Interpolación. Splines cúbicos

MAT-251

Dr. Alonso Ramírez Manzanares
CIMAT A.C.
e-mail: alram@cimat.mx
web: http://www.cimat.mx/~alram/met_num/

Dr. Salvador Botello
CIMAT A.C.
e-mail: botello@cimat.mx

Problemas generales

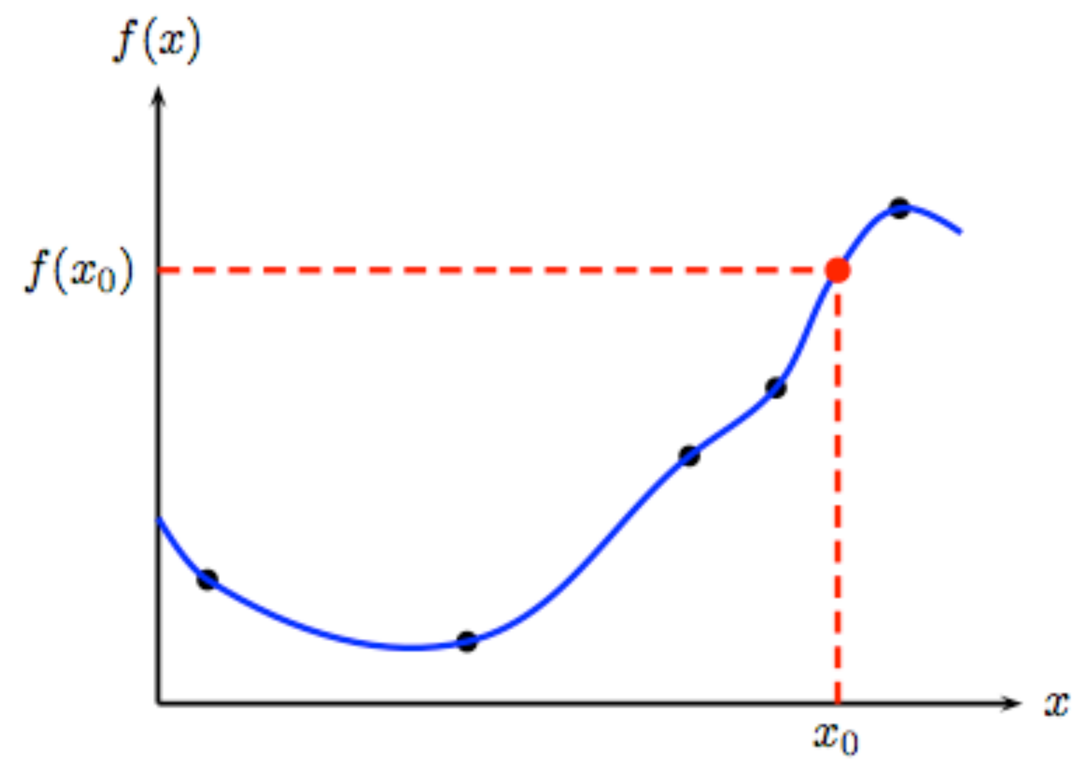
- Vimos en las clases anteriores que interpolábamos con polinomios de Lagrange una serie de puntos:

La población mundial para los años que se indicaran era:

Año	1965	1975	1985	1990
Población (millones)	3.340	4.080	4.850	5.290

- Podemos tener más información?

x_i	f_i
0.4	1.00
2.5	0.50
4.3	2.00
5.0	2.55
6.0	4.00



Problemas generales

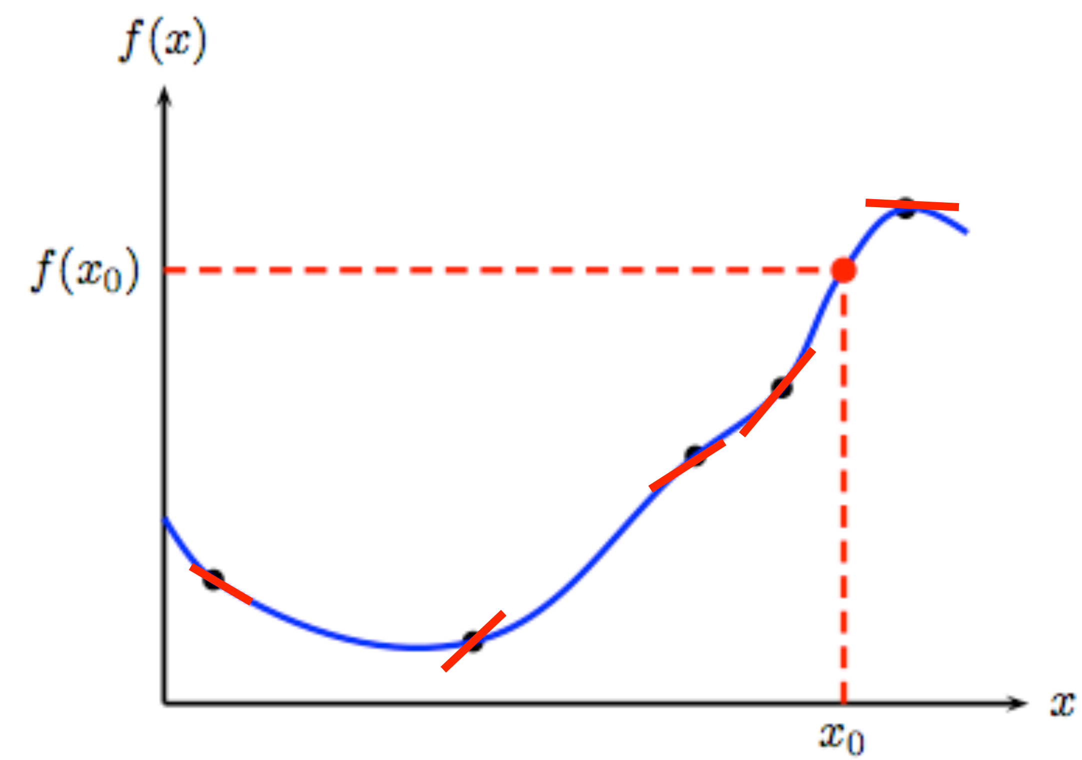
- Vimos en las clases anteriores que interpolábamos con polinomios de Lagrange una serie de puntos:

La población mundial para los años que se indicaran era:

Año	1965	1975	1985	1990
Población (millones)	3.340	4.080	4.850	5.290

- Podemos tener más información?

x_i	f_i
0.4	1.00
2.5	0.50
4.3	2.00
5.0	2.55
6.0	4.00



Polinomios de Hermite

- Si aparte de tener los puntos, tenemos la derivada en cada punto podemos utilizar los polinomios de Hermite:

- Sea f $\in C^1[a,b]$ y n+1 puntos distintos $x_0,\ldots,x_n$, en $[a,b]$, el único polinomio de menor grado el cual coincide con f y f' en los $n+1$ puntos es el polinomio de grado por lo menos $2n+1$ dado por

- Donde $L_{n,j}$ denota el j-ésimo coeficiente polinomial de Lagrange de grado n.

Polinomios de Hermite

- Si aparte de tener los puntos, tenemos la derivada en cada punto podemos utilizar los polinomios de Hermite:

- Sea f $\in$ $C^1[a,b]$ y n+1 puntos distintos $x_0,\ldots,x_n$, en $[a,b]$, el único polinomio de menor grado el cual coincide con f y f' en los $n+1$ puntos es el polinomio de grado por lo menos $2n+1$ dado por

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) H_{n,j}(x) + \sum_{j=0}^{n} f'(x_j) \hat{H}_{n,j}(x),$$

- Donde $L_{n,j}$ denota el j-ésimo coeficiente polinomial de Lagrange de grado n.

Polinomios de Hermite

- Si aparte de tener los puntos, tenemos la derivada en cada punto podemos utilizar los polinomios de Hermite:

- Sea f ∈ $C^1[a,b]$ y n+1 puntos distintos $x_0,\ldots,x_n$, en $[a,b]$, el único polinomio de menor grado el cual coincide con f y f' en los $n+1$ puntos es el polinomio de grado por lo menos $2n+1$ dado por

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) H_{n,j}(x) + \sum_{j=0}^{n} f'(x_j) \hat{H}_{n,j}(x),$$

$$H_{n,j}(x) = [1 - 2(x - x_j) L'_{n,j}(x_j)] L^2_{n,j}(x)$$

- Donde $L_{n,j}$ denota el j-ésimo coeficiente polinomial de Lagrange de grado n.

