EXAMEN DE PRÁCTICA

Escoge una combinación de problemas que sumen 100 puntos. Este examen tiene cuatro problemas y dos páginas.

1. (30 puntos) Sea M un grupo abeliano y sea Z el conjunto de clases de isomorfismo de $\mathbb{Z}[x]$–módulos cuyo grupo abeliano subyacente es M. Sea $Y = \mathrm{Hom}(M, M)/\sim$ donde $f \sim f'$ si existe un isomorfismo $g \in \mathrm{Hom}(M, M)$ tal que $f = g^{-1}f'g$. Demuestra que hay una biyección entre Z y Y.

2.

(a) (15 puntos) Sea $0 \to C_* \to D_* \to E_* \to 0$ una sucesión exacta de complejos de cadena. Si dos de los complejos son exactos, entonces el tercero también lo es.

(b) (15 puntos) Consideremos el siguiente diagrama de R–módulos

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] \arrow[d] & B' \arrow[r] \arrow[d] & C' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A'' \arrow[r] \arrow[d] & B'' \arrow[r] \arrow[d] & C'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

donde las columnas y las dos filas inferiores son exactas. Demuestra que la fila superior es exacta. **Pista:** Primero prueba que la fila superior es un complejo con caza de diagramas.

3. (30 puntos) Sea $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ una sucesión exacta de R–módulos y sea $h\colon D \to C$ un homomorfismo de R–módulos. Definimos $h^*(B) = \{(b,d) \in B \oplus D \mid g(b) = h(d)\}$ con la suma y producto escalar definidos coordenada a coordenada. Construye una sucesión exacta $0 \to A \to h^*(B) \to D \to 0$ y demuestra que si la original escinde, entonces ella también. Da un ejemplo donde la original no escinde, pero la construida sí.

4. En cada uno de los siguientes apartados, determina si el enunciado es verdadero o falso, con justificación completa.

(a) (10 puntos) Si $0 \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}/7 \to A \to \mathbb{Z}/7 \to 0$ es una sucesión exacta de grupos abelianos, entonces $49a = 0$ para todo $a \in A$.

(b) (10 puntos) Si F es un funtor covariante aditivo y la sucesión exacta corta $0 \to A \to B \to C \to 0$ escinde, entonces $0 \to F(A) \to F(B) \to F(C) \to 0$ es una sucesión exacta corta que escinde.

(c) (10 puntos) Si P es un R–módulo proyectivo, existe un R–módulo libre finitamente generado F tal que $P \oplus F$ es libre.

(d) (10 puntos) Si M y N tienen resoluciones proyectivas $P_* \to M \to 0$ y $Q_* \to N \to 0$ tales que $P_* \to 0$ y $Q_* \to 0$ son homotópicamente equivalentes, entonces $M \cong N$ como R–módulos.