SOLUCIONES A LA TAREA 4

1. Sea $\{I_j\}_{j\in J}$ una familia de módulos inyectivos. Demuestra que $\prod\limits_{j\in J} I_j$ es inyectivo.

Solución:

Consideremos un diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & \prod\limits_{j\in J} I_j & & \\ & & \uparrow{\scriptstyle f} & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow[s]{} & B \end{array}$$

de R–módulos, donde la fila es exacta. Para cada $k \in J$, tenemos un diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & I_k & & \\ & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_k f} & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow[s]{} & B \end{array}$$

Como I_k es inyectivo, existe $g_k\colon B \to I_k$ tal que $g_k s = \mathrm{pr}_k f$. Por la propiedad universal del producto, existe un único homomorfismo $g\colon B \to \prod\limits_{j\in J} I_j$ tal que $\mathrm{pr}_k g = g_k$. Veamos que g hace conmutar el primer diagrama. Para ello, notemos que

$$\mathrm{pr}_k gs = g_k s = \mathrm{pr}_k f$$

Es decir, gs y f son dos homomorfismos $A \to \prod\limits_{j\in J} I_j$ que coinciden tras componerlos con pr_k para todo $k \in J$. Por la unicidad de la propiedad universal del producto, se tiene $gs = f$. $\square$

2. Sean $0 \to A \to I \to Q \to 0$ y $0 \to A \to I' \to Q' \to 0$ sucesiones exactas cortas donde I e I' son inyectivos. Demuestra que $I \oplus Q' \cong I' \oplus Q$.

Solución:

Primero le damos nombre a los morfismos

$$0 \to A \xrightarrow{i} I \xrightarrow{q} Q \to 0$$

$$0 \to A \xrightarrow{i'} I' \xrightarrow{q'} Q' \to 0$$

Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd} & I' & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[u, "i'"] \arrow[r, "i"'] & I \end{tikzcd}$$

Como I' es inyectivo, existe $f\colon I \to I'$ tal que $fi = i'$. Para cada $x \in Q$, escogemos $y_x \in I$ tal que $q(y_x) = x$. Consideremos

$$\begin{aligned} g\colon Q &\to Q' \\ x &\mapsto q'f(y_x) \end{aligned}$$

Está bien definida, pues si $z_x \in I$ es tal que $q(z_x) = x$, entonces $y_x - z_x \in \operatorname{Ker}(q) = \operatorname{Im}(i)$ y por lo tanto

$$q'f(y_x - z_x) = q'fi(a) = q'i'(a) = 0$$

de donde $q'f(y_x) = q'f(z_x)$. Además, ahora que sabemos que la elección de y_x no importa, podemos escoger $y_{x+x'} = y_x + y_{x'}$ y $y_{rx} = ry_x$, luego g es un homomorfismo de R–módulos. Y por último g satisface

$$gq(w) = q'f(w)$$

pues podemos escoger $y_{q(w)} = w$. Por lo tanto tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "1_A"] & I \arrow[r, "q"] \arrow[d, "f"] & Q \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "i"'] & I' \arrow[r, "q'"'] & Q' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Veamos que hay una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{(f,q)} I' \oplus Q \xrightarrow{q'-g} Q' \longrightarrow 0$$

donde $(f,q)(y) = (f(y), q(y))$, y $(q'-g)(z,w) = q'(z) - g(w)$. Para empezar, si $(f(y), q(y)) = (0,0)$, se cumple $q(y) = 0$ y por lo tanto $y = i(a)$. Pero entonces $0 = f(y) = fi(a) = i'(a)$ y como i' es inyectiva, se tiene $a = 0$, de donde $y = i(0) = 0$. También se cumple