Polinomios de Hermite

- Si aparte de tener los puntos, tenemos la derivada en cada punto podemos utilizar los polinomios de Hermite:

- Sea f $\in C^1[a,b]$ y n+1 puntos distintos $x_0,\ldots,x_n$, en $[a,b]$, el único polinomio de menor grado el cual coincide con f y f' en los $n+1$ puntos es el polinomio de grado por lo menos $2n+1$ dado por

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)H_{n,j}(x) + \sum_{j=0}^{n} f'(x_j)\hat{H}_{n,j}(x),$$

$$H_{n,j}(x) = [1 - 2(x - x_j)L'_{n,j}(x_j)]L^2_{n,j}(x)$$

$$\hat{H}_{n,j}(x) = (x - x_j)L^2_{n,j}(x).$$

- Donde $L_{n,j}$ denota el j-ésimo coeficiente polinomial de Lagrange de grado n.

¿Usamos o no las derivadas?

¿Usamos o no las derivadas?

- Si tenemos las derivadas, pues por supuesto que usarlas es muy buena idea (el error approximación de Hermite tiene una forma similar al de Lagrange, pero en la *(2n+1)-enésima derivada*)

¿Usamos o no las derivadas?

- Si tenemos las derivadas, pues por supuesto que usarlas es muy buena idea (el error approximación de Hermite tiene una forma similar al de Lagrange, pero en la *(2n+1)-enésima derivada*)

¿Usamos o no las derivadas?

- Si tenemos las derivadas, pues por supuesto que usarlas es muy buena idea (el error approximación de Hermite tiene una forma similar al de Lagrange, pero en la *(2n+1)-enésima derivada*)

- El problema es que casi nunca las tenemos

¿Usamos o no las derivadas?

- Si tenemos las derivadas, pues por supuesto que usarlas es muy buena idea (el error approximación de Hermite tiene una forma similar al de Lagrange, pero en la *(2n+1)-enésima derivada*)

- El problema es que casi nunca las tenemos

¿Usamos o no las derivadas?

- Si tenemos las derivadas, pues por supuesto que usarlas es muy buena idea (el error approximación de Hermite tiene una forma similar al de Lagrange, pero en la *(2n+1)-enésima derivada*)

- El problema es que casi nunca las tenemos

- Sin embargo, si sabemos un poco de información de las derivadas, entonces es conveniente introducirlos, por ejemplo en los extremos del intervalo [a,b].

Splines

Splines

- Lo que hemos visto hasta ahora implica que si tenemos *n+1* puntos entonces el polinomio que vamos a ajustar es de orden *n*.

Splines

- Lo que hemos visto hasta ahora implica que si tenemos $n+1$ puntos entonces el polinomio que vamos a ajustar es de orden n.

Splines

- Lo que hemos visto hasta ahora implica que si tenemos $n+1$ puntos entonces el polinomio que vamos a ajustar es de orden n.

- Esto tiene una gran desventaja, pues los polinomios de alto grado, en general, muestran fluctuaciones entre los puntos de soporte, incluso si los datos que estamos interpolando no muestran evidencia de ello.

Splines

- Lo que hemos visto hasta ahora implica que si tenemos $n+1$ puntos entonces el polinomio que vamos a ajustar es de orden n.

- Esto tiene una gran desventaja, pues los polinomios de alto grado, en general, muestran fluctuaciones entre los puntos de soporte, incluso si los datos que estamos interpolando no muestran evidencia de ello.

Splines

- Lo que hemos visto hasta ahora implica que si tenemos $n+1$ puntos entonces el polinomio que vamos a ajustar es de orden n.

- Esto tiene una gran desventaja, pues los polinomios de alto grado, en general, muestran fluctuaciones entre los puntos de soporte, incluso si los datos que estamos interpolando no muestran evidencia de ello.

- Para que la fluctuación no dependa del número de puntos, podemos usar splines (imagina que tenemos miles de puntos para aproximar datos con relación lineal). En este sentido, cada vez que agregamos puntos estos deberían de aportar nueva información.

Splines

Splines

- Los splines (trazadores) se basan en la idea en partir el intervalo en sub-intervalos y ahi proponer un polinomio (de grado no muy alto) para aproximar el intervalo.

Splines

- Los splines (trazadores) se basan en la idea en partir el intervalo en sub-intervalos y ahi proponer un polinomio (de grado no muy alto) para aproximar el intervalo.

- Esto se llama aproximación polinomial a pedazos

Splines

- Los splines (trazadores) se basan en la idea en partir el intervalo en sub-intervalos y ahi proponer un polinomio (de grado no muy alto) para aproximar el intervalo.

- Esto se llama aproximación polinomial a pedazos

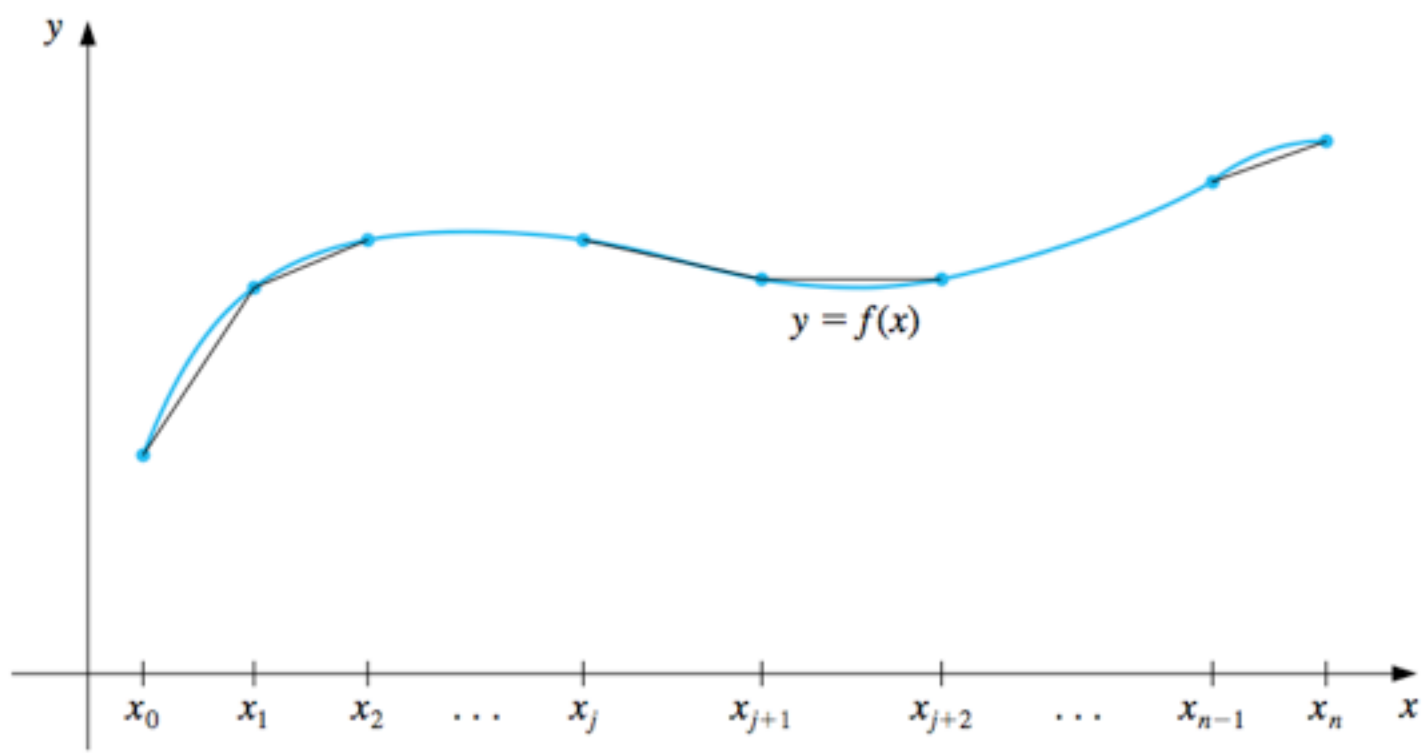
- El modelo lineal (trivial) es el siguiente:

Splines

- Los splines (trazadores) se basan en la idea en partir el intervalo en sub-intervalos y ahi proponer un polinomio (de grado no muy alto) para aproximar el intervalo.

