SOLUCIONES A LA TAREA 5

1. Encuentra un ejemplo de dos R–módulos A y B para los cuales existe un elemento de $A \otimes_R B$ que no es de la forma $a \otimes b$.

Solución:

Consideremos $A = B = \mathbb{Z}^2$ como $\mathbb{Z}$–módulos y definamos la función

$$f \colon \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^4$$
$$((x,y),(z,w)) \mapsto (xz, xw, yz, yw)$$

Veamos que es bilineal.

$$\begin{aligned} f((x+x', y+y'),(z,w)) &= ((x+x')z, (x+x')w, (y+y')z, (y+y')w) \\ &= (xz, xw, yz, yw) + (x'z, x'w, y'z, y'w) \\ &= f((x,y),(z,w)) + f((x',y'),(z,w)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f((x,y),(z+z', w+w')) &= (x(z+z'), x(w+w'), y(z+z'), y(w+w')) \\ &= (xz, xw, yz, yw) + (xz', xw', yz', yw') \\ &= f((x,y),(z,w)) + f((x,y),(z',w')) \end{aligned}$$

$$f((xr, yr),(z,w)) = (xrz, xrw, yrz, yrw) = f((x,y),(rz, rw))$$

Por lo tanto, existe un homomorfismo de grupos $\varphi \colon \mathbb{Z}^2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^4$ tal que $\varphi\pi = f$, donde $\pi \colon \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^2$ es el cociente que define el producto tensorial. Sea $\{v_1, v_2\}$ la base estándar de A y sea $\{e_1, e_2\}$ la base estándar de B. Veamos que $v_1 \otimes e_1 + v_2 \otimes e_2$ no puede ser de la forma $a \otimes b$. Supongamos que lo fuera y expresemos $a = nv_1 + mv_2$ y $b = ke_1 + re_2$. Usando que $\otimes$ es bilineal en cada entrada, obtenemos

$$a \otimes b = nk(v_1 \otimes e_1) + nr(v_1 \otimes e_2) + mk(v_2 \otimes e_1) + mr(v_2 \otimes e_2)$$

Si $a \otimes b = v_1 \otimes e_1 + v_2 \otimes e_2$, entonces se tendría

$$(nk, nr, mk, mr) = \varphi(a \otimes b) = \varphi(v_1 \otimes e_1 + v_2 \otimes e_2) = (1,0,0,1)$$

de donde $nk = 1 = mr$ y $nr = 0 = mk$, lo cual es imposible pues la segunda ecuación nos dice que alguno de los cuatro coeficientes es cero y la primera que ninguno puede ser cero. $\square$

Nota: Con un poco más de trabajo se podría probar que φ es un isomorfismo.

2. Sea R un anillo conmutativo. Demuestra que existe un isomorfismo $A \otimes_R B \cong B \otimes_R A$ de R–módulos que es natural en A y B. Es decir, debes probar un isomorfismo natural de funtores R–Mod $\times R$–Mod $\to R$–Mod.

Solución:

Consideremos la función

$$\begin{aligned} f_{A,B} \colon A \times B &\to B \times_R A \\ (a,b) &\mapsto b \otimes a \end{aligned}$$

que es claramente bilineal porque $\otimes$ es lineal con respecto a la suma en