,1,2,3} = Q_{3,3} & \\
x_4 & P_4 = Q_{4,0} & P_{3,4} = Q_{4,1} & P_{2,3,4} = Q_{4,2} & P_{1,2,3,4} = Q_{4,3} & P_{0,1,2,3,4} = Q_{4,4} \\
\hline
\end{array}
$$

- Donde, para evitar los subíndices múltiples, sea $Q_{i,j}(x)$ $0 <= j <= i$ el polinomio de grado j en los $j+1$ números $x_{i-j}, x_{i-j+1},\ldots,x_{i-1}, x_i$.

Polinomios de Lagrange generados recursivamente

- Lo anterior da origen al método de Naville, donde cada renglón de la siguiente tabla se termina antes de iniciar el siguiente.

x_0	$P_0 = Q_{0,0}$				
x_1	$P_1 = Q_{1,0}$	$P_{0,1} = Q_{1,1}$			
x_2	$P_2 = Q_{2.0}$	$P_{1,2} = Q_{2,1}$	$P_{0,1,2} = Q_{2,2}$		
x_3	$P_3 = Q_{3,0}$	$P_{2,3} = Q_{3,1}$	$P_{1,2,3} = Q_{3,2}$	$P_{0,1,2,3} = Q_{3,3}$	
x_4	$P_4 = Q_{4,0}$	$P_{3,4} = Q_{4,1}$	$P_{2,3,4} = Q_{4,2}$	$P_{1,2,3,4} = Q_{4,3}$	$P_{0,1,2,3,4} = Q_{4,4}$

- Donde, para evitar los subíndices múltiples, sea $Q_{i,j}(x)$ $0 <= j <= i$ el polinomio de grado j en los $j+1$ números $x_{i-j}, x_{i-j+1},\ldots,x_{i-1}, x_i$.

Polinomios de Lagrange generados recursivamente

- Lo anterior da origen al método de Naville, donde cada renglón de la siguiente tabla se termina antes de iniciar el siguiente.

x_0	$P_0 = Q_{0,0}$				
x_1	$P_1 = Q_{1,0}$	$P_{0,1} = Q_{1,1}$			
x_2	$P_2 = Q_{2,0}$	$P_{1,2} = Q_{2,1}$	$P_{0,1,2} = Q_{2,2}$		
x_3	$P_3 = Q_{3,0}$	$P_{2,3} = Q_{3,1}$	$P_{1,2,3} = Q_{3,2}$	$P_{0,1,2,3} = Q_{3,3}$	
x_4	$P_4 = Q_{4,0}$	$P_{3,4} = Q_{4,1}$	$P_{2,3,4} = Q_{4,2}$	$P_{1,2,3,4} = Q_{4,3}$	$P_{0,1,2,3,4} = Q_{4,4}$

- Donde, para evitar los subíndices múltiples, sea $Q_{i,j}(x)$ $0 <= j <= i$ el polinomio de grado j en los $j+1$ números $x_{i-j}, x_{i-j+1}, \ldots, x_{i-1}, x_i$.

Polinomios de Lagrange generados recursivamente

- Lo anterior da origen al método de Naville, donde cada renglón de la siguiente tabla se termina antes de iniciar el siguiente.

x_0	$P_0 = Q_{0,0}$				
x_1	$P_1 = Q_{1,0}$	$P_{0,1} = Q_{1,1}$			
x_2	$P_2 = Q_{2,0}$	$P_{1,2} = Q_{2,1}$	$P_{0,1,2} = Q_{2,2}$		
x_3	$P_3 = Q_{3,0}$	$P_{2,3} = Q_{3,1}$	$P_{1,2,3} = Q_{3,2}$	$P_{0,1,2,3} = Q_{3,3}$	
x_4	$P_4 = Q_{4,0}$	$P_{3,4} = Q_{4,1}$	$P_{2,3,4} = Q_{4,2}$	$P_{1,2,3,4} = Q_{4,3}$	$P_{0,1,2,3,4} = Q_{4,4}$

Polinomios de grado 0 (constantes)

- Donde, para evitar los subíndices múltiples, sea $Q_{i,j}(x)$ $0 <= j <= i$ el polinomio de grado j en los $j+1$ números $x_{i-j}, x_{i-j+1}, \ldots, x_{i-1}, x_i$.

Polinomios de Lagrange generados recursivamente

- Ejemplo en la función de Bessel estimar *f*(1.5):

1.0	0.7651977				
1.3	0.6200860	0.5233449			
1.6	0.4554022	0.5102968	0.5124715		
1.9	0.2818186	0.5132634	0.5112857	0.5118127	
2.2	0.1103623	0.5104270	0.5137361	$\boxed{0.5118302}$	0.5118200

- El valor "real" *f*(1.5) es 0.5118277

- Se puede usar el criterio de paro $|Q_{i,i} - Q_{i-1,i-1}| < \varepsilon$.

Polinomios de Lagrange generados recursivamente

- Ejemplo en la función de Bessel estimar $f(1.5)$:

1.0	0.7651977					
1.3	0.6200860	0.5233449				
1.6	0.4554022	0.5102968	0.5124715			
1.9	0.2818186	0.5132634	0.5112857	0.5118127		
2.2	0.1103623	0.5104270	0.5137361	$\boxed{0.5118302}$	0.5118200	
2.5	−0.0483838	0.4807699	0.5301984	0.5119070	0.5118430	0.5118277.

- El valor "real" $f(1.5)$ es 0.5118277

- Se puede usar el criterio de paro $|Q_{i,i} - Q_{i-1,i-1}| < \varepsilon$.