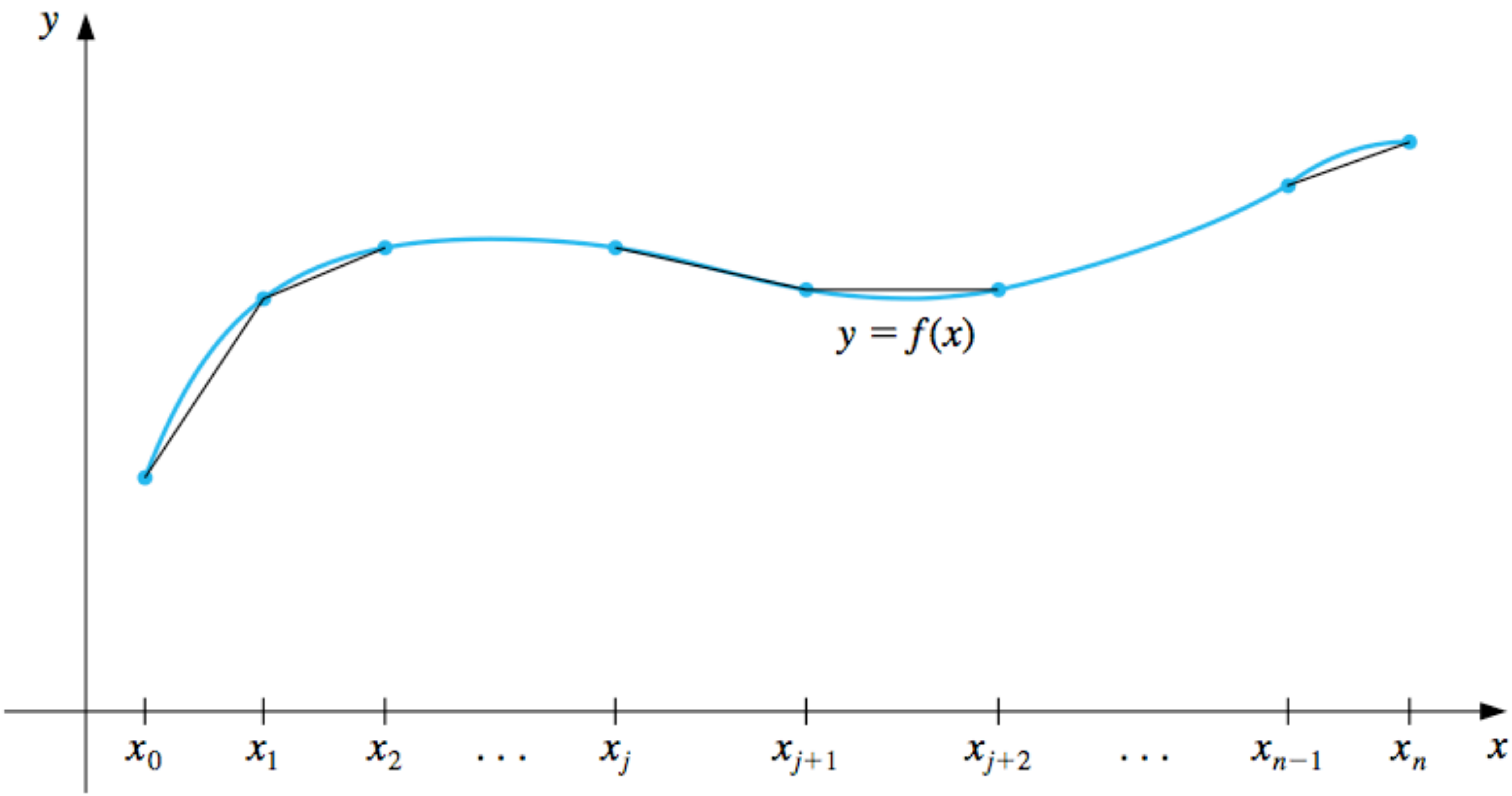
- Esto se llama aproximación polinomial a pedazos

- El modelo lineal (trivial) es el siguiente:



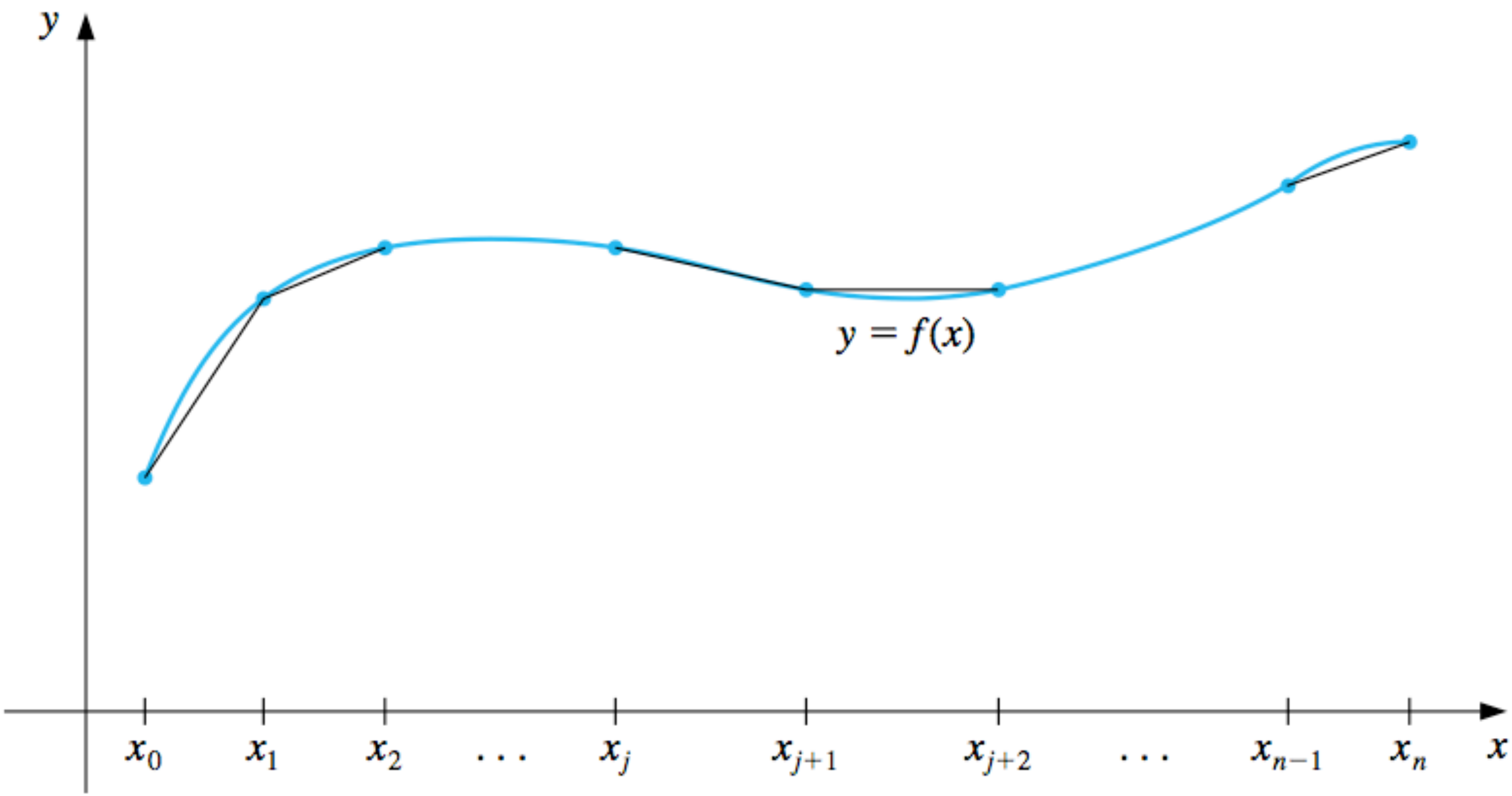
Splines

- Aproximación lineal por intervalos: ¿Cual es el problema?



Splines

- Aproximación lineal por intervalos: ¿Cual es el problema?



La derivadas en los puntos no coinciden, la función aproximada no es “suave”.

Splines

Splines

- ¿Usamos polinomios de Hermite en estos intervalos (de grado 3)? Solo si conocemos las derivadas de $f(x_i)$ pero esto casi nunca pasa.

Splines

- ¿Usamos polinomios de Hermite en estos intervalos (de grado 3)? Solo si conocemos las derivadas de $f(x_i)$ pero esto casi nunca pasa.

- La aproximación mas conocida a pedazos son los **splines cúbicos**.