$$(q'-g)(f,q)(y) = (q'-g)(f(y), q(y)) = q'f(y) - gq(y) = 0$$

por la conmutatividad del diagrama. Luego $\mathrm{Im}(f,q) \leq \mathrm{Ker}(q'-g)$. Sea $(z,w) \in \mathrm{Ker}(q'-g)$, es decir
$$0 = q'(z) - g(w) \Rightarrow q'(z) = g(w)$$
Como q es sobreyectiva, existe $y \in I$ tal que $q(y) = w$. Consideremos
$$q'(f(y) - z) = q'f(y) - q'(z) = gq(y) - g(w) = g(w) - g(w) = 0$$
Esto quiere decir que $f(y) - z \in \mathrm{Ker}(q') = \mathrm{Im}(i')$, digamos $f(y) - z = i'(a) = fi(a)$. Ahora calculemos
$$(f,q)(y - i(a)) = (f(y) - fi(a), q(y) - qi(a)) = (z,w)$$
Con esto probamos que $\mathrm{Ker}(q' - g) = \mathrm{Im}(f,q)$. Finalmente, sea $t \in Q'$. Como q' es sobreyectiva, existe $w \in I'$ tal que $q'(w) = t$. Entonces $(q' - g)(w,0) = q'(w) = t$.

Para concluir, como tenemos una sucesión exacta corta en la que el término de la izquierda I es inyectivo, la sucesión escinde y por lo tanto
$$I' \oplus Q \cong I \oplus Q'$$
como queríamos probar. □

3. Sea $n \geq 2$ entero. Demuestra que $\mathbb{Z}/n$ es un $\mathbb{Z}/n$–módulo inyectivo.

Solución:

Por el criterio de Baer, es suficiente probar que en cualquier diagrama de la forma
$$\begin{tikzcd} & \mathbb{Z}/n & \\ 0 \arrow[r] & J \arrow[u, "f"] \arrow[r, "i"'] & \mathbb{Z}/n \end{tikzcd}$$
con fila exacta, donde i es la inclusión del ideal J, existe un homomorfismo $g\colon \mathbb{Z}/n \to \mathbb{Z}/n$ de $\mathbb{Z}/n$–módulos tal que $gi = f$. Ahora, si J es un ideal de $\mathbb{Z}/n$, en particular es un subgrupo de $\mathbb{Z}/n$. Como $\mathbb{Z}/n$ es cíclico, también lo es J y su orden debe dividir a n, así que $J \cong \mathbb{Z}/d$ como grupo abeliano para algún d que divide a n. Además $\mathbb{Z}/n$ tiene un único subgrupo de orden d, el generado por el elemento $m = n/d$. Así que $J = m\mathbb{Z}/n$.

Sea $[k]_n = f([m]_n)$. Entonces
$$[dk]_n = f([dm]_n) = f([n]_n) = [0]_n$$

luego $dk = nj$ para algún $j \in \mathbb{Z}$. Entonces $dk = dmj$, de donde $k = mj$. Definimos

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{Z}/n &\to \mathbb{Z}/n \\ [x]_n &\mapsto [jx]_n \end{aligned}$$

el cual es claramente un homomorfismo de $\mathbb{Z}/n$–módulos. Además

$$gi([mr]_n) = [r]_n gi([m]_n) = [r]_n g([m]_n) = [r]_n [jm]_n = [r]_n [k]_n = [r]_n f([m]_n) = f([rm]_n)$$

como queríamos probar. $\square$

4. Sea k un campo y sea $\mathcal{C}$ la categoría de espacios vectoriales sobre k de dimensión finita. Consideremos el funtor contravariante $F = \mathrm{Hom}_k(-, k)\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$. Denotamos $V^* = \mathrm{Hom}_k(V, k)$ y $f^* = F(f)$. También denotamos $V^{**} = (V^*)^*$.

(a) Sea $f\colon k^n \to k^m$ un morfismo en $\mathcal{C}$ representado por la matriz M en las bases estándar. Demuestra que f^* está representado por la matriz transpuesta M^T en las bases duales. ¿Se cumple lo mismo si consideramos morfismos entre R–módulos libres finitamente generados para un anillo conmutativo R?

