Integración Numérica. Regla de Simpson.

MAT-251

Dr. Alonso Ramírez Manzanares
CIMAT A.C.
e-mail: alram@cimat.mx
web: http://www.cimat.mx/~alram/met_num/

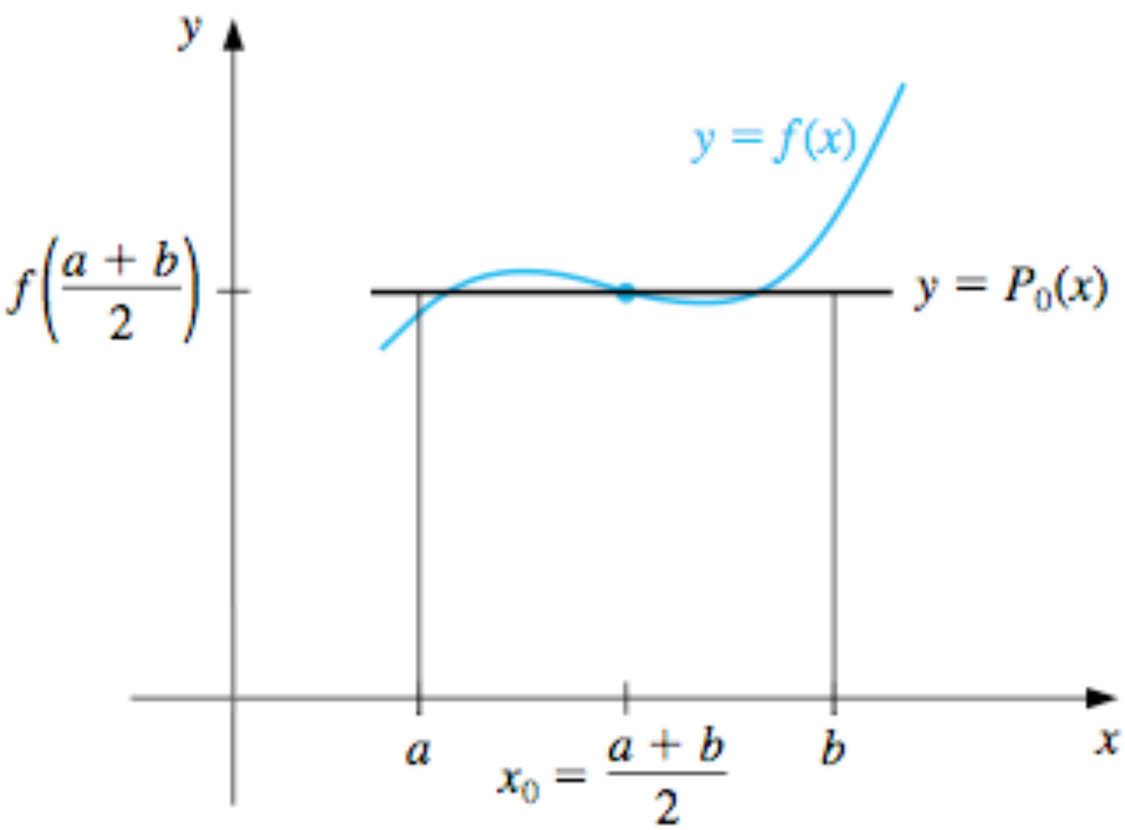
Dr. Salvador Botello
CIMAT A.C.
e-mail: botello@cimat.mx

Lo que ya se vió

- Vimos que para integrar numéricamente un función, le ajustamos un polinomio y lo integramos numéricamente en un intervalo h. Los interpoladores que usamos son sencillos de tal manera que suponemos que h es pequeño y que un polinomio de bajo orden puede capturar la complejidad de la función. Notamos que si disminuye el valor de h, aumenta la precisión.