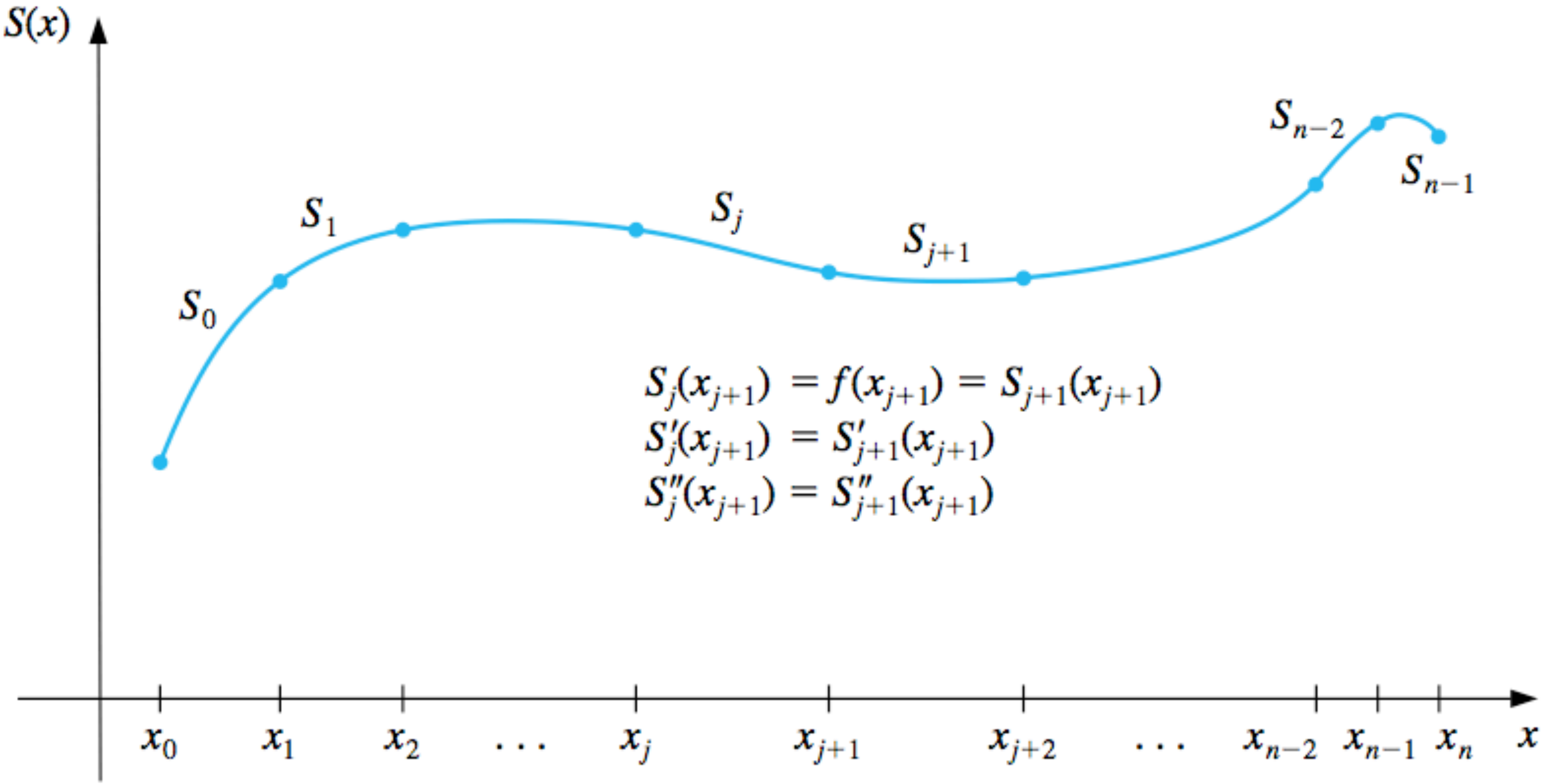
Splines

- ¿Usamos polinomios de Hermite en estos intervalos (de grado 3)? Solo si conocemos las derivadas de $f(x_i)$ pero esto casi nunca pasa.
- La aproximación mas conocida a pedazos son los **splines cúbicos**.
- Cada uno de ellos involucra 4 constantes (incógnitas).

Splines

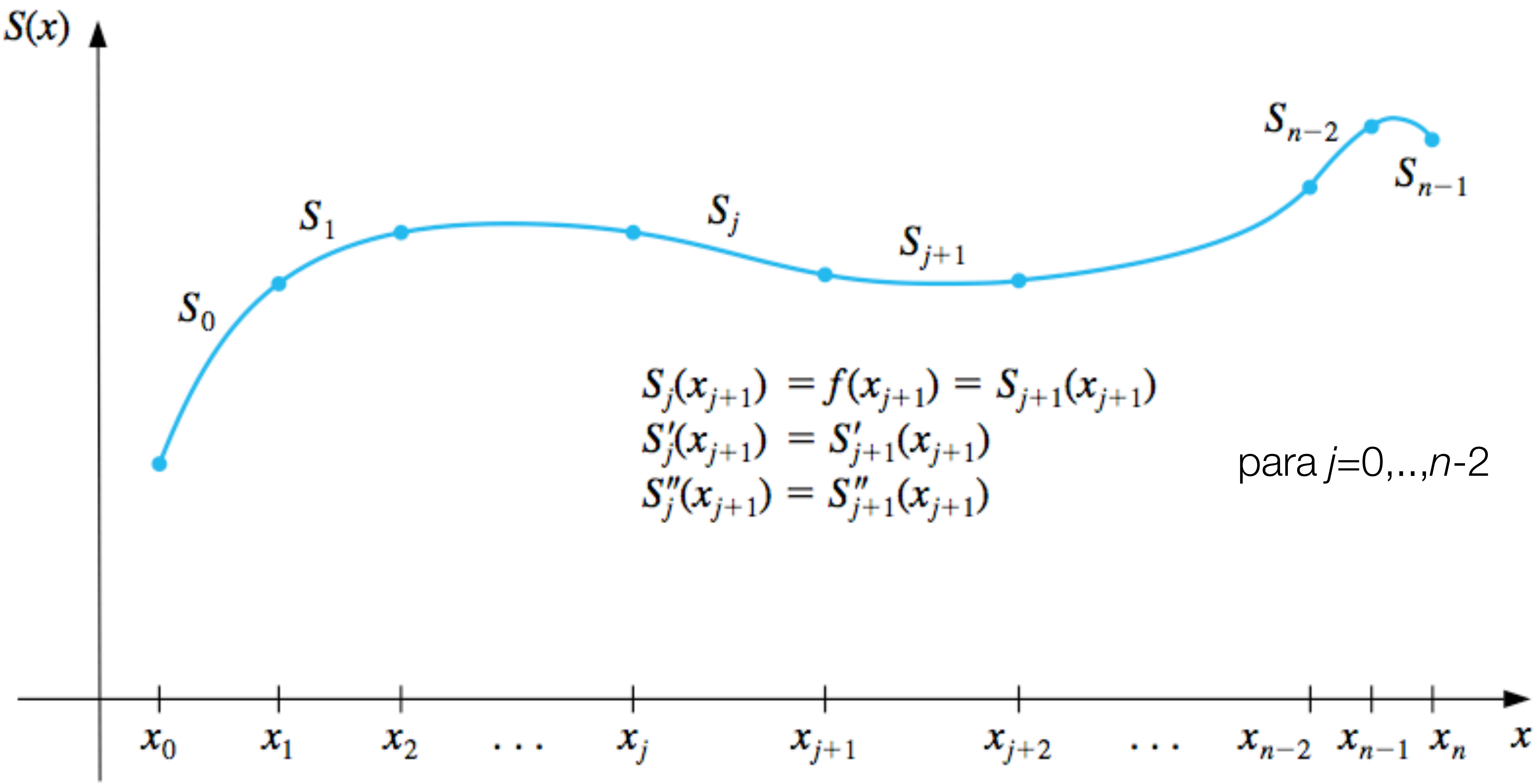
- ¿Usamos polinomios de Hermite en estos intervalos (de grado 3)? Solo si conocemos las derivadas de $f(x_i)$ pero esto casi nunca pasa.
- La aproximación mas conocida a pedazos son los **splines cúbicos**.
- Cada uno de ellos involucra 4 constantes (incógnitas).
- Sus propiedades y la representación gráfica de ellas son las siguientes:

Splines cúbicos



*

Splines cúbicos



$$
\begin{aligned}
S_j(x_{j+1}) &= f(x_{j+1}) = S_{j+1}(x_{j+1}) \\
S_j'(x_{j+1}) &= S_{j+1}'(x_{j+1}) \\
S_j''(x_{j+1}) &= S_{j+1}''(x_{j+1})
\end{aligned}
$$

para j=0,..,n-2

*

Splines cúbicos

Splines cúbicos

- De manera formal:

Splines cúbicos

- De manera formal:
  - Dada una función *f* en *[a,b]* y *n+1* puntos distintos $a=x_0,\ldots,x_n=b$, un interpolador spline cúbico para *f*, llamado *S*, satisface las siguientes condiciones:

Splines cúbicos

- De manera formal:
  - Dada una función f en $[a,b]$ y $n+1$ puntos distintos $a=x_0,...,x_n=b$, un interpolador spline cúbico para f, llamado S, satisface las siguientes condiciones:
    - (a) Para cada $j=0,1,...,n-1$, $S_j(x)$ es un polinomio cúbico, en el subintervalo $[x_j,x_{j+1}]$

Splines cúbicos

- De manera formal:
  - Dada una función *f* en *[a,b]* y *n+1* puntos distintos $a=x_0,\ldots,x_n=b$, un interpolador spline cúbico para *f*, llamado *S*, satisface las siguientes condiciones:
    - (a) Para cada $j=0,1,\ldots,n-1$, $S_j(x)$ es un polinomio cúbico, en el subintervalo $[x_j,x_{j+1}]$
    - (b) $S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1})$ para $j=0,1,\ldots,n-2$

Splines cúbicos

- De manera formal:
  - Dada una función f en $[a,b]$ y $n+1$ puntos distintos $a=x_0,\ldots,x_n=b$, un interpolador spline cúbico para f, llamado S, satisface las siguientes condiciones:
    - (a) Para cada $j=0,1,\ldots,n-1$, $S_j(x)$ es un polinomio cúbico, en el subintervalo $[x_j,x_{j+1}]$
    - (b) $S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1})$ para $j=0,1,\ldots,n-2$
    - (c) $S'_{j+1}(x_{j+1}) = S'_j(x_{j+1})$ para $j=0,1,\ldots,n-2$

Splines cúbicos

- De manera formal:
  - Dada una función f en $[a,b]$ y $n+1$ puntos distintos $a=x_0,...,x_n=b$, un interpolador spline cúbico para f, llamado S, satisface las siguientes condiciones:
    - (a) Para cada $j=0,1,...,n-1$, $S_j(x)$ es un polinomio cúbico, en el subintervalo $[x_j,x_{j+1}]$
    - (b) $S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1})$ para $j=0,1,...,n-2$
    - (c) $S'_{j+1}(x_{j+1}) = S'_j(x_{j+1})$ para $j=0,1,...,n-2$
    - (d) $S''_{j+1}(x_{j+1}) = S''_j(x_{j+1})$ para $j=0,1,...,n-2$

Splines cúbicos

- De manera formal:
  - Dada una función f en $[a,b]$ y $n+1$ puntos distintos $a=x_0,\ldots,x_n=b$, un interpolador spline cúbico para f, llamado S, satisface las siguientes condiciones:
    - (a) Para cada $j=0,1,\ldots,n-1$, $S_j(x)$ es un polinomio cúbico, en el subintervalo $[x_j,x_{j+1}]$
    - (b) $S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1})$ para $j=0,1,\ldots,n-2$
    - (c) $S'_{j+1}(x_{j+1}) = S'_j(x_{j+1})$ para $j=0,1,\ldots,n-2$
    - (d) $S''_{j+1}(x_{j+1}) = S''_j(x_{j+1})$ para $j=0,1,\ldots,n-2$
    - (e) Una de las 2 condiciones de frontera se cumplen

Splines cúbicos

- De manera formal:
  - Dada una función f en $[a,b]$ y $n+1$ puntos distintos $a=x_0,\ldots,x_n=b$, un interpolador spline cúbico para f, llamado S, satisface las siguientes condiciones:
    - (a) Para cada $j=0,1,\ldots,n-1$, $S_j(x)$ es un polinomio cúbico, en el subintervalo $[x_j,x_{j+1}]$
    - (b) $S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1})$ para $j=0,1,\ldots,n-2$
    - (c) $S'_{j+1}(x_{j+1}) = S'_j(x_{j+1})$ para $j=0,1,\ldots,n-2$
    - (d) $S''_{j+1}(x_{j+1}) = S''_j(x_{j+1})$ para $j=0,1,\ldots,n-2$
    - (e) Una de las 2 condiciones de frontera se cumplen
      - **Frontera libre:** $S''_0(x_0) = S''_{n-1}(x_n) = 0$

Splines cúbicos

- De manera formal:
  - Dada una función f en $[a,b]$ y $n+1$ puntos distintos $a=x_0,\ldots,x_n=b$, un interpolador spline cúbico para f, llamado S, satisface las siguientes condiciones:
    - (a) Para cada $j=0,1,\ldots,n-1$, $S_j(x)$ es un polinomio cúbico, en el subintervalo $[x_j,x_{j+1}]$
    - (b) $S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1})$ para $j=0,1,\ldots,n-2$
    - (c) $S'_{j+1}(x_{j+1}) = S'_j(x_{j+1})$ para $j=0,1,\ldots,n-2$
    - (d) $S''_{j+1}(x_{j+1}) = S''_j(x_{j+1})$ para $j=0,1,\ldots,n-2$
    - (e) Una de las 2 condiciones de frontera se cumplen
      - **Frontera libre:** $S''_0(x_0) = S''_{n-1}(x_n) = 0$
      - **Frontera fija:** $S'_0(x_0) = f'(x_0)$ y $S'_{n-1}(x_n) = f'(x_n)$.

Splines, condiciones de frontera

- Podemos ver las condiciones de frontera libre, donde la aproximación sigue lineal antes de x_0 y después de x_n como si dobláramos una lámina para que pasara por los n+1 puntos.

- Por otro lado, las aproximaciones de frontera fija son mas exactas, nuevamente, si tenemos esa información es buena idea usarla. Quizá podemos tener un buen estimador de la derivada en los extremos, pero tiene que ser de buena calidad.

Splines, construcción

- Construimos cada spline de acuerdo a su polinomio para cada *j=0,...,n-1.*

$$S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3 \qquad *$$

- dado que

- la condición nos lleva a

- para *j=0,...,n-2* .

Splines, construcción

- Construimos cada spline de acuerdo a su polinomio para cada *j=0,...,n-1.*

$$S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3 \qquad *$$

- dado que $S_j(x_j) = a_j = f(x_j),$

- la condición nos lleva a

- para *j=0,...,n-2* .

Splines, construcción

- Construimos cada spline de acuerdo a su polinomio para cada *j=0,...,n-1.*

$$S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3 \qquad *$$

- dado que $S_j(x_j) = a_j = f(x_j),$

- la condición $\text{(c)}\ S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1})$ nos lleva a

- para *j=0,...,n-2* .

Splines, construcción

- Construimos cada spline de acuerdo a su polinomio para cada *j=0,...,n-1.*

$$S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3 \qquad *$$

- dado que $S_j(x_j) = a_j = f(x_j),$

- la condición (c) $S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1})$ nos lleva a

$$a_{j+1} = S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1}) = a_j + b_j(x_{j+1} - x_j) + c_j(x_{j+1} - x_j)^2 + d_j(x_{j+1} - x_j)^3$$

- para *j=0,...,n-2* .

Splines, construcción

- Construimos cada spline de acuerdo a su polinomio para cada *j=0,...,n-1.*

$$S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3 \qquad *$$

- dado que $S_j(x_j) = a_j = f(x_j),$

- la condición (c) $S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1})$ nos lleva a

$$a_{j+1} = S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1}) = a_j + b_j(x_{j+1} - x_j) + c_j(x_{j+1} - x_j)^2 + d_j(x_{j+1} - x_j)^3$$

- para *j=0,...,n-2* .

$$h_j = x_{j+1} - x_j$$

Splines, construcción

- Construimos cada spline de acuerdo a su polinomio para cada *j=0,...,n-1.*

$$S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3 \qquad *$$

- dado que $S_j(x_j) = a_j = f(x_j),$

- la condición (c) $S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1})$ nos lleva a

$$a_{j+1} = S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1}) = a_j + b_j(x_{j+1} - x_j) + c_j(x_{j+1} - x_j)^2 + d_j(x_{j+1} - x_j)^3$$

- para *j=0,...,n-2* .

$$h_j = x_{j+1} - x_j$$

- para *j=0,...,n-1* .

Splines, construcción

- Definimos también que y entonces
  - se mantiene para *j=0,..,n-1*.
- Definimos y también observamos que
- *j=0,..,n-1*. Aplicando la condición
- *j=0,..,n-1*.

Splines, construcción

- Definimos también que $a_n = f(x_n)$, y entonces

  - se mantiene para *j=0,..,n-1*.

