TAREA 3 A ENTREGARSE EL 7 DE MARZO

Esta tarea tiene dos páginas y contiene ocho problemas. Se calificará sobre 60 puntos.

1. (8 puntos) Sea $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ una sucesión exacta de R–módulos y M un R–módulo. Demuestra que $0 \to \mathrm{Hom}_R(C, M) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_R(B, M) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_R(A, M)$ es exacta.

2. (10 puntos) Calcula los grupos de homología simplicial de $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}$.

3. (12 puntos) Sean $f\colon A \to B$ y $g\colon B \to C$ homomorfismos de R–módulos. Construye una sucesión exacta

   $$0 \to \mathrm{Ker}(f) \to \mathrm{Ker}(gf) \to \mathrm{Ker}(g) \to \mathrm{Coker}(f) \to \mathrm{Coker}(gf) \to \mathrm{Coker}(g) \to 0$$

   con justificación de que es exacta. **Pista:** Primero usa diagramas apropiados de la forma

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Coker}(f) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & C \arrow[r] & C \arrow[r] & 0 & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & 0 \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(g) \arrow[r] & B \arrow[r] & C & \end{tikzcd}$$

   Si usaste los dos, asegúrate de que las sucesiones exactas que obtuviste se pueden pegar. Si solo usaste uno, agrégale lo que te falta y usa caza de diagramas.

4. Sea $C^\infty(\mathbb{R})$ el espacio vectorial real de las funciones suaves $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(a) (8 puntos) Demuestra que hay una sucesión exacta corta de espacios vectoriales reales

$$0 \to \mathbb{R} \to C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}) \to 0$$

que escinde. **Pista:** Derivada.

(b) (6 puntos) Usa la parte anterior para dar un isomorfismo explícito $C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}$ de espacios vectoriales reales.

5. Sea $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ una sucesión exacta de grupos abelianos.

(a) (8 puntos) Demuestra que $A/3A \xrightarrow{f_*} B/3B \xrightarrow{g_*} C/3C \to 0$ es exacta, donde $f_*(a + 3A) = f(a) + 3B$ y $g_*(b + 3B) = g(b) + 3C$.

(b) (6 puntos) Da un ejemplo en el cual $0 \to A/3A \xrightarrow{f_*} B/3B \xrightarrow{g_*} C/3C \to 0$ no es exacta, con justificación.

6. Sea k un campo. Si E es un espacio vectorial sobre k, denotamos por $\dim_k E$ a su dimensión.

(a) (10 puntos) Sea $n \geq 0$ y sea $0 \to A_n \to A_{n-1} \to \ldots \to A_0 \to 0$ una sucesión exacta de espacios vectoriales de dimensión finita sobre k. Prueba que

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \dim_k A_j = 0$$

(b) (10 puntos) Se dice que un complejo C_* es acotado si existe $N > 0$ tal que $C_j = 0$ si $|j| > N$. Si C_* es un complejo acotado de espacios vectoriales de dimensión finita sobre k, definimos su característica de Euler como $\chi(C_*) = \sum_{j=-N}^{N} (-1)^j \dim_k C_j$. Demuestra que $\chi(C_*) = \chi(H_*(C))$, donde $H_*(C)$ es el complejo que tiene a $H_j(C_*)$ en dimensión j, y todas sus diferenciales iguales a 0.

(c) (8 puntos) Sea $0 \to C_* \to D_* \to E_* \to 0$ una sucesión exacta de complejos acotados de espacios vectoriales de dimensión finita sobre k. Demuestra que

$$\chi(D_*) = \chi(C_*) + \chi(E_*)$$

7. (8 puntos) Sea P un R–módulo proyectivo. Demuestra que existe un R–módulo libre F tal que $P \oplus F$ es libre. **Pista:** Si $P \oplus Q$ es libre, ¿cómo es $\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} (Q \oplus P)$?

8. (10 puntos) Sea R el anillo de matrices 5×5 con entradas en $\mathbb{C}$ y consideremos $P = \mathbb{C}^5$ con la estructura de R–módulo dada por multiplicación de matrices por vectores columna. Demuestra que P es un R–módulo proyectivo que no es libre.