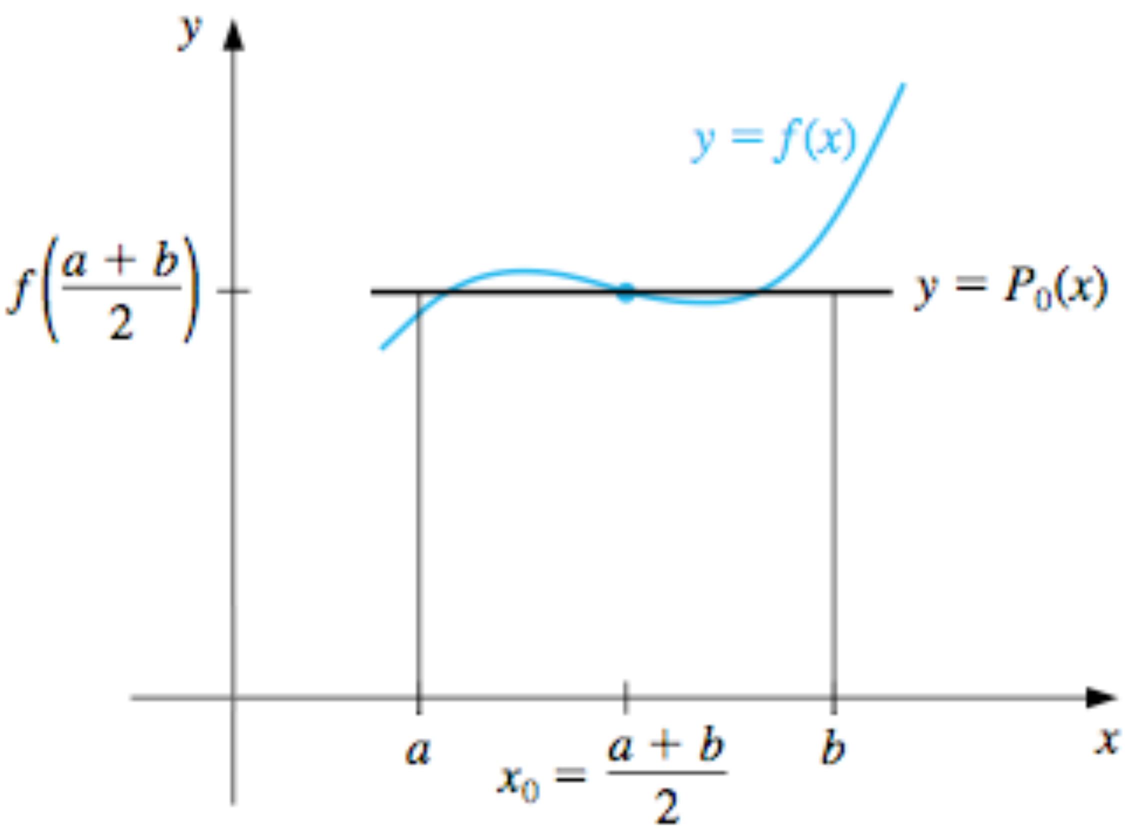
Lo que ya se vió

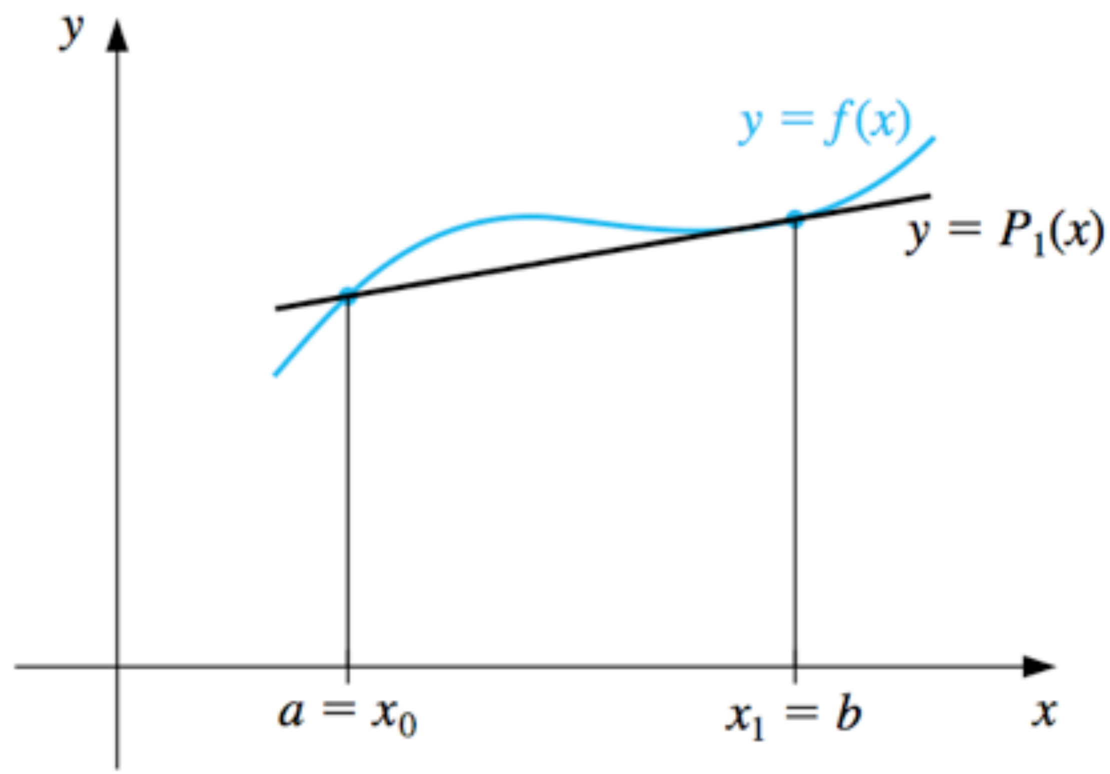
- Vimos que para integrar numéricamente un función, le ajustamos un polinomio y lo integramos numéricamente en un intervalo *h*. Los interpoladores que usamos son sencillos de tal manera que suponemos que *h* es pequeño y que un polinomio de bajo orden puede capturar la complejidad de la función. Notamos que si disminuye el valor de *h*, aumenta la precisión.



Lo que ya se vió

- Vimos que para integrar numéricamente un función, le ajustamos un polinomio y lo integramos numéricamente en un intervalo *h*. Los interpoladores que usamos son sencillos de tal manera que suponemos que *h* es pequeño y que un polinomio de bajo orden puede capturar la complejidad de la función. Notamos que si disminuye el valor de *h*, aumenta la precisión.





Idea general de integración numérica

- Lo que hacemos en general es que ajustamos un polinomio de Lagrange en el intervalo [a,b]

$$P_n(x) = f(x_0)L_{n,0}(x) + \cdots + f(x_n)L_{n,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)L_{n,k}(x),$$

- Y sabemos que el error es en general

Idea general de integración numérica

- Lo que hacemos en general es que ajustamos un polinomio de Lagrange en el intervalo [a,b]

$$P_n(x) = f(x_0)L_{n,0}(x) + \cdots + f(x_n)L_{n,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)L_{n,k}(x),$$

$$L_{n,k}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

- Y sabemos que el error es en general

Idea general de integración numérica

- Lo que hacemos en general es que ajustamos un polinomio de Lagrange en el intervalo [a,b]

$$P_n(x) = f(x_0)L_{n,0}(x) + \cdots + f(x_n)L_{n,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)L_{n,k}(x),$$

$$L_{n,k}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

$$= \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)}$$

- Y sabemos que el error es en general

Idea general de integración numérica

- Lo que hacemos en general es que ajustamos un polinomio de Lagrange en el intervalo [a,b]

$$P_n(x) = f(x_0)L_{n,0}(x) + \cdots + f(x_n)L_{n,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)L_{n,k}(x),$$

$$L_{n,k}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

$$= \prod_{i=0,i\neq k}^{n} \frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)}$$

- Y sabemos que el error es en general

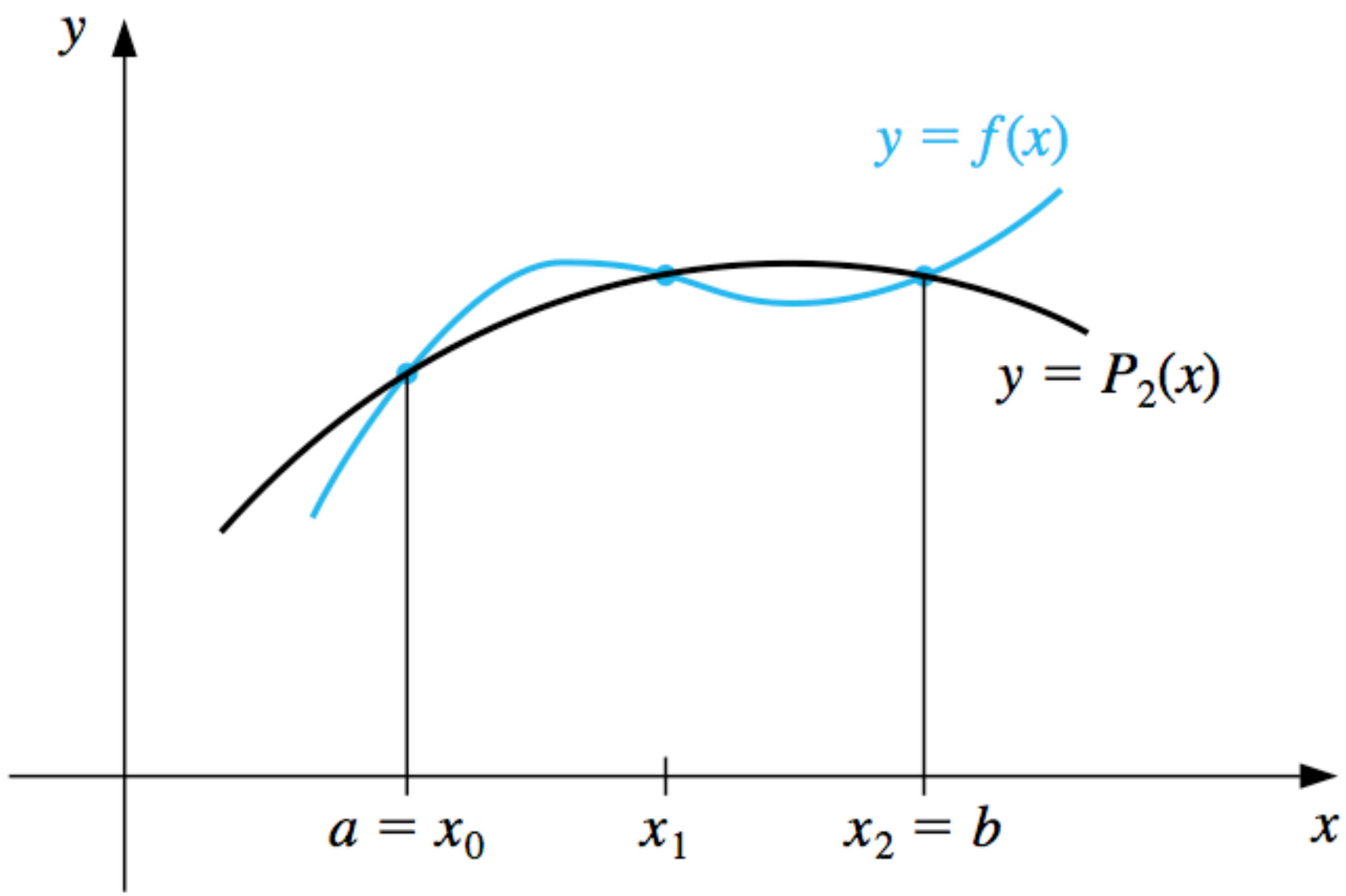
$$f(x) - P_{0,1,\ldots,n}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n),$$