Solución:

Veamos primero que si $f\colon R^n \to R^m$ es un homomorfismo de R–módulos, está dado por multiplicar por una matriz con entradas en R. Sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base estándar de R^n y $\{v_1, \ldots, v_m\}$ la base estándar de R^m. Sea $f(e_i) = \sum a_{ji} v_j$.

$$\begin{aligned} f(r_1, \ldots, r_n) &= f(r_1 e_1 + \ldots + r_n e_n) \\ &= r_1 f(e_1) + \ldots + r_n f(e_n) \\ &= r_1(a_{11} v_1 + a_{21} v_2 + \ldots + a_{m1} v_m) + \ldots + r_n(a_{1n} v_1 + \ldots + a_{mn} v_m) \\ &= (r_1 a_{11} + \ldots + r_n a_{1n}) v_1 + \ldots + (r_1 a_{m1} + \ldots + r_n a_{mn}) v_m \\ &= \begin{pmatrix} r_1 a_{11} + \ldots + r_n a_{1n} \\ \vdots \\ r_1 a_{m1} + \ldots + r_n a_{mn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ahora probemos el enunciado en general para esta f cuya matriz es $M = (a_{ij})$. Recordemos que

$$\mathrm{Hom}_R(R^n, R) \cong \mathrm{Hom}_R(R, R)^n \cong R^n$$

El isomorfismo entre R^n y $\mathrm{Hom}_R(R, R)^n$ es el isomorfismo $\mathrm{Hom}_R(R, R) \cong R$ coordenada a coordenada. Por lo tanto, envía e_j a la tupla $(\delta_{ij}1_R)_i$ que es el homomorfismo identidad $R \to R$ en la coordenada j y el homomorfismo 0 en las otras coordenadas. El isomorfismo entre $\mathrm{Hom}_R(R^n, R)$ y $\mathrm{Hom}_R(R, R)^n$, envía la tupla $(\delta_{ij}1_R)_i$ a

$$e_i^* = \oplus_i \delta_{ij} 1_R$$

que envía $(r_1, \ldots, r_n)$ a r_j. Este e_i^* se conoce como el dual de e_i. Similarmente tenemos los duales v_i^* de los v_i. Notemos que e_i^* es el único homomorfismo de R–módulos $R^n \to R$ que envía e_i al 1 y todos los otros e_j al 0. Por lo tanto $\lambda_i e_i^*$ es el único homomorfismo de R–módulos $R^n \to R$ que envía e_i al λ_i y todos los otros e_j al 0. Similarmente, $\sum \lambda_i e_i^*$ es el único homomorfismo de R–módulos $R^n \to R$ que envía cada e_i a λ_i. Calculemos

$$\begin{aligned} f^*(v_j^*)(e_i) &= (v_j^* \circ f)(e_i) \\ &= v_j^*(a_{1i}v_1 + \ldots + a_{ji}v_j + \ldots + a_{mi}v_m) \\ &= a_{ji} \end{aligned}$$

de donde obtenemos $f^*(v_j^*) = \sum a_{ji} e_i^*$ y por lo tanto la matriz de f^* con respecto a estas dos bases es $(a_{ji}) = M^T$. $\square$

(b) Demuestra que el funtor covariante $F^2 := F \circ F$ es naturalmente isomorfo a $1_{\mathcal{C}}$. **Pista:** Evaluar define un homomorfismo $V \to V^{**}$. Este problema es independiente de la parte (a).

Solución:

Dado $x \in V$, consideremos

$$\begin{aligned} \mathrm{ev}_x \colon V^* &\to k \\ f &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

Claramente ev_x es k–lineal, así que es un elemento de V^{**}. Ahora consideremos

$$\begin{aligned} \mathrm{ev} \colon V &\to V^{**} \\ x &\mapsto \mathrm{ev}_x \end{aligned}$$

