Clase No. 3 (Parte 1):

Repaso de algebra matricial

MAT–251

Dr. Alonso Ramírez Manzanares
Depto. de Matemáticas
Univ. de Guanajuato
e-mail: alram@ cimat.mx
web: http://www.cimat.mx/∼alram/met_num/

Dr. Joaquín Peña Acevedo
CIMAT A.C.
e-mail: joaquin@ cimat.mx

Conceptos de algebra lineal

Sea V un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{F}$, con $\dim V = n$. Sea $\mathcal{V} = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m\} \subset V$. Entonces

- $\mathcal{V}$ es un conjunto generador si
- $\mathcal{V}$ es un conjunto linealmente independiente si
- $\mathcal{V}$ es una base para V si
- $\mathcal{V}$ es un conjunto de vectores ortogonales si
- $\mathcal{V}$ es un conjunto ortonormal si

Conceptos de algebra lineal

Sea V un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{F}$, con $\dim V = n$. Sea $\mathcal{V} = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m\} \subset V$. Entonces

- $\mathcal{V}$ es un conjunto generador si para todo $v \in V$ existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{F}$ tales que $v = \alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + \alpha_m \boldsymbol{v}_m$.
- $\mathcal{V}$ es un conjunto linealmente independiente si $m \leq n$ y no existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{F}$, no todos nulos, tales que $\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + \alpha_m \boldsymbol{v}_m = \mathbf{0}$.
- $\mathcal{V}$ es una base para V si $m = n$, es un conjunto generador linealmente independiente.
- $\mathcal{V}$ es un conjunto de vectores ortogonales si $\boldsymbol{v}_j^\top \boldsymbol{v}_i = 0$ para $j \neq i$.
- $\mathcal{V}$ es un conjunto ortonormal si es ortogonal y $\boldsymbol{v}_i^\top \boldsymbol{v}_i = 1$.

Matrices

$\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^{n}$,

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2 & \cdots & \boldsymbol{A}_n \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix},$$

con $\boldsymbol{A}_i \in \mathbb{R}^{m}$, entonces el producto de $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{v}$ es

Matrices

$\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n,$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2 & \cdots & \boldsymbol{A}_n \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix},$$

con $\boldsymbol{A}_i \in \mathbb{R}^m$, entonces el producto de $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{v}$ es

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \sum_{j=1}^{n} v_j \boldsymbol{A}_j$$

- El espacio columna $\mathcal{C}(\boldsymbol{A})$ de $\boldsymbol{A}$ es
- El espacio fila $\mathcal{R}(\boldsymbol{A})$ de $\boldsymbol{A}$ es
- El rango de la matriz es

Matrices

$\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^{n}$,

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2 & \cdots & \boldsymbol{A}_n \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix},$$

con $\boldsymbol{A}_i \in \mathbb{R}^m$, entonces el producto de $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{v}$ es

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \sum_{j=1}^{n} v_j \boldsymbol{A}_j$$

- El espacio columna $\mathcal{C}(\boldsymbol{A})$ de $\boldsymbol{A}$ es el conjunto de todas las combinaciones lineales de sus columnas.
- El espacio fila $\mathcal{R}(\boldsymbol{A})$ de $\boldsymbol{A}$ es el conjunto de todas las combinaciones lineales de sus filas y $\dim \mathcal{C}(\boldsymbol{A}) = \dim \mathcal{R}(\boldsymbol{A})$.
- El rango de la matriz es la dimensión del espacio columna y $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) \le \min\{m, n\}$ y es de rango completo si $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = \min\{m, n\}$.

Matrices

El espacio nulo de $\boldsymbol{A}$ es el conjunto

Matrices

El espacio nulo de $\boldsymbol{A}$ es el conjunto

$$null(\boldsymbol{A}) = Ker(\boldsymbol{A}) = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \ : \ \boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}\}$$

Se puede ver que $Ker(\boldsymbol{A})$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ y su dimensión se llama la nulidad de $\boldsymbol{A}$.

$$rank(\boldsymbol{A}) + null(\boldsymbol{A}) = n$$

Matrices cuadradas

Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Decimos que $\boldsymbol{A}$ es invertible si existe una matriz $\boldsymbol{A}^{-1}$ tal que

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I}.$$

El producto de matrices invertibles, es invertible.

Si $\boldsymbol{A}$ es invertible, entonces $\alpha\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{A}^{\top}$ son invertibles. Además,

Matrices cuadradas

Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Decimos que $\boldsymbol{A}$ es invertible si existe una matriz $\boldsymbol{A}^{-1}$ tal que

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I}.$$

El producto de matrices invertibles, es invertible.

Si $\boldsymbol{A}$ es invertible, entonces $\alpha\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{A}^\top$ son invertibles. Además,

- $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ sólo tiene la solución trivial.
- $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ sólo tiene solución única.
- $\boldsymbol{A}$ es de rango completo.
- $\det \boldsymbol{A} \neq 0$.

Sistemas de ecuaciones lineales

- Se dice que el sistema $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ es consistente si al menos tiene una solución.

Sistemas de ecuaciones lineales

- Se dice que el sistema $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ es consistente si al menos tiene una solución.
- Si $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ es consistente, sus soluciones son de la forma

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}, \qquad \boldsymbol{Ay} = \boldsymbol{b}, \qquad \boldsymbol{z} \in Ker(\boldsymbol{A}).$$

Sistemas de ecuaciones lineales

- Se dice que el sistema $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ es consistente si al menos tiene una solución.
- Si $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ es consistente, sus soluciones son de la forma

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}, \qquad \boldsymbol{Ay} = \boldsymbol{b}, \qquad \boldsymbol{z} \in Ker(\boldsymbol{A}).$$

- Cuando $\boldsymbol{A}$ es invertible, la solución de $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ es

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$$

Sistemas de ecuaciones lineales

- Se dice que el sistema $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ es consistente si al menos tiene una solución.
- Si $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ es consistente, sus soluciones son de la forma

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}, \qquad \boldsymbol{Ay} = \boldsymbol{b}, \qquad \boldsymbol{z} \in Ker(\boldsymbol{A}).$$

- Cuando $\boldsymbol{A}$ es invertible, la solución de $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ es

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$$

- El cálculo de la inversa de una matriz no es trivial.

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{\operatorname{adj}\boldsymbol{A}}{\det\boldsymbol{A}}, \qquad (\operatorname{adj}\boldsymbol{A})_{ij} = (-1)^{i+j}\det\boldsymbol{A}(j|i)$$

Sistemas de ecuaciones lineales

- Se dice que el sistema $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ es consistente si al menos tiene una solución.
- Si $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ es consistente, sus soluciones son de la forma

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}, \qquad \boldsymbol{Ay} = \boldsymbol{b}, \qquad \boldsymbol{z} \in Ker(\boldsymbol{A}).$$

- Cuando $\boldsymbol{A}$ es invertible, la solución de $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ es

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$$

- El cálculo de la inversa de una matriz no es trivial.

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{\operatorname{adj}\boldsymbol{A}}{\det\boldsymbol{A}}, \qquad (\operatorname{adj}\boldsymbol{A})_{ij} = (-1)^{i+j}\det\boldsymbol{A}(j|i)$$

- Podemos usar otras estrategias para calcular la solución del sistema.