Regla de Simpson

- La idea ahora es ajustar un polinomio de grado 2 a las observaciones

Regla de Simpson

- La idea ahora es ajustar un polinomio de grado 2 a las observaciones



Regla de Simpson

- Para la deducción, sin pérdida de generalidad vamos a integrar una función en el intervalo $[-h,h]$, usando también el punto intermedio $x = 0$.

- Interpolamos la función con el polinomio cuadrático

- Pasando por los puntos

Regla de Simpson

- Para la deducción, sin pérdida de generalidad vamos a integrar una función en el intervalo [-*h*,*h*], usando también el punto intermedio *x* = 0.
- Interpolamos la función con el polinomio cuadrático $y = ax^2 + bx + c$
- Pasando por los puntos

Regla de Simpson

- Para la deducción, sin pérdida de generalidad vamos a integrar una función en el intervalo [-h,h], usando también el punto intermedio x = 0.

- Interpolamos la función con el polinomio cuadrático $y = ax^2 + bx + c$

- Pasando por los puntos

$$(-h, y_0),\ (0, y_1),\ (h, y_2).$$

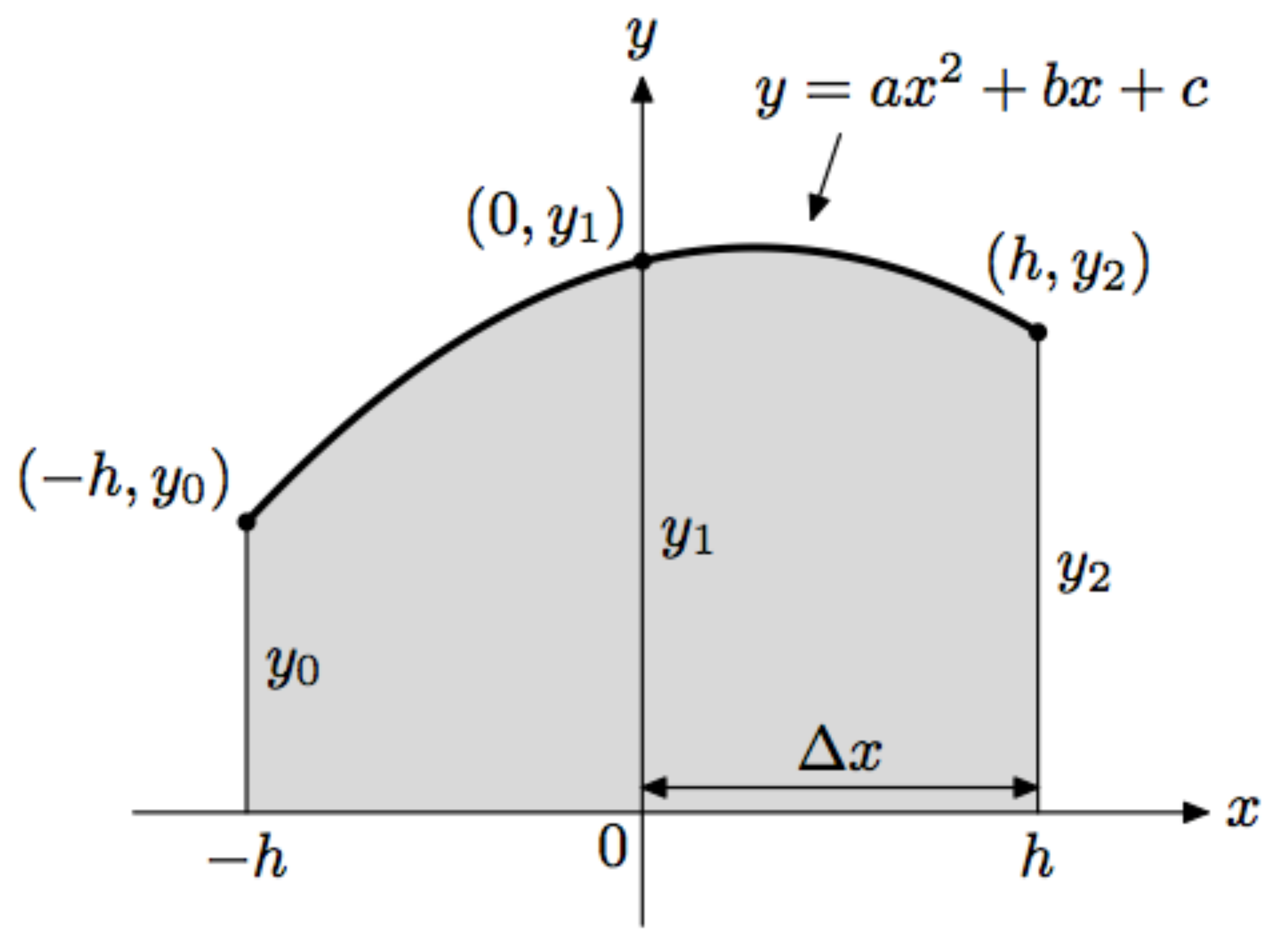
Regla de Simpson

- Para la deducción, sin pérdida de generalidad vamos a integrar una función en el intervalo [-*h*,*h*], usando también el punto intermedio *x* = 0.

