TAREA 1 A ENTREGARSE EL 1 DE FEBRERO

Esta tarea tiene dos páginas y contiene seis problemas y un extra. Se calificará sobre 60 puntos.

1. Sea $n \geq 2$ un natural. En este ejercicio consideramos a $\mathbb{Z}/n$ como anillo con la suma y producto de representantes.

(a) (6 puntos) Sea M un grupo abeliano. Demuestra que M tiene una estructura de $\mathbb{Z}/n$–módulo izquierdo con la suma que ya tiene si y solo si $nm = 0$ para todo $m \in M$. Además, prueba que si M tiene tal estructura, entonces es única.

(b) (6 puntos) Enuncia y demuestra un teorema de clasificación de $\mathbb{Z}/n$–módulos finitamente generados.

2. (8 puntos) Calcula los grupos de homología del complejo de grupos abelianos

$$\ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}^4 \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}^2 \longrightarrow 0 \longrightarrow \ldots$$

donde $\partial_2(x, y, z) = (x - y, 4x + 3y - z, 9y + 3z, 3x + 13y + 2z)$ y $\partial_1(x, y, z, w) = (y + z - x - w, -2x + 2y + 2z - 2w)$.

3. (8 puntos) Sea $R = \mathbb{Z}[X]$. Podemos ver a $\mathbb{Z}/2$ como R–módulo mediante la operación $p(x) \cdot [n]_2 = [p(0)n]_2$. Calcula la homología del complejo de R–módulos

$$\ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z}[X] \xrightarrow{\partial_3} \mathbb{Z}[X]^2 \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}[X] \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 0 \longrightarrow \ldots$$

donde $\partial_3(p(x)) = (xp(x), 2p(x))$, $\partial_2(p(x), q(x)) = 2p(x) - xq(x)$ y $\partial_1(p(x)) = [p(0)]_2$.

4. (10 puntos) Sea R un anillo conmutativo con unidad que no sea el anillo cero y sean I, J conjuntos. Demuestra que $RI \cong RJ$ si y solo si existe una biyección entre I y J. **Pista:** Se cumple si R es un campo.

5. Se dice que un R–módulo es **simple** si sus únicos submódulos son $\{0\}$ y M.

(a) (8 puntos) Demuestra que todo R–módulo simple es cíclico, pero que existen R–módulos cíclicos que no son simples.

(b) (6 puntos) Clasifica todos los R–módulos simples salvo isomorfismo, cuando R es un campo y cuando $R = \mathbb{Z}$.

6. (8 puntos) Encuentra una familia $\{M_j\}_{j\in J}$ de R–módulos (para algún R) tal que la suma directa y el producto no son isomorfos.

Extra. (12 puntos) Sea V la suma directa de la familia $\{\mathbb{C}\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{C}$–espacios vectoriales y sea $R = \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$. Demuestra que $R \cong R^2$ como R–módulos. **Pista:** Construye un isomorfismo lineal $V \to V \oplus V$ y úsalo para obtener dos endomorfismos de V a partir de uno.