SOLUCIONES AL EXAMEN PARCIAL

Escoge una combinación de problemas que sumen 100 puntos. Este examen tiene cuatro problemas y dos páginas.

1. Sea C_* el complejo

$$\ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \longrightarrow \ldots$$

con $\partial_2(x, y) = (x + y, -x, -y)$ y $\partial_1(x, y, z) = x + y + z$. Prueba que C_* es homotópicamente equivalente al complejo cero.

Solución:

Sea D_* el complejo cero y sean $f_\#\colon C_* \to D_*$ y $g_\#\colon D_* \to C_*$ los morfismos de complejos que en cada dimensión están dados por el morfismo cero. Entonces $f_\# g_\# = 1_{D_*}$, pero $g_\# f_\#\colon C_* \to C_*$ es el morfismo de complejos dado en cada dimensión por el morfismo cero. Consideremos los morfismos $h_n\colon C_n \to C_{n+1}$ definidos como sigue. Si $n < 0$ o $n \geq 2$, definimos h_n como el morfismo cero. Por otra parte definimos

$$\begin{aligned} h_1\colon C_1 &\to C_2 \\ n &\mapsto (n, 0, 0) \end{aligned}$$

y el homomorfismo

$$\begin{aligned} h_2\colon C_2 &\to C_3 \\ (x, y, z) &\mapsto (-y, -z) \end{aligned}$$

Ahora veremos que los h_n nos definen una homotopía entre 1_{C_*} y $g_\# f_\#$. Si $n < 0$ ó $n > 2$, entonces

$$\partial n + 1 h_n + h_{n-1}\partial_n = 0 = 1_{C_n} - g_n f_n$$

ya que en estos casos se tiene $C_n = 0$. Para $n = 0$, se tiene

$$[\partial_1 h_0 + h_{-1}\partial_0](m) = \partial_1(m, 0, 0) = m = 1_{C_0}(m) - g_0 f_0(m)$$

Para $n = 1$, se cumple

$$\begin{aligned}\partial_2 h_1 + h_0\partial_1](x,y,z) &= \partial_2(-y,-z) + h_0(x+y+z)\\ &= (-y-z,y,z) + (x+y+z,0,0)\\ &= (x,y,z)\\ &= 1_{C_1}(x,y,z) - g_1 f_1(x,y,z)\end{aligned}$$

Para $n = 2$, tenemos

$$[\partial_3 h_2 + h_1\partial_2](x,y) = h_1(-x-y,-x,-y) = (x,y) = 1_{C_2}(x,y) - g_2 f_2(x,y)$$

Con esto probamos $g_\# f_\# \simeq 1_{C_*}$ y por lo tanto $C_* \simeq D_*$. □

2. Sea R un anillo conmutativo y $r \in R - \{0\}$. Dado un R–módulo izquierdo M, definimos ${}_rM = \{m \in M \mid rm = 0\}$. Dado un homomorfismo de R–módulos $f\colon M \to N$, definimos $f_*\colon {}_rM \to {}_rN$ mediante $f_*(x) = f(x)$.

(a) Demuestra que esta asignación define un funtor covariante $F_r\colon R-\mathrm{Mod} \to R-\mathrm{Mod}$ que es aditivo y exacto por la izquierda.

Solución:

Notemos primero que ${}_rM$ es un R–submódulo de M. Si x, $y \in {}_rM$ y $s \in R$, se tiene

$$r(x+y) = rx + ry = 0 \Rightarrow x + y \in {}_rM$$

$$r(sx) = (rs)x = (sr)x = s(rx) = s\cdot 0 = 0 \Rightarrow sx \in {}_rM$$

Además, si f es un homomorfismo de R–módulos y $x \in {}_rM$, se tiene

$$rf(x) = f(rx) = f(0) = 0 \Rightarrow f(x) \in {}_rN$$

y entonces f_* es la restricción de dominio y codominio de f. Como f es un homomorfismo de R–módulos, también lo es f_*. Así que tiene sentido definir la asignación

$$\begin{aligned}F_r\colon R-\mathrm{Mod} &\to R-\mathrm{Mod}\\ M &\mapsto {}_rM\\ f &\mapsto f_*\end{aligned}$$

la cual cumple que si $f\colon M \to N$, entonces $F_r(f)\colon F_r(M) \to F_r(N)$ como debe satisfacer un funtor covariante. Sean $f\colon M \to N$ y $g\colon N \to K$. Entonces $F_r(gf) = (gf)_*$ que cumple

$$(gf)_*(m) = gf(m) = g(f_*(m)) = g_* f_*(m)$$

Luego $F_r(gf) = g_* f_* = F_r(g) F_r(f)$. Y además

$$(1_M)_*(m) = 1_M(m) = m$$

por lo que $(1_M)_* = 1_{{}_rM}$, es decir $F_r(1_M) = 1_{F_r(M)}$. Esto muestra que es un funtor covariante. Sean f, $g\colon M \to N$. Entonces $F_r(f+g) = (f+g)_*$ y

$$(f+g)_*(m) = (f+g)(m) = f(m) + g(m) = f_*(m) + g_*(m)$$

Luego $F_r(f+g) = F_r(f) + F_r(g)$. Es decir, F es un funtor aditivo. Por último, sea