- Interpolamos la función con el polinomio cuadrático $y = ax^2 + bx + c$

- Pasando por los puntos

$$(-h, y_0),\ (0, y_1),\ (h, y_2).$$



Regla de Simpson

- Una vez que hemos ajustado el polinomio cuadrático, podemos calcular el área de manera mas fácil como:

Esto queda en términos de a y c

Regla de Simpson

- Una vez que hemos ajustado el polinomio cuadrático, podemos calcular el área de manera mas fácil como:

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-h}^{h} (ax^2 + bx + c)\, dx \\
&= \left(\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx \right) \Bigg|_{-h}^{h} \\
&= \frac{2ah^3}{3} + 2ch \\
&= \underline{\frac{h}{3} \left(2ah^2 + 6c \right)}
\end{aligned}
$$

Esto queda en términos de a y c

Regla de Simpson

- Y nótese que los puntos usados para la interpolación pertenecen a la parábola, por lo tanto:

- Si de manera conveniente calculamos:

Regla de Simpson

- Y nótese que los puntos usados para la interpolación pertenecen a la parábola, por lo tanto:

$$y_0 = ah^2 - bh + c$$
$$y_1 = c$$
$$y_2 = ah^2 + bh + c$$

- Si de manera conveniente calculamos:

Regla de Simpson

- Y nótese que los puntos usados para la interpolación pertenecen a la parábola, por lo tanto:

$$y_0 = ah^2 - bh + c$$
$$y_1 = c$$
$$y_2 = ah^2 + bh + c$$

- Si de manera conveniente calculamos:

$$y_0 + 4y_1 + y_2 =$$

Regla de Simpson

- Y nótese que los puntos usados para la interpolación pertenecen a la parábola, por lo tanto:

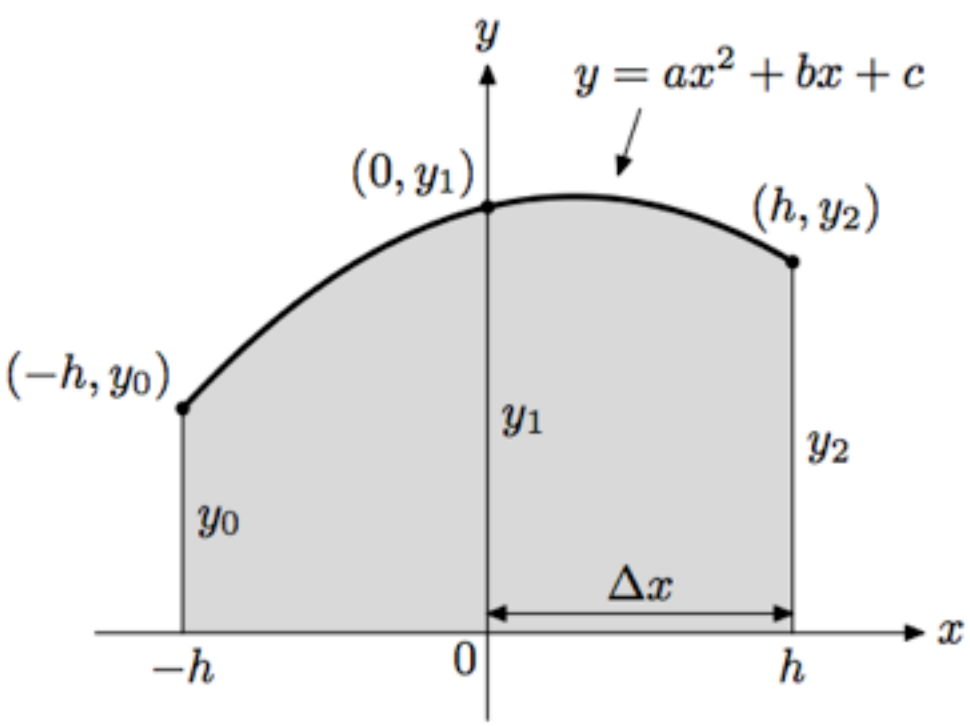
$$y_0 = ah^2 - bh + c$$
$$y_1 = c$$
$$y_2 = ah^2 + bh + c$$

- Si de manera conveniente calculamos:

$$y_0 + 4y_1 + y_2 = (ah^2 - bh + c) + 4c + (ah^2 + bh + c) = 2ah^2 + 6c.$$

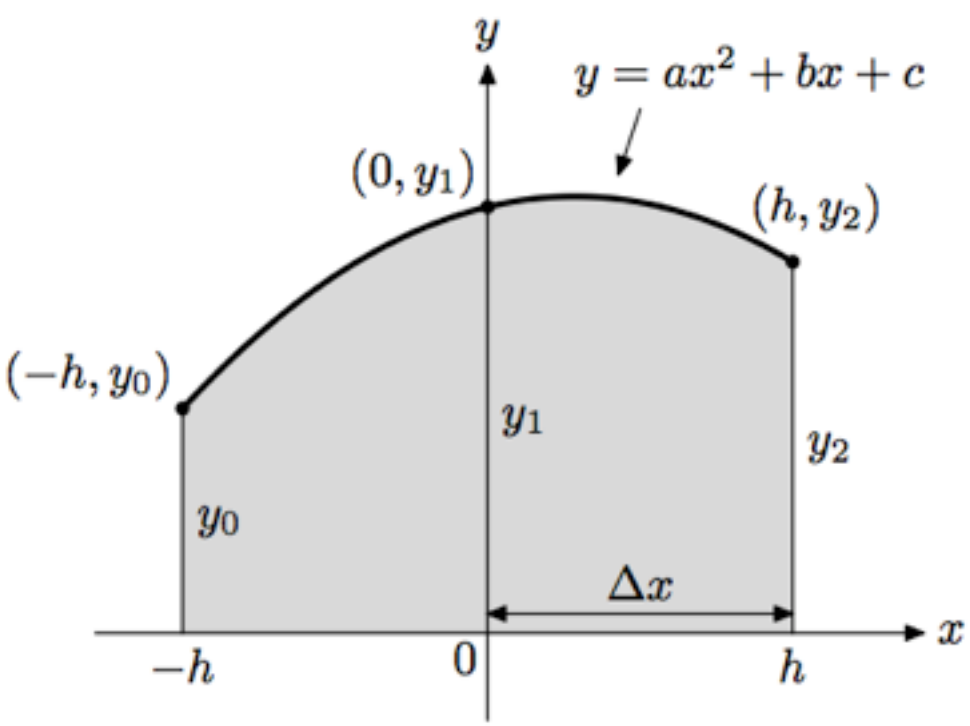
Regla de Simpson

- Por lo tanto, el área bajo la parábola es



Regla de Simpson

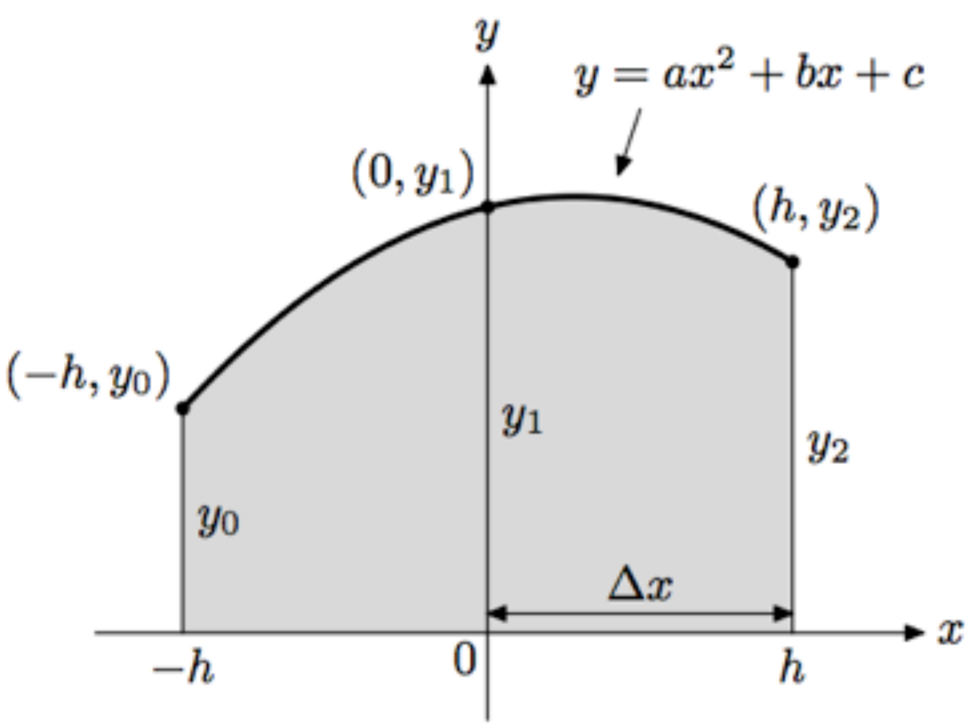
- Por lo tanto, el área bajo la parábola es



$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-h}^{h} (ax^2 + bx + c)\ dx \\
&= \left(\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx \right) \Bigg|_{-h}^{h} \\
&= \frac{2ah^3}{3} + 2ch \\
&= \frac{h}{3}\left(2ah^2 + 6c\right)
\end{aligned}
$$

Regla de Simpson

- Por lo tanto, el área bajo la parábola es



$$A = \int_{-h}^{h} (ax^2 + bx + c)\; dx$$

$$= \left(\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx\right)\Bigg|_{-h}^{h}$$

$$= \frac{2ah^3}{3} + 2ch$$

$$= \frac{h}{3}\left(2ah^2 + 6c\right)$$

$$A = \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right) = \frac{\Delta x}{3}\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right).$$

Regla de Simpson

- La forma alternativa es presentarlo en el resultado para el intervalo [a,b], donde el punto intermedio de evaluación es $x_m=(a+b)/2$.

Regla de Simpson

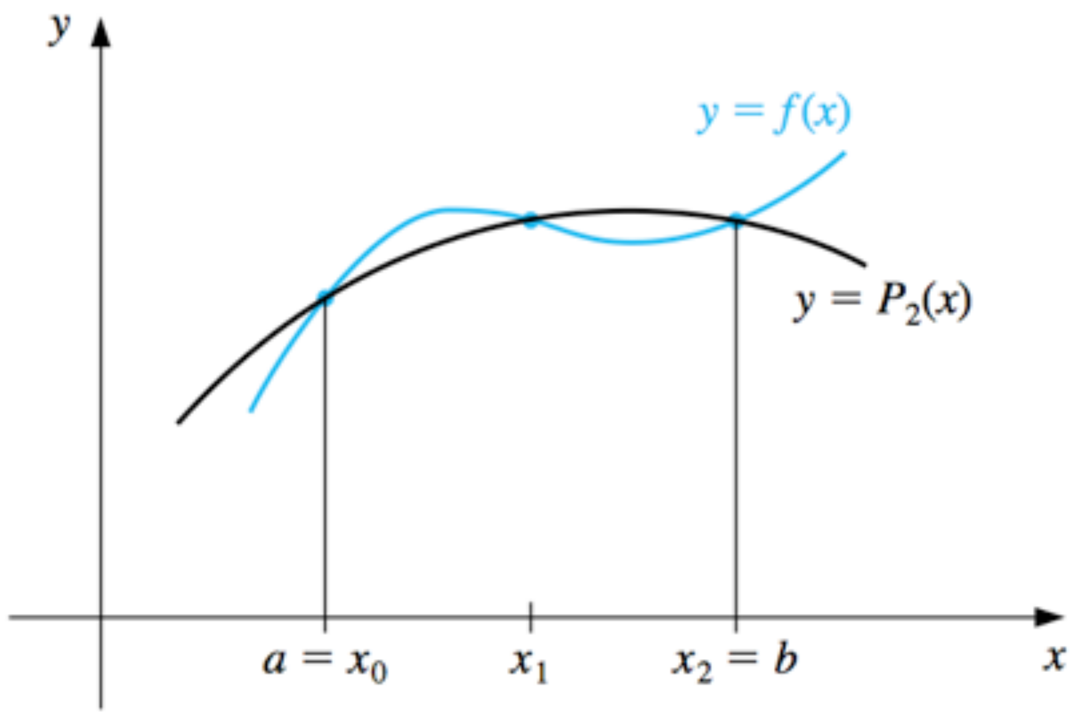
- La forma alternativa es presentarlo en el resultado para el intervalo [a,b], donde el punto intermedio de evaluación es $x_m=(a+b)/2$.

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{(b-a)}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$$

Regla de Simpson

- La forma alternativa es presentarlo en el resultado para el intervalo [a,b], donde el punto intermedio de evaluación es $x_m=(a+b)/2$.

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{(b-a)}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$$



Aplicación de la regla de Simpson

- Consideremos la integral definida para la función continua *f(x)*:

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

- Dividimos el intervalo en ***n*** intervalos equi-distribuidos (con ***n*** par)

- Lo cual nos genera los ***n+1*** puntos

- Con las evaluaciones

Aplicación de la regla de Simpson

- Consideremos la integral definida para la función continua *f(x)*:

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

- Dividimos el intervalo en ***n*** intervalos equi-distribuidos (con ***n*** par) $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$

- Lo cual nos genera los ***n+1*** puntos

- Con las evaluaciones

Aplicación de la regla de Simpson

- Consideremos la integral definida para la función continua *f(x)*:

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

- Dividimos el intervalo en ***n*** intervalos equi-distribuidos (con ***n*** par) $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

- Lo cual nos genera los ***n+1*** puntos

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + \Delta x, \quad x_2 = a + 2\Delta x, \quad \ldots, \quad x_n = a + n\Delta x = b.$$

- Con las evaluaciones

Aplicación de la regla de Simpson

- Consideremos la integral definida para la función continua *f(x)*:

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

- Dividimos el intervalo en ***n*** intervalos equi-distribuidos (con ***n*** par) $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

