TAREA 2 A ENTREGARSE EL 20 DE FEBRERO

Esta tarea tiene dos páginas y contiene cinco problemas.

1. (10 puntos) El lema de los cinco. Consideremos el siguiente diagrama de R–módulos y homomorfismos

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "r"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "s"] & C \arrow[r, "h"] \arrow[d, "t"] & D \arrow[r, "k"] \arrow[d, "u"] & E \arrow[d, "v"] \\ A' \arrow[r, "\alpha"] & B' \arrow[r, "\beta"] & C' \arrow[r, "\gamma"] & D' \arrow[r, "\epsilon"] & E' \end{tikzcd}$$

   en el que los cuadrados son conmutativos y las dos filas son exactas. Supongamos que s y u son isomorfismos, r es sobreyectiva y v es inyectiva. Prueba que t es un isomorfismo.

2. (6 puntos) Sea $A \xrightarrow{f} B \to C \to D \xrightarrow{g} E$ una sucesión exacta. Demuestra que existe una sucesión exacta corta $0 \to \mathrm{Coker}(f) \to C \to \mathrm{Ker}(g) \to 0$.

3. (10 puntos) Para cada $n \geq 0$, definamos $C_n = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ y sea $C_n = 0$ si $n < 0$. Esto define un complejo C_* donde todas las diferenciales $C_n \to C_{n-1}$ con $n \geq 1$ están dadas por $(m, n) \mapsto (m + n, -m - n)$. Demuestra que C_* es homotópicamente equivalente a $\mathbb{Z}[0]_*$.

4. (10 puntos) Consideremos la siguiente sucesión exacta de grupos abelianos

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathbb{Z}/3 \arrow[r] & A \arrow[r] & \mathbb{Z}/4 \arrow[r] & \mathbb{Z}/2 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[d] \\ & 0 & C \arrow[l] & \mathbb{Z}^2 \arrow[l] & \mathbb{Z}^2 \arrow[l, "f"'] & B \arrow[l] \end{tikzcd}$$

   donde $f(x, y) = (3x + 2y, x + y)$. Determina A, B y C salvo isomorfismo.

5. Dado un complejo (C_*, ∂_*), definimos $\mathrm{Cone}(C)_n = C_{n-1} \oplus C_n$ y $d_n \colon \mathrm{Cone}(C)_n \to \mathrm{Cone}(C)_{n-1}$ mediante $d_n(x, y) = (-\partial_{n-1}(x), \partial_n(y) - x)$.

(a) (10 puntos) Prueba que $(\mathrm{Cone}(C)_*, d_*)$ es un complejo y que es homotópicamente equivalente al complejo cero.

(b) (6 puntos) Sea $i_n \colon C_n \to \mathrm{Cone}(C)_n$ dada por $i_n(c) = (0, c)$. Prueba que estos homomorfismos definen un morfismo de complejos $i_\# \colon C_* \to \mathrm{Cone}(C)_*$ que es homótopo al morfismo cero.

(c) (8 puntos) Sea $f_\# \colon C_* \to D_*$ un morfismo de complejos. Demuestra que $f_\#$ es homótopa al morfismo cero si y solo si existe $g_\# \colon \mathrm{Cone}(C)_* \to D_*$ tal que $g_\# i_\# = f_\#$.