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta y probemos que

$$0 \longrightarrow {}_rA \xrightarrow{f_*} {}_rB \xrightarrow{g_*} C$$

es exacta. Recordemos que f_* es la restricción de dominio y codominio de f. Como f es inyectiva, también lo es f_*. Tenemos

$$g_* f_*(a) = gf(a) = 0$$

así que $\operatorname{Im} f_* \leq \operatorname{Ker} g_*$. Sea $b \in \operatorname{Ker} g_*$. Esto quiere decir que $b \in {}_rB \cap \operatorname{Ker}(g)$. Como $\operatorname{Ker}(g) = \operatorname{Im}(f)$, existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Como $b \in {}_rB$, se cumple

$$0 = rb = rf(a) = f(ra)$$

y como f es inyectiva, $ra = 0$. Es decir, $a \in {}_rA$ y por lo tanto $b = f_*(a)$. Con esto probamos $\operatorname{Ker}(g_*) = \operatorname{Im}(f_*)$ y concluimos el problema. $\square$

(b) Da un ejemplo de una pareja (R, r) para la cual F_r no es exacto, y otro ejemplo donde sí lo sea.

Solución:

Consideremos la pareja $(\mathbb{Z}, 1)$. En este caso

$${}_1M = \{m \in M \mid 1 \cdot m = 0\} = 0$$

así que F_1 es el funtor que envía cada grupo abeliano al grupo abeliano 0 y cada morfismo al morfismo cero $0\colon 0 \to 0$. Este funtor es exacto, pues transforma la sucesión exacta

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

en la sucesión

$$0 \to 0 \to 0 \to 0 \to 0$$

que es exacta.

Consideremos la pareja $(\mathbb{Z}, 2)$ y la sucesión exacta corta

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{q} \mathbb{Z}/2 \to 0$$

donde q es el cociente canónico. Se tiene

$$_2\mathbb{Z} = \{m \in \mathbb{Z} \mid 2m = 0\} = 0$$

$$_2\mathbb{Z}/2 = \{[a]_2 \in \mathbb{Z}/2 \mid 2[a]_2 = [0]_2\} = \mathbb{Z}/2$$

Así que al aplicarle el funtor F_2 a esa sucesión exacta obtenemos la sucesión

$$0 \to 0 \to 0 \to \mathbb{Z}/2 \to 0$$

donde todos los morfismos están forzados a ser los morfismos cero. El morfismo $0 \to \mathbb{Z}/2$ no es sobreyectivo, así que no es exacta. Por lo tanto, F_2 no es exacta. $\square$

3. Consideremos a $\mathbb{Z}/2$ como $\mathbb{Z}/24$–módulo con su suma de grupo abeliano y producto escalar $[m]_{24}[n]_2 = [mn]_2$. Construye una resolución proyectiva explícita del $\mathbb{Z}/24$–módulo $\mathbb{Z}/2$, que no sea una resolución libre.

Solución:

Recordemos que en la tarea 1 vimos que un grupo abeliano admite una estructura de $\mathbb{Z}/24$–módulo con la suma que ya tiene si y solo si todos sus elementos satisfacen $24x = 0$, y además si la admite, es única. Además, también vimos que un isomorfismo de grupos abelianos entre dos tales $\mathbb{Z}/24$–módulos era automáticamente un isomorfismo de $\mathbb{Z}/24$–módulos. La estructura de $\mathbb{Z}/24$–módulo de $\mathbb{Z}/2$ del enunciado es justo la que se obtiene por esta propiedad (por la unicidad).

Sabemos que $\mathbb{Z}/24 \cong \mathbb{Z}/8 \oplus \mathbb{Z}/3$ como grupos abelianos y como ambos lados son $\mathbb{Z}/24$–módulos, entonces también son isomorfos como $\mathbb{Z}/24$–módulos. Por lo tanto $\mathbb{Z}/8$ es un

$\mathbb{Z}/24$–módulo proyectivo. Consideremos

$$\begin{aligned} \epsilon\colon \mathbb{Z}/8 &\to \mathbb{Z}/2 \\ [m]_8 &\mapsto [m]_2 \end{aligned}$$

que es un homomorfismo de grupos y por lo tanto de $\mathbb{Z}/24$–módulos. Tenemos

$$\mathrm{Ker}(\epsilon) = 2\mathbb{Z}/8$$

y le podemos pegar con el epimorfismo $2\colon \mathbb{Z}/8 \to 2\mathbb{Z}/8$ que envía $[k]_8$ a $[2k]_8$. Sea $\partial_1 : \mathbb{Z}/8 \to \mathbb{Z}/8$ la composición de 2 con la inclusión $\mathrm{Ker}(\epsilon) \to \mathbb{Z}/8$. Claramente $\partial_1([k]_8) = [2k]_8$ y