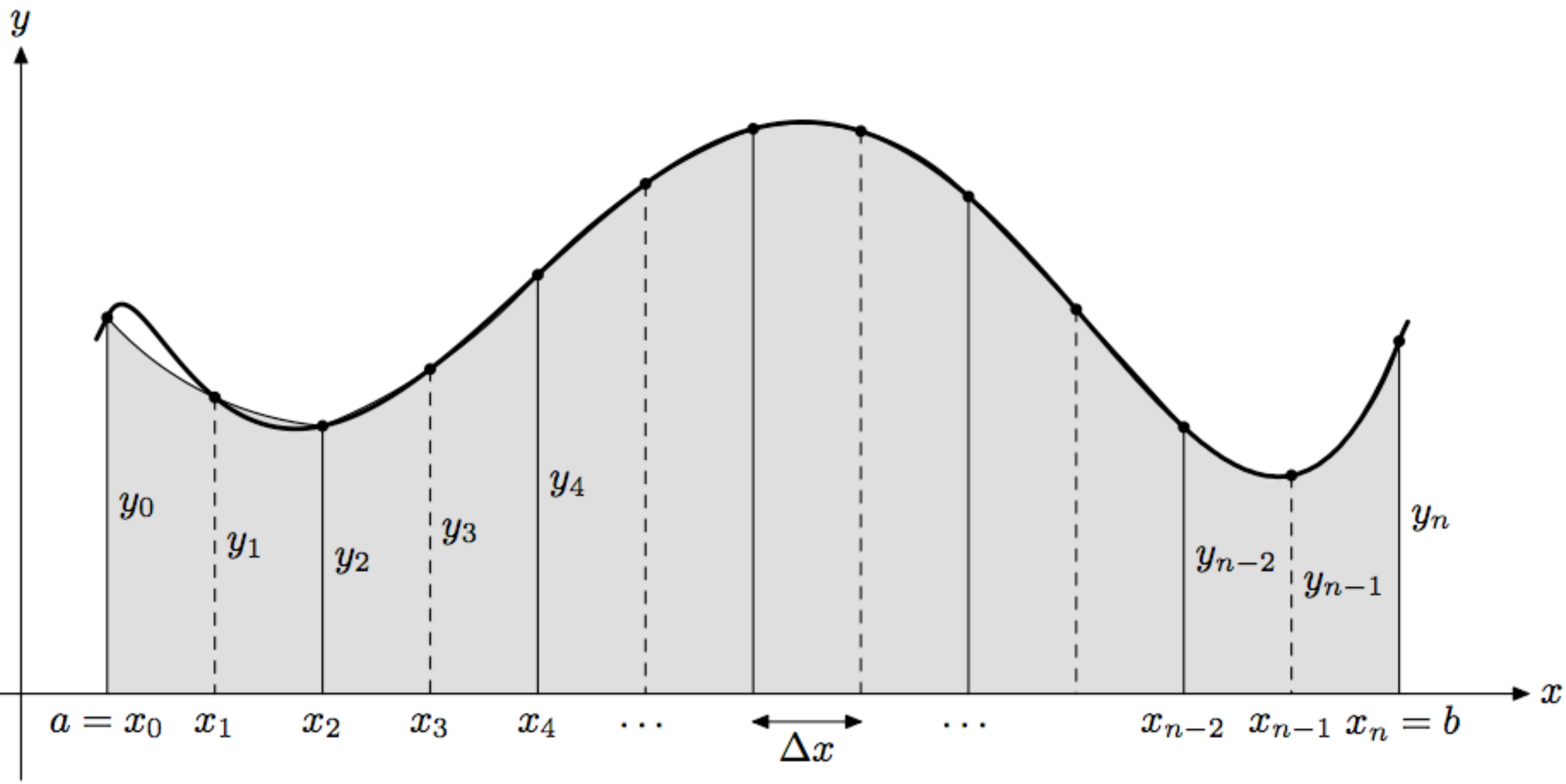
- Lo cual nos genera los ***n+1*** puntos

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + \Delta x, \quad x_2 = a + 2\Delta x, \quad \ldots, \quad x_n = a + n\Delta x = b.$$

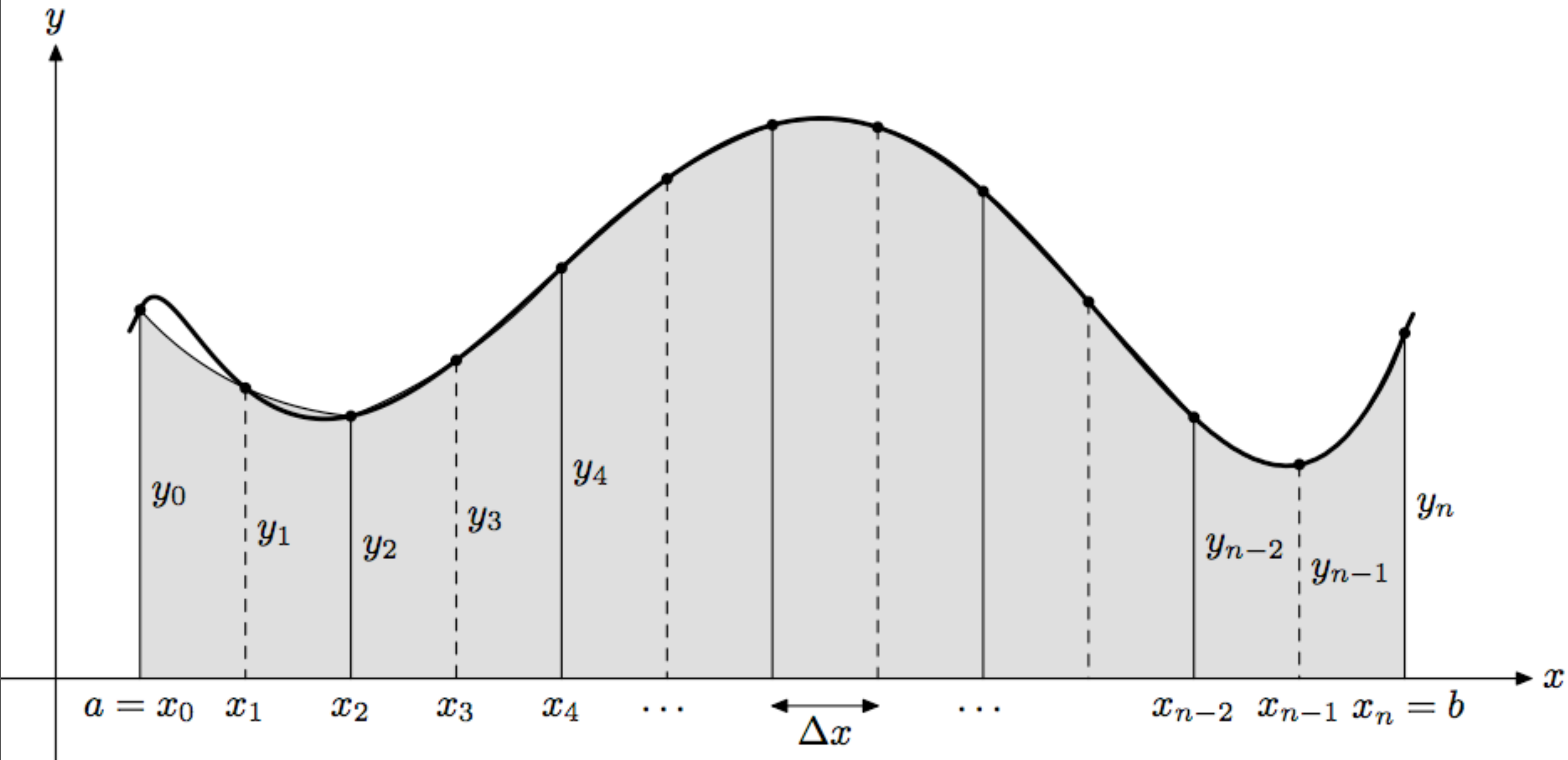
- Con las evaluaciones

$$y_0 = f(x_0), \quad y_1 = f(x_1), \quad y_2 = f(x_2), \quad \ldots, \quad y_n = f(x_n).$$