- Definimos y también observamos que

- *j=0,..,n-1*. Aplicando la condición

- *j=0,..,n-1*.

Splines, construcción

- Definimos también que $a_n = f(x_n)$, y entonces

$$a_{j+1} = a_j + b_j h_j + c_j h_j^2 + d_j h_j^3$$

  - se mantiene para *j=0,..,n-1*.

- Definimos y también observamos que

- *j=0,..,n-1*. Aplicando la condición

- *j=0,..,n-1*.

Splines, construcción

- Definimos también que $a_n = f(x_n)$, y entonces

$$a_{j+1} = a_j + b_j h_j + c_j h_j^2 + d_j h_j^3$$

  - se mantiene para *j=0,..,n-1*.

- Definimos $b_n = S'(x_n)$ y también observamos que

- *j=0,..,n-1*. Aplicando la condición

- *j=0,..,n-1*.

Splines, construcción

- Definimos también que $a_n = f(x_n)$, y entonces

$$a_{j+1} = a_j + b_j h_j + c_j h_j^2 + d_j h_j^3$$

  - se mantiene para *j=0,..,n-1*.

- Definimos $b_n = S'(x_n)$ y también observamos que

$$S_j'(x) = b_j + 2c_j(x - x_j) + 3d_j(x - x_j)^2$$

- *j=0,..,n-1*. Aplicando la condición

- *j=0,..,n-1*.

Splines, construcción

- Definimos también que $a_n = f(x_n)$; y entonces

$$a_{j+1} = a_j + b_j h_j + c_j h_j^2 + d_j h_j^3$$

  - se mantiene para *j=0,..,n-1*.

- Definimos $b_n = S'(x_n)$ y también observamos que

$$S_j'(x) = b_j + 2c_j(x - x_j) + 3d_j(x - x_j)^2 \longrightarrow$$

- *j=0,..,n-1*. Aplicando la condición

- *j=0,..,n-1*.

Splines, construcción

- Definimos también que $a_n = f(x_n)$, y entonces

$$a_{j+1} = a_j + b_j h_j + c_j h_j^2 + d_j h_j^3$$

  - se mantiene para *j=0,..,n-1*.

- Definimos $b_n = S'(x_n)$ y también observamos que

$$S_j'(x) = b_j + 2c_j(x - x_j) + 3d_j(x - x_j)^2 \longrightarrow S_j'(x_j) = b_j$$

- *j=0,..,n-1*. Aplicando la condición

- *j=0,..,n-1*.

Splines, construcción

- Definimos también que $a_n = f(x_n)$; y entonces

$$a_{j+1} = a_j + b_j h_j + c_j h_j^2 + d_j h_j^3$$

  - se mantiene para *j=0,..,n-1*.

- Definimos $b_n = S'(x_n)$ y también observamos que

$$S_j'(x) = b_j + 2c_j(x - x_j) + 3d_j(x - x_j)^2 \longrightarrow S_j'(x_j) = b_j$$

- *j=0,..,n-1*. Aplicando la condición (d) $S_{j+1}'(x_{j+1}) = S_j'(x_{j+1})$

- *j=0,..,n-1*.

Splines, construcción

- Definimos también que $a_n = f(x_n)$, y entonces

$$a_{j+1} = a_j + b_j h_j + c_j h_j^2 + d_j h_j^3$$

  - se mantiene para *j=0,..,n-1*.

- Definimos $b_n = S'(x_n)$ y también observamos que

$$S_j'(x) = b_j + 2c_j(x - x_j) + 3d_j(x - x_j)^2 \longrightarrow S_j'(x_j) = b_j$$

- *j=0,..,n-1*. Aplicando la condición (d) $S_{j+1}'(x_{j+1}) = S_j'(x_{j+1})$

$$b_{j+1} = b_j + 2c_j h_j + 3d_j h_j^2,$$

- *j=0,..,n-1*.

Splines, construcción

- Definimos también que $a_n = f(x_n)$, y entonces

$$a_{j+1} = a_j + b_j h_j + c_j h_j^2 + d_j h_j^3$$

  - se mantiene para *j=0,..,n-1*.

- Definimos $b_n = S'(x_n)$ y también observamos que

$$S_j'(x) = b_j + 2c_j(x - x_j) + 3d_j(x - x_j)^2 \longrightarrow S_j'(x_j) = b_j$$

- *j=0,..,n-1*. Aplicando la condición (d) $S_{j+1}'(x_{j+1}) = S_j'(x_{j+1})$

$$b_{j+1} = b_j + 2c_j h_j + 3d_j h_j^2,$$

- *j=0,..,n-1*.

Splines, construcción

- Siguiendo la misma lógica, también definimos
- Aplicando la condición
- Y sabiendo que
- Tenemos que
- *para j=0,..,n-1*.

*

- **De aquí podemos despejar d_j en función de c_j, c_{j+1} y h_j.**

Splines, construcción

- Siguiendo la misma lógica, también definimos $c_n =$
- Aplicando la condición
- Y sabiendo que
- Tenemos que
- *para j=0,..,n-1*. *
- **De aquí podemos despejar d_j en función de c_j, c_{j+1} y h_j.**

Splines, construcción

- Siguiendo la misma lógica, también definimos $c_n = S''(x_n)/2$
- Aplicando la condición
- Y sabiendo que
- Tenemos que
- *para j=0,..,n-1*. *
- **De aquí podemos despejar d_j en función de c_j, c_{j+1} y h_j.**

Splines, construcción

- Siguiendo la misma lógica, también definimos $c_n = S''(x_n)/2$
- Aplicando la condición (e) $S''_{j+1}(x_{j+1}) = S''_j(x_{j+1})$
- Y sabiendo que
- Tenemos que
- *para j=0,..,n-1*. *
- **De aquí podemos despejar d_j en función de c_j, c_{j+1} y h_j.**

Splines, construcción

- Siguiendo la misma lógica, también definimos $c_n = S''(x_n)/2$
- Aplicando la condición (e) $S''_{j+1}(x_{j+1}) = S''_j(x_{j+1})$ $\frac{S''_{j+1}(x_{j+1})}{2} = \frac{S''_j(x_{j+1})}{2}$
- Y sabiendo que
- Tenemos que
- *para j=0,..,n-1*. *
- **De aquí podemos despejar d_j en función de c_j, c_{j+1} y h_j.**

Splines, construcción

- Siguiendo la misma lógica, también definimos $c_n = S''(x_n)/2$
- Aplicando la condición (e) $S''_{j+1}(x_{j+1}) = S''_j(x_{j+1})$ $\frac{S''_{j+1}(x_{j+1})}{2} = \frac{S''_j(x_{j+1})}{2}$
- Y sabiendo que $S''_j(x) = 2c_j + 6d_j(x - x_j)$

$$S''_j(x)/2 = c_j + 3d_j(x - x_j)$$

- Tenemos que
- *para j=0,..,n-1*. *
- **De aquí podemos despejar d_j en función de c_j, c_{j+1} y h_j.**

Splines, construcción

- Siguiendo la misma lógica, también definimos $c_n = S''(x_n)/2$
- Aplicando la condición (e) $S''_{j+1}(x_{j+1}) = S''_j(x_{j+1})$ $\frac{S''_{j+1}(x_{j+1})}{2} = \frac{S''_j(x_{j+1})}{2}$
- Y sabiendo que $S''_j(x) = 2c_j + 6d_j(x - x_j)$

$$S''_j(x)/2 = c_j + 3d_j(x - x_j)$$

- Tenemos que $\boxed{c_{j+1} = c_j + 3d_j h_j,}$
- *para j=0,..,n-1*.

*

- **De aquí podemos despejar d_j en función de c_j, c_{j+1} y h_j.**

Splines, construcción

- Siguiendo la misma lógica, también definimos $c_n = S''(x_n)/2$
- Aplicando la condición (e) $S''_{j+1}(x_{j+1}) = S''_j(x_{j+1})$ $\quad \frac{S''_{j+1}(x_{j+1})}{2} = \frac{S''_j(x_{j+1})}{2}$
- Y sabiendo que $S''_j(x) = 2c_j + 6d_j(x - x_j)$

$$S''_j(x)/2 = c_j + 3d_j(x - x_j)$$

- Tenemos que $\boxed{c_{j+1} = c_j + 3d_j h_j,}$
- *para j=0,..,n-1*.

$*$

- **De aquí podemos despejar d_j en función de c_j, c_{j+1} y h_j.**

Splines, construcción

- Substituimos d_j en: $$a_{j+1} = a_j + b_j h_j + c_j h_j^2 + d_j h_j^3$$
- quedando: $$\boxed{a_{j+1} = a_j + b_j h_j + \frac{h_j^2}{3}(2c_j + c_{j+1})}$$
- Substituimos d_j en:
- quedando:
- *para j=0,..,n-1*.