$$\mathrm{Ker}(\partial_1) = 4\mathbb{Z}/8$$

Igualmente le podemos pegar con el epimorfismo $4\colon \mathbb{Z}/8 \to 4\mathbb{Z}/8$ que envía $[k]_8$ a $[4k]_8$. Sea $\partial_2\colon \mathbb{Z}/8 \to \mathbb{Z}/8$ la composición de 4 con la inclusión $\mathrm{Ker}(\partial_1) \to \mathbb{Z}/8$. Claramente $\partial_2([k]_8) = [4k]_8$ y

$$\mathrm{Ker}(\partial_2) = 2\mathbb{Z}/8$$

A partir de aquí podemos repetir la construcción, con lo cual obtenemos la resolución proyectiva

$$\ldots \xrightarrow{2} \mathbb{Z}/8 \xrightarrow{4} \mathbb{Z}/8 \xrightarrow{2} \mathbb{Z}/8 \xrightarrow{4} \mathbb{Z}/8 \xrightarrow{2} \mathbb{Z}/8 \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z}/2 \to 0$$

Sabemos que es exacta porque corresponde a la construcción que hicimos en la demostración de existencia de resoluciones proyectivas en clase. Aunque igual en este caso se ve facilmente que $\mathrm{Ker}(2) = \mathrm{Im}(4)$, $\mathrm{Ker}(4) = \mathrm{Im}(2)$ y $\mathrm{Im}(2) = \mathrm{Ker}(\epsilon)$. $\square$

4. En cada uno de los siguientes apartados, determina si el enunciado es verdadero o falso, con justificación completa.

(a) Sean M, N dos R–módulos. Si $M[0]_* \simeq N[0]_*$, entonces $M \cong N$ como R–módulos.

Solución:

Verdadero. Si $M[0]_* \simeq N[0]_*$, entonces

$$M \cong H_0(M[0]_*) \cong H_0(N[0]_*) \cong N$$

como queríamos probar. $\square$

(b) Sea (C_*, ∂_*) un complejo y sean $B_n \leq C_n$ submódulos que satisfacen $\partial_n(B_n) \subseteq B_{n-1}$ para todo n, con lo cual (B_*, ∂_*) es un complejo con un morfismo de complejos

$j_{\#}\colon (B_*, \partial_*) \to (C_*, \partial_*)$ dado por la inclusión de B_n en C_n en cada dimensión. Entonces $j_*\colon H_n(B_*) \to H_n(C_*)$ es inyectiva para todo n.

Solución:

Falso. Sea C_* el complejo dado por

$$\ldots \to 0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{1_{\mathbb{Z}}} \mathbb{Z} \to 0 \to \ldots$$

donde las $\mathbb{Z}$ están en dimensión 1 y 0. Consideremos $B_1 = 0$ y $B_0 = \mathbb{Z}$. Ciertamente la imagen bajo la identidad de B_1, que es cero, cae dentro de B_0. Es decir, el complejo B_* se vería así

$$\ldots \to 0 \to 0 \to \mathbb{Z} \to 0 \to \ldots$$

Vemos que $H_0(B_*) \cong \mathbb{Z}$. Sin embargo $H_0(C_*) = 0$ y no existe ningún morfismo inyectivo $\mathbb{Z} \to 0$. $\square$

(c) Si $0 \to A \to B \to C \to 0$ es una sucesión exacta corta de R–módulos, donde A y C son finitamente generados, entonces B es finitamente generado.

Solución:

Verdadero. Sea $\{c_1, \ldots, c_n\}$ un conjunto generador de C y $\{a_1, \ldots, a_m\}$ un conjunto generador de A. Sean $f\colon A \to B$ y $g\colon B \to C$ los morfismos de la sucesión exacta. Como g es sobreyectiva, existe b_j tal que $g(b_j) = c_j$ para cada $j = 1, \ldots, n$. Sea $x \in B$ y supongamos

$$g(x) = r_1c_1 + \ldots + r_nc_n$$

Entonces

$$g(x - r_1b_1 - \ldots - r_nb_n) = 0$$

Luego $x - r_1b_1 - \ldots - r_nb_n \in \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(f)$. Es decir

$$x - r_1b_1 - \ldots - r_nb_n = f(a) = f(s_1a_1 + \ldots + s_ma_m) = s_1f(a_1) + \ldots + s_mf(a_m)$$

de donde

$$x = s_1f(a_1) + \ldots + s_mf(a_m) + r_1b_1 + \ldots + r_nb_n$$

Por lo tanto, $\{f(a_1), \ldots, f(a_m), b_1, \ldots, b_n\}$ es un conjunto generador de B y B es finitamente generado. $\square$

(d) Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ una familia de R–módulos. Existe un complejo C_* de R–módulos que satisface $H_n(C_*) \cong A_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Solución:

Verdadero. Sea C_* el complejo dado por $C_n = A_n$ para cada n y $\partial_n = 0$. Entonces

$$H_n(C_*) = \frac{A_n}{0} \cong A_n$$

como queríamos. $\square$