Aplicación de la regla de Simpson



Aplicación de la regla de Simpson



$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{\Delta x}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \cdots + \frac{\Delta x}{3}(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

Aplicación de la regla de Simpson

- Simplificando la fórmula nos queda

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{3}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 4y_{n-1} + y_n\right)}$$

Aplicación de la regla de Simpson

- Simplificando la fórmula nos queda

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{3}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 4y_{n-1} + y_n\right)}$$

$$\int_a^b f(x) = \frac{\Delta x}{3}\left[f(x_0) + 2\sum_{j=1}^{(n/2)-1} f(x_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{n/2} f(x_{2j-1}) + f(x_n)\right]$$

Ejemplo

- Evaluar con ***n***=6 la siguiente integral $$\int_1^4 \sqrt{1+x^3}\, dx.$$
- Tenemos que
- Y calculamos (solo necesitamos evaluar *f(x)*)
- Quedando:

Ejemplo

- Evaluar con ***n***=6 la siguiente integral $$\int_1^4 \sqrt{1+x^3}\,dx.$$

- Tenemos que $$\Delta x = \frac{4-1}{6} = 0.5.$$

- Y calculamos (solo necesitamos evaluar *f(x)*)

- Quedando:

Ejemplo

- Evaluar con ***n***=6 la siguiente integral $$\int_1^4 \sqrt{1+x^3}\, dx.$$
- Tenemos que $$\Delta x = \frac{4-1}{6} = 0.5.$$
- Y calculamos (solo necesitamos evaluar *f(x)*)

x	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
$y=\sqrt{1+x^3}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{4.375}$	3	$\sqrt{16.625}$	$\sqrt{28}$	$\sqrt{43.875}$	$\sqrt{65}$

- Quedando:

Ejemplo

- Evaluar con ***n***=6 la siguiente integral $$\int_1^4 \sqrt{1+x^3}\,dx.$$

- Tenemos que $$\Delta x = \frac{4-1}{6} = 0.5.$$

- Y calculamos (solo necesitamos evaluar *f(x)*)

x	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
$y=\sqrt{1+x^3}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{4.375}$	3	$\sqrt{16.625}$	$\sqrt{28}$	$\sqrt{43.875}$	$\sqrt{65}$

- Quedando:

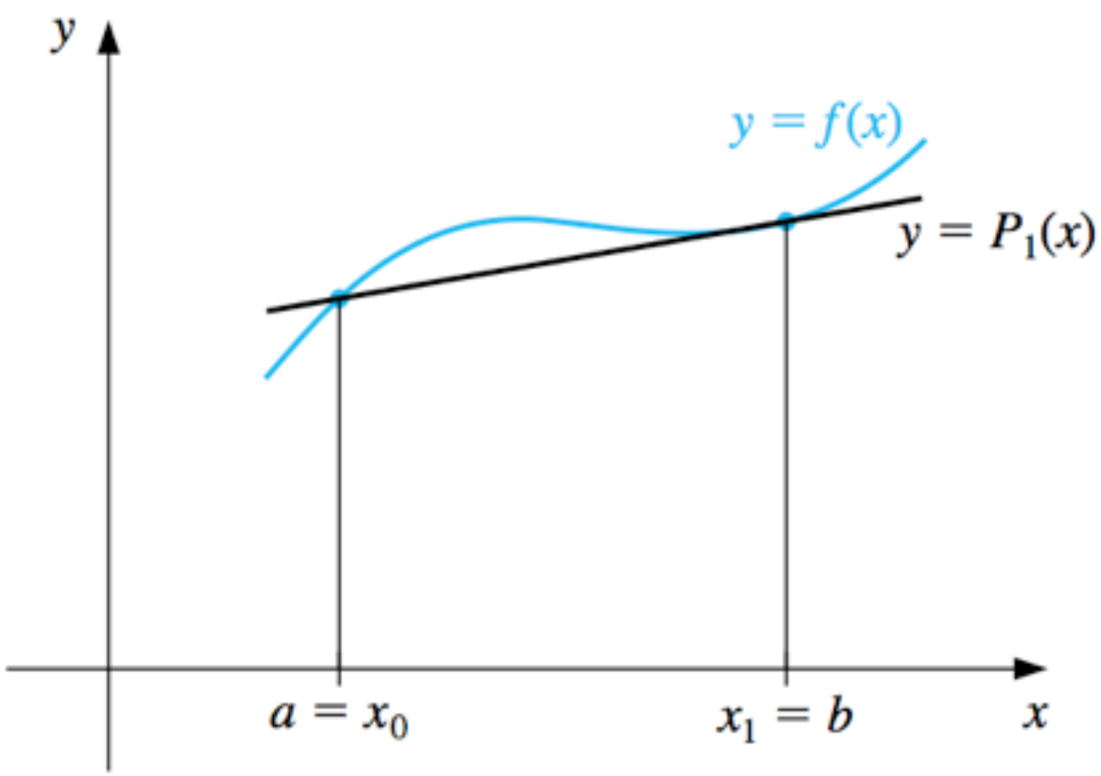
$$\int_1^4 \sqrt{1+x^3}\,dx \approx \frac{0.5}{3}\left(\sqrt{2}+4\sqrt{4.375}+2(3)+4\sqrt{16.625}+2\sqrt{28}+4\sqrt{43.875}+\sqrt{65}\right)$$
$$\approx \boxed{12.871}$$

Integrando lo anterior simbólicamente con Matlab

- *(2*x*(x^3 + 1)^(1/2))/5 + (6*((3^(1/2)*i)/2 + 3/2)*((x + (3^(1/2)*i)/2 - 1/2)/((3^(1/2)*i)/2 - 3/2))^(1/2)*((x + 1)/((3^(1/2)*i)/2 + 3/2))^(1/2)*((1/2 + (3^(1/2)*i)/2 - x)/((3^(1/2)*i)/2 + 3/2))^(1/2)*ellipticF(asin(((x + 1)/((3^(1/2)*i)/2 + 3/2))^(1/2)), -((3^(1/2)*i)/2 + 3/2)/((3^(1/2)*i)/2 - 3/2)))/(5*(- (3^(1/2)*(i/2) - 1/2)*(3^(1/2)*(i/2) + 1/2) - x*((3^(1/2)*(i/2) - 1/2)*(3^(1/2)*(i/2) + 1/2) + 1) + x^3)^(1/2))*

