TAREA 4 A ENTREGARSE EL 23 DE ABRIL

Esta tarea tiene una página y contiene cinco problemas.

1. (8 puntos) Sea $\{I_j\}_{j\in J}$ una familia de módulos inyectivos. Demuestra que $\prod_{j\in J} I_j$ es inyectivo.

2. (12 puntos) Sean $0 \to A \to I \to Q \to 0$ y $0 \to A \to I' \to Q' \to 0$ sucesiones exactas cortas donde I e I' son inyectivos. Demuestra que $I \oplus Q' \cong I' \oplus Q$.

3. (12 puntos) Sea $n \geq 2$ entero. Demuestra que $\mathbb{Z}/n$ es un $\mathbb{Z}/n$–módulo inyectivo.

4. Sea k un campo y sea $\mathcal{C}$ la categoría de espacios vectoriales sobre k de dimensión finita. Consideremos el funtor contravariante $F = \mathrm{Hom}_k(-, k)\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$. Denotamos $V^* = \mathrm{Hom}_k(V, k)$ y $f^* = F(f)$. También denotamos $V^{**} = (V^*)^*$.

(a) (8 puntos) Sea $f\colon k^n \to k^m$ un morfismo en $\mathcal{C}$ representado por la matriz M en las bases estándar. Demuestra que f^* está representado por la matriz transpuesta M^T en las bases duales. ¿Se cumple lo mismo si consideramos morfismos entre R–módulos libres finitamente generados, para un anillo conmutativo R?

(b) (10 puntos) Demuestra que el funtor covariante $F^2 := F \circ F$ es naturalmente isomorfo a $1_{\mathcal{C}}$. **Pista:** Evaluar define un homomorfismo $V \to V^{**}$. Este problema es independiente de la parte (a).

5. (10 puntos) Sean n, $m \geq 2$ enteros. Sea $G\colon \mathrm{Ab} \to \mathrm{Ab}$ el funtor que envía M a M/nM y que envía $f\colon M \to N$ al morfismo $f_*\colon M/nM \to N/nN$ dado por $f_*(x + nM) = f(x) + nN$. Calcula $L_kG(\mathbb{Z}/m)$ para todo $k \geq 0$. Tu respuesta debe estar dada como suma directa de grupos cíclicos.