TAREA 5 A ENTREGARSE EL 2 DE MAYO

Esta tarea tiene una página y contiene cinco problemas y un extra.

1. (12 puntos) Encuentra un ejemplo de dos R–módulos A y B para los cuales existe un elemento de $A \otimes_R B$ que no es de la forma $a \otimes b$.

2. (12 puntos) Sea R un anillo conmutativo. Demuestra que existe un isomorfismo $A \otimes_R B \cong B \otimes_R A$ de R–módulos que es natural en A y B. Es decir, debes probar un isomorfismo natural de funtores R–Mod $\times R$–Mod $\to R$–Mod.

3. (12 puntos) Consideremos $\mathbb{Z}/2$ como $\mathbb{Z}/6$–módulo con el producto escalar $[m]_6 \cdot [n]_2 = [mn]_2$. Expresa $\mathbb{Z}/2 \otimes_{\mathbb{Z}/6} \mathbb{Z}/2$ como suma directa de grupos cíclicos y determina la estructura de $\mathbb{Z}/6$–módulo de esta suma directa.

4. (12 puntos) Veamos $\mathbb{Z}/2$ como $\mathbb{Z}/4$–módulo con el producto escalar $[m]_4 \cdot [n]_2 = [mn]_2$. Calcula $\mathrm{Ext}^j_{\mathbb{Z}/4}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$ para todo $j \geq 0$.

5. (12 puntos) Veamos $\mathbb{Z}/2$ como $\mathbb{Z}[X]$–módulo con el producto escalar $p(x) \cdot [n]_2 = [p(0)n]_2$. Calcula $\mathrm{Ext}^j_{\mathbb{Z}[X]}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$ para todo $j \geq 0$. **Pista:** Mira la tarea 1.

Extra. (12 puntos) Sea $F \colon R$–Mod $\to S$–Mod un funtor aditivo contravariante que es exacto por la izquierda. Demuestra que $R^0 F$ es naturalmente isomorfo a F.