Errores de aproximación

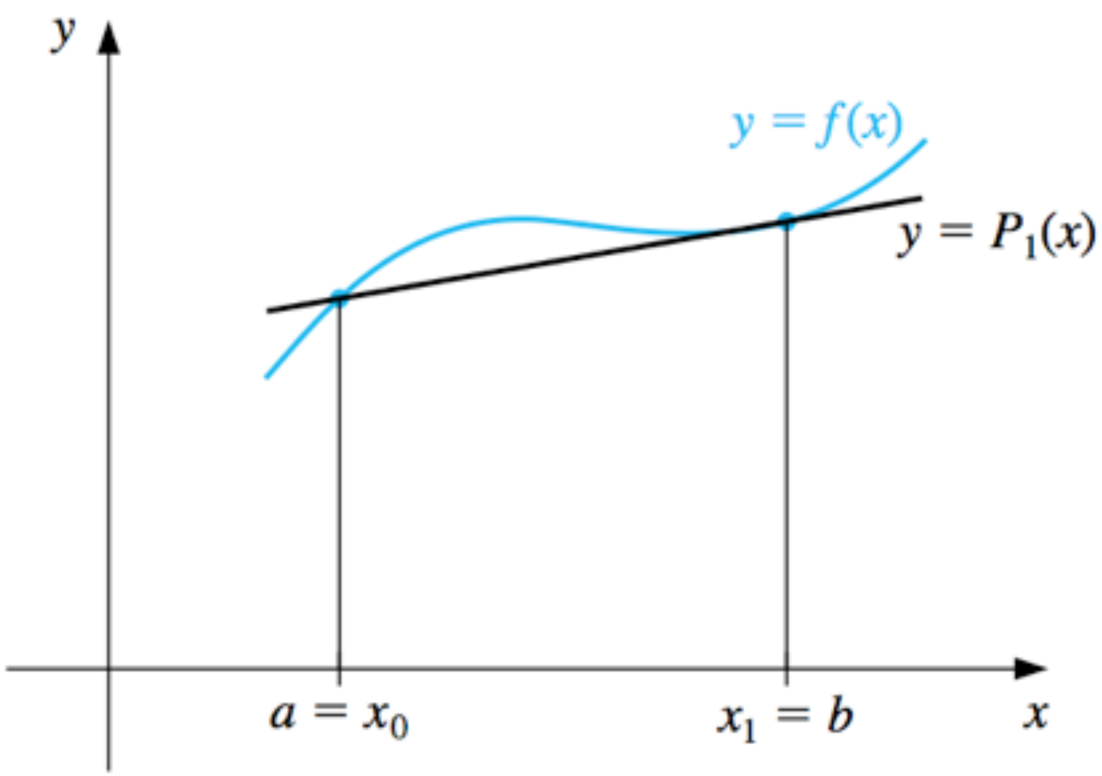
- Cuando:



$$-\frac{h^3}{12}f''(\xi_i)$$

Errores de aproximación

- Cuando:



$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{f''(\xi)}{12}(b-a)^3.$$

$$-\frac{h^3}{12}f''(\xi_i)$$

Ventajas en términos de errores de aproximación

- Para la integración por el método de Simpson, si $f \in C^4[a,b]$, entonces existe un número ξ en (a,b) tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{(b-a)}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] - \frac{f^{(4)}(\xi)}{2880}(b-a)^5.$$

Ventajas en términos de errores de aproximación

- Para la integración por el método de Simpson, si f $\in$ C^4[a,b], entonces existe un número ξ en (a,b) tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{(b-a)}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] - \frac{f^{(4)}(\xi)}{2880}(b-a)^5.$$

$$E(\xi) = \frac{f^4(\xi)}{2^5 90} 2^5 h^5$$

Ventajas en términos de errores de aproximación

- Herramientas para obtener cota aprox. : Usamos la expansión de series de Taylor de la función f(x) alrededor de x_1.

1

Ventajas en términos de errores de aproximación

- Herramientas para obtener cota aprox. : Usamos la expansión de series de Taylor de la función f(x) alrededor de x_1.

$$f(x) = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1) + \frac{f''(x_1)}{2}(x - x_1)^2 + \frac{f'''(x_1)}{6}(x - x_1)^3 + \frac{f^{(4)}(\xi(x))}{24}(x - x_1)^4$$

y

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = \left[f(x_1)(x - x_1) + \frac{f'(x_1)}{2}(x - x_1)^2 + \frac{f''(x_1)}{6}(x - x_1)^3 + \frac{f'''(x_1)}{24}(x - x_1)^4 \right]_{x_0}^{x_2} + \frac{1}{24}\int_{x_0}^{x_2} f^{(4)}(\xi(x))(x - x_1)^4\,dx.$$

Ventajas en términos de errores de aproximación

- Herramientas para la demostración: Para esto usamos como herramienta el teorema del valor medio ponderado:

  En cálculo, tenemos el siguiente resultado: Si $\alpha(x)$ es continua en $[a, b]$ y $\beta(x)$ es integrable en $[a, b]$ y no cambia de signo, entonces existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b \alpha(x)\beta(x)\,dx = \alpha(c)\int_a^b \beta(x)\,dx$$

- ya que $(x-x_1)^4$ nunca es negativo en $[x_0,x_2]$

Ventajas en términos de errores de aproximación

- Herramientas para la demostración: Para esto usamos como herramienta el teorema del valor medio ponderado:

  En cálculo, tenemos el siguiente resultado: Si $\alpha(x)$ es continua en $[a, b]$ y $\beta(x)$ es integrable en $[a, b]$ y no cambia de signo, entonces existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b \alpha(x)\beta(x)\,dx = \alpha(c)\int_a^b \beta(x)\,dx$$

- ya que $(x-x_1)^4$ nunca es negativo en $[x_0,x_2]$

$$\frac{1}{24}\int_{x_0}^{x_2} f^{(4)}(\xi(x))(x-x_1)^4\,dx = \frac{f^{(4)}(\xi_1)}{24}\int_{x_0}^{x_2}(x-x_1)^4\,dx = \frac{f^{(4)}(\xi_1)}{120}(x-x_1)^5\Big]_{x_0}^{x_2}$$

Ejemplos de las ventajas de regla de Simpson

- Ejemplo de evaluación de integrales en el intervalo [1 ,1.2]

$f(x)$	x^2	x^4	$1/(x+1)$	$\sqrt{1+x^2}$	$\sin x$	e^x
Exact value	0.24267	0.29766	0.09531	0.29742	0.17794	0.60184
Midpoint	0.24200	0.29282	0.09524	0.29732	0.17824	0.60083
Trapezoidal	0.24400	0.30736	0.09545	0.29626	0.17735	0.60384
Simpson's	0.24267	0.29767	0.09531	0.29742	0.17794	0.60184

- Ejemplo de evaluación de integrales en el intervalo [0 ,2]

Ejemplos de las ventajas de regla de Simpson

- Ejemplo de evaluación de integrales en el intervalo [1 ,1.2]

$f(x)$	x^2	x^4	$1/(x+1)$	$\sqrt{1+x^2}$	$\sin x$	e^x
Exact value	0.24267	0.29766	0.09531	0.29742	0.17794	0.60184
Midpoint	0.24200	0.29282	0.09524	0.29732	0.17824	0.60083
Trapezoidal	0.24400	0.30736	0.09545	0.29626	0.17735	0.60384
Simpson's	0.24267	0.29767	0.09531	0.29742	0.17794	0.60184

- Ejemplo de evaluación de integrales en el intervalo [0 ,2]

$f(x)$	x^2	x^4	$1/(x+1)$	$\sqrt{1+x^2}$	$\sin x$	e^x
Exact value	2.667	6.400	1.099	2.958	1.416	6.389
Midpoint	2.000	2.000	1.000	2.818	1.682	5.436
Trapezoidal	4.000	16.000	1.333	3.326	0.909	8.389
Simpson's	2.667	6.667	1.111	2.964	1.425	6.421