Splines, construcción

- Substituimos d_j en: $$a_{j+1} = a_j + b_j h_j + c_j h_j^2 + d_j h_j^3$$
- quedando: $$\boxed{a_{j+1} = a_j + b_j h_j + \frac{h_j^2}{3}(2c_j + c_{j+1})}$$
- Substituimos d_j en: $$b_{j+1} = b_j + 2c_j h_j + 3d_j h_j^2,$$
- quedando:
- *para j=0,..,n-1*.

Splines, construcción

- Substituimos d_j en: $a_{j+1} = a_j + b_j h_j + c_j h_j^2 + d_j h_j^3$
- quedando: $$\boxed{a_{j+1} = a_j + b_j h_j + \frac{h_j^2}{3}(2c_j + c_{j+1})}$$
- Substituimos d_j en: $b_{j+1} = b_j + 2c_j h_j + 3d_j h_j^2,$
- quedando: $$\boxed{b_{j+1} = b_j + h_j(c_j + c_{j+1})}$$
- *para j=0,..,n-1*.

Splines, construcción

- Despejando b_j de

$$a_{j+1} = a_j + b_j h_j + \frac{h_j^2}{3}(2c_j + c_{j+1})$$

$$b_j = \frac{1}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{h_j}{3}(2c_j + c_{j+1}),$$

- y calculándola para b_{j-1} tenemos:

Splines, construcción

- Despejando b_j de

$$a_{j+1} = a_j + b_j h_j + \frac{h_j^2}{3}(2c_j + c_{j+1})$$

$$b_j = \frac{1}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{h_j}{3}(2c_j + c_{j+1}),$$

- y calculándola para b_{j-1} tenemos:

$$b_{j-1} = \frac{1}{h_{j-1}}(a_j - a_{j-1}) - \frac{h_{j-1}}{3}(2c_{j-1} + c_j).$$

Splines, construcción

- Sustituyendo

$$\boxed{b_{j-1} = \frac{1}{h_{j-1}}(a_j - a_{j-1}) - \frac{h_{j-1}}{3}(2c_{j-1} + c_j).}$$

$$\boxed{b_j = \frac{1}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{h_j}{3}(2c_j + c_{j+1}),}$$

- en

*

- para el indice j **reducido en 1** en la roja, da el SEL

- para *j=1,..,n-1*, involucrando c_j, *j*=0,..,n.

Splines, construcción

- Sustituyendo

$$\boxed{b_{j-1} = \frac{1}{h_{j-1}}(a_j - a_{j-1}) - \frac{h_{j-1}}{3}(2c_{j-1} + c_j).}$$

$$\boxed{b_j = \frac{1}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{h_j}{3}(2c_j + c_{j+1}),}$$

- en

$$\boxed{b_{j+1} = b_j + h_j(c_j + c_{j+1})}$$

*

- para el indice j **reducido en 1** en la roja, da el SEL

- para *j=1,..,n-1*, involucrando c_j, *j*=0,..,n.

Splines, construcción

- Sustituyendo

$$\boxed{b_{j-1} = \frac{1}{h_{j-1}}(a_j - a_{j-1}) - \frac{h_{j-1}}{3}(2c_{j-1} + c_j).}$$

$$\boxed{b_j = \frac{1}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{h_j}{3}(2c_j + c_{j+1}),}$$

- en

$$\boxed{b_{j+1} = b_j + h_j(c_j + c_{j+1})}$$

*

- para el indice j **reducido en 1** en la roja, da el SEL

$$h_{j-1}\underline{c_{j-1}} + 2(h_{j-1} + h_j)\underline{c_j} + h_j\underline{c_{j+1}} = \frac{3}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{3}{h_{j-1}}(a_j - a_{j-1})$$

- para $j=1,..,n-1$, involucrando c_j, $j=0,..,n$.

Splines, construcción

- Una vez que se han encontrado los c_j, j=0,..,n, se encuentran los coeficientes b's y d's de

*

- y

- respectivamente

Splines, construcción

- Una vez que se han encontrado los c_j, j=0,..,n, se encuentran los coeficientes b's y d's de

$$\boxed{b_j = \frac{1}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{h_j}{3}(2c_j + c_{j+1}),} \qquad *$$

- y

- respectivamente

Splines, construcción

- Una vez que se han encontrado los c_j, j=0,..,n, se encuentran los coeficientes b's y d's de

$$\boxed{b_j = \frac{1}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{h_j}{3}(2c_j + c_{j+1}),} \qquad *$$

- y

$$\boxed{c_{j+1} = c_j + 3d_j h_j,}$$

- respectivamente

Splines, construcción

- En el caso de frontera fija, se necesitan las ecuaciones que garantizan $S'(x_0)= f'(x_0)$ y $S'(x_n)= f'(x_n)$. Sabemos que $S'(x_0) = f'(x_0) = b_0$ de la ecuación

- Por otro lado, de

- donde sustituimos b_{n-1} de para $j=n-1$

Splines, construcción

- En el caso de frontera fija, se necesitan las ecuaciones que garantizan $S'(x_0)= f'(x_0)$ y $S'(x_n)= f'(x_n)$. Sabemos que $S'(x_0) = f'(x_0) = b_0$ de la ecuación

$$f'(x_0) = \frac{1}{h_0}(a_1 - a_0) - \frac{h_0}{3}(2c_0 + c_1)$$

- Por otro lado, de

- donde sustituimos b_{n-1} de para $j=n-1$

Splines, construcción

- En el caso de frontera fija, se necesitan las ecuaciones que garantizan S'(x_0)= f'(x_0) y S'(x_n)= f'(x_n). Sabemos que $S'(x_0) = f'(x_0) = b_0$ de la ecuación

$$f'(x_0) = \frac{1}{h_0}(a_1 - a_0) - \frac{h_0}{3}(2c_0 + c_1)$$

$$2h_0c_0 + h_0c_1 = \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) - 3f'(x_0)$$

- Por otro lado, de

- donde sustituimos b_{n-1} de para $j=n-1$

Splines, construcción

- En el caso de frontera fija, se necesitan las ecuaciones que garantizan S'(x_0)= f'(x_0) y S'(x_n)= f'(x_n). Sabemos que $S'(x_0) = f'(x_0) = b_0$ de la ecuación

$$f'(x_0) = \frac{1}{h_0}(a_1 - a_0) - \frac{h_0}{3}(2c_0 + c_1)$$

$$2h_0c_0 + h_0c_1 = \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) - 3f'(x_0)$$

- Por otro lado, de $f'(x_n) = b_n = b_{n-1} + h_{n-1}(c_{n-1} + c_n)$

- donde sustituimos b_{n-1} de para j=n-1

Splines, construcción

- En el caso de frontera fija, se necesitan las ecuaciones que garantizan $S'(x_0)= f'(x_0)$ y $S'(x_n)= f'(x_n)$. Sabemos que $S'(x_0) = f'(x_0) = b_0$ de la ecuación

$$f'(x_0) = \frac{1}{h_0}(a_1 - a_0) - \frac{h_0}{3}(2c_0 + c_1)$$

$$2h_0c_0 + h_0c_1 = \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) - 3f'(x_0)$$

- Por otro lado, de $f'(x_n) = b_n = b_{n-1} + h_{n-1}(c_{n-1} + c_n)$

- donde sustituimos b_{n-1} de para $j=n-1$

$$f'(x_n) = \frac{a_n - a_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{h_{n-1}}{3}(2c_{n-1} + c_n) + h_{n-1}(c_{n-1} + c_n)$$

Splines, construcción

- En el caso de frontera fija, se necesitan las ecuaciones que garantizan $S'(x_0) = f'(x_0)$ y $S'(x_n) = f'(x_n)$. Sabemos que $S'(x_0) = f'(x_0) = b_0$ de la ecuación

$$f'(x_0) = \frac{1}{h_0}(a_1 - a_0) - \frac{h_0}{3}(2c_0 + c_1)$$

$$2h_0c_0 + h_0c_1 = \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) - 3f'(x_0)$$

- Por otro lado, de $f'(x_n) = b_n = b_{n-1} + h_{n-1}(c_{n-1} + c_n)$

- donde sustituimos b_{n-1} de para $j=n-1$

$$f'(x_n) = \frac{a_n - a_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{h_{n-1}}{3}(2c_{n-1} + c_n) + h_{n-1}(c_{n-1} + c_n)$$

$$h_{n-1}c_{n-1} + 2h_{n-1}c_n = 3f'(x_n) - \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}).$$

