EXAMEN PARCIAL

Escoge una combinación de problemas que sumen 100 puntos. Este examen tiene cuatro problemas y dos páginas.

1. (30 puntos) Sea C_* el complejo

$$\ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \longrightarrow \ldots$$

con $\partial_2(x, y) = (x + y, -x, -y)$ y $\partial_1(x, y, z) = x + y + z$. Prueba que C_* es homotópicamente equivalente al complejo cero.

2. Sea R un anillo conmutativo y $r \in R - \{0\}$. Dado un R–módulo izquierdo M, definimos ${}_rM = \{m \in M \mid rm = 0\}$. Dado un homomorfismo de R–módulos $f : M \to N$, definimos $f_* : {}_rM \to {}_rN$ mediante $f_*(x) = f(x)$.

(a) (15 puntos) Demuestra que esta asignación define un funtor covariante $F_r : R - \text{Mod} \to R - \text{Mod}$ que es aditivo y exacto por la izquierda.

(b) (15 puntos) Da un ejemplo de una pareja (R, r) para la cual F_r no es exacto, y otro ejemplo donde sí lo sea.

3. (30 puntos) Consideremos a $\mathbb{Z}/2$ como $\mathbb{Z}/24$–módulo con su suma de grupo abeliano y producto escalar $[m]_{24}[n]_2 = [mn]_2$. Construye una resolución proyectiva explícita del $\mathbb{Z}/24$–módulo $\mathbb{Z}/2$, que no sea una resolución libre. **Nota:** 20 puntos si solo construyes una resolución libre.

4. En cada uno de los siguientes apartados, determina si el enunciado es verdadero o falso, con justificación completa.

(a) (10 puntos) Sean M, N dos R–módulos. Si $M[0]_* \simeq N[0]_*$, entonces $M \cong N$ como R–módulos.

(b) (10 puntos) Sea (C_*, ∂_*) un complejo y sean $B_n \leq C_n$ submódulos que satisfacen $\partial_n(B_n) \subseteq B_{n-1}$ para todo n, con lo cual (B_*, ∂_*) es un complejo con un morfismo de complejos $j_\#\colon (B_*, \partial_*) \to (C_*, \partial_*)$ dado por la inclusión de B_n en C_n en cada dimensión. Entonces $j_*\colon H_n(B_*) \to H_n(C_*)$ es inyectiva para todo n.

(c) (10 puntos) Si $0 \to A \to B \to C \to 0$ es una sucesión exacta corta de R–módulos, donde A y C son finitamente generados, entonces B es finitamente generado.

(d) (10 puntos) Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ una familia de R–módulos. Existe un complejo C_* de R–módulos que satisface $H_n(C_*) \cong A_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.