Notemos que $\mathrm{ev}(x+y) = \mathrm{ev}_{x+y}$ cumple

$$\mathrm{ev}_{x+y}(f) = f(x+y) = f(x) + f(y) = \mathrm{ev}_x(f) + \mathrm{ev}_y(f)$$

luego $\mathrm{ev}(x+y) = \mathrm{ev}_x + \mathrm{ev}_y = \mathrm{ev}(x) + \mathrm{ev}(y)$. De la misma manera, como f saca los escalares, se cumple $\mathrm{ev}(\lambda x) = \lambda\, \mathrm{ev}(x)$ para cualquier $\lambda \in k$. Probemos que ev es un isomorfismo. Sea $x \in \mathrm{Ker}(\mathrm{ev})$, es decir, $\mathrm{ev}_x = 0$. Sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base de V y $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ la base dual de V^*. Entonces

$$0 = \mathrm{ev}_x(e_j^*) = e_j^*(x) = e_j^*\left(\sum \lambda_i e_i\right) = \lambda_j$$

Por lo tanto $x = 0$. Esto muestra que ev es inyectiva. Pero además, V^{**} tiene una base dada por $\{e_1^{**}, \dots, e_n^{**}\}$, así que tiene la misma dimensión que V. Por lo tanto, ev es un isomorfismo.

Ahora cambiemos el nombre ev por η_V para que se note la dependencia en V. Vemos que η_V define un isomorfismo en $\mathcal{C}$ desde $1_{\mathcal{C}}(V)$ hasta $F^2(V)$, así que para ver que define un isomorfismo natural, basta probar que para cualquier morfismo $f\colon V \to W$ el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\eta_V"] \arrow[d, "f"'] & V^{**} \arrow[d, "f^{**}"] \\ W \arrow[r, "\eta_W"'] & W^{**} \end{tikzcd}$$

Sea $x \in V$ y $g \in W^*$. Entonces

$$f^{**}\eta_V(x)(g) = \eta_V(x)f^*(g) = \eta_V(x)gf = \mathrm{ev}_x(gf) = gf(x)$$

$$\eta_W f(x)(g) = \mathrm{ev}_{f}(x)(g) = g(f(x))$$

Luego $f^{**}\eta_V = \eta_W f$, es decir, η define un isomorfismo natural de $1_{\mathcal{C}}$ a F^2. $\square$

5. Sean $n, m \geq 2$ enteros. Sea $G\colon \mathrm{Ab} \to \mathrm{Ab}$ el funtor que envía M a M/nM y que envía $f\colon M \to N$ al morfismo $f_*\colon M/nM \to N/nN$ dado por $f_*(x+nM) = f(x) + nN$. Calcula $L_kG(\mathbb{Z}/m)$ para todo $k \geq 0$. Tu respuesta debe estar dada como suma directa de grupos cíclicos.

Solución:

Primero escogemos una resolución proyectiva de $\mathbb{Z}/m$

$$\ldots \to 0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{m} \mathbb{Z} \xrightarrow{q} \mathbb{Z}/m \to 0$$

le quitamos $\mathbb{Z}/m$

$$\ldots 0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{m} \mathbb{Z} \to 0$$

aplicamos el funtor G

$$\ldots 0 \to \mathbb{Z}/n \xrightarrow{m_*} \mathbb{Z}/n \to 0$$

y tenemos que tomar homología. Pero antes de eso, identifiquemos m_*.

$$m_*([a]_n) = m_*(a + n\mathbb{Z}) = ma + n\mathbb{Z} = [ma]_n$$

Es decir, m_* multiplica el representante por m. Por lo tanto

$$L_0G(\mathbb{Z}/m) = \frac{\mathbb{Z}/n}{m\mathbb{Z}/n} \cong \mathbb{Z}/d$$

donde d es el máximo común divisor de m y n. Este último isomorfismo lo vimos en clase. Por otra parte $L_1G(\mathbb{Z}/m)$ es el núcleo del morfismo $\mathbb{Z}/n \to \mathbb{Z}/n$ que multiplica por m, es decir, ${}_m\mathbb{Z}/n \cong \mathbb{Z}/d$, como también vimos en clase. Y claramente $L_kG(\mathbb{Z}/m) = 0$ si $k \geq 2$. $\square$