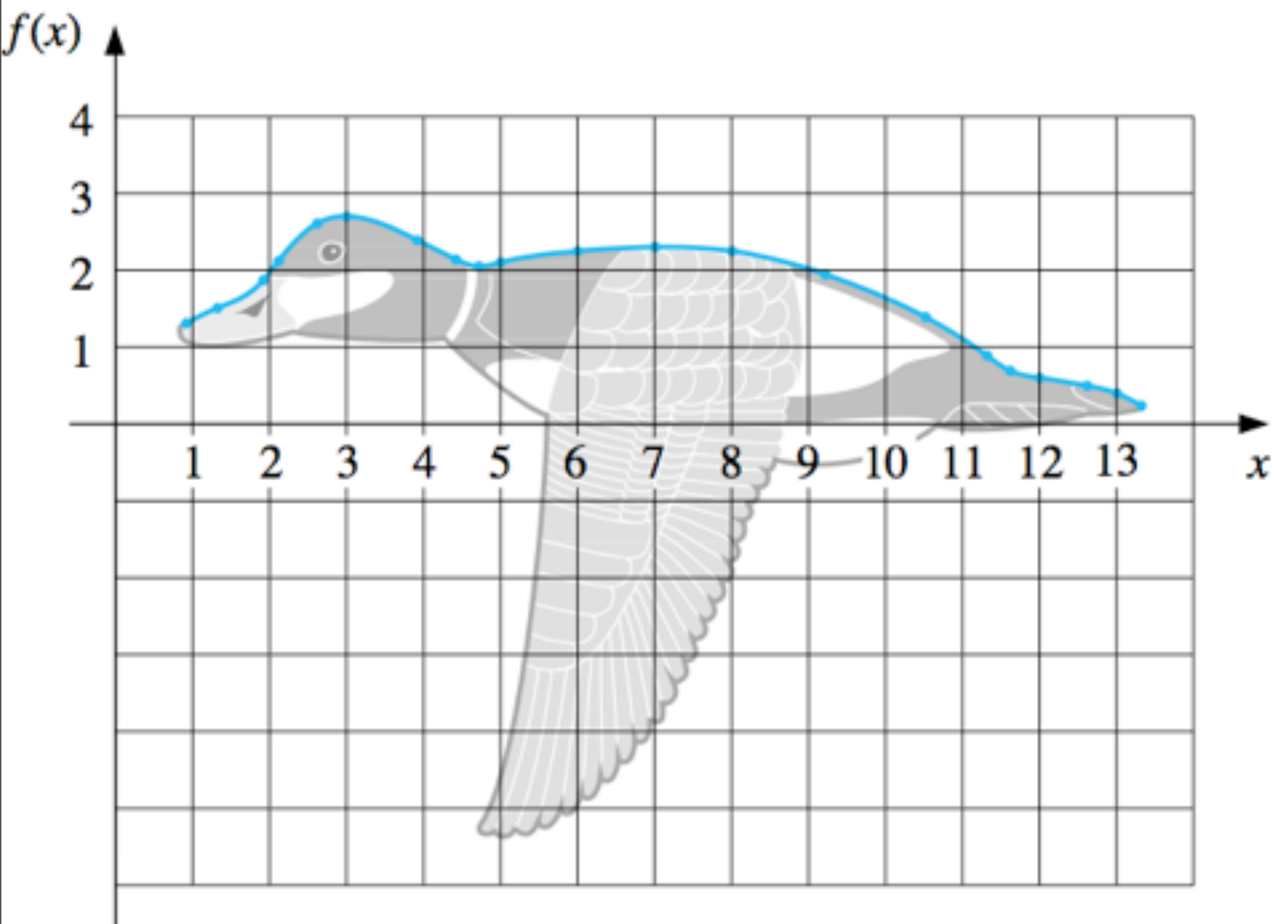
Splines, construcción

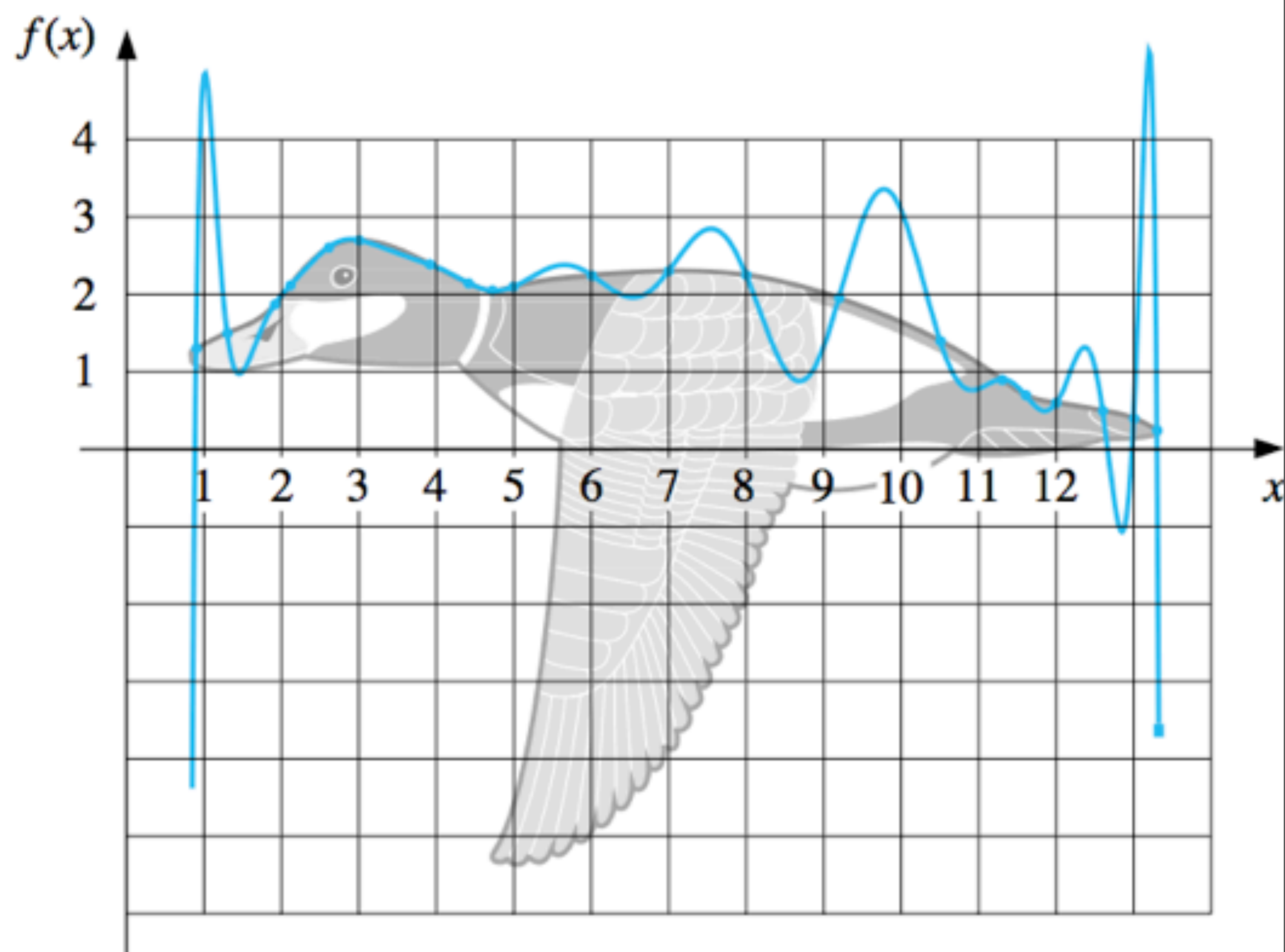
- Dimensiones

  - Por ejemplo en un problema de 3 puntos con 2 segmentos, tenemos un sistema de 2 ecuaciones con 4 incógnitas, para frontera fija agregamos 2 ecuaciones mas sobre las derivadas $f'(x_0) = s'(x_0) \quad f'(x_3) = s'(x_3)$

  - Como cada polinomio S_i (i=0,..,n-1) tiene 4 parámetros, tenemos que estimar 4n incóngnitas: las restriciones (a), (b), (c), (d) y (e) sobre S en [a,b] hacen única la estimación del spline.

Ejemplos de splines vs p. de Lagrange





Tarea

- Indicar la forma del SEL para encontrar los coeficientes c_j para la condición de frontera libre.

- Explicar la deducción y condiciones de los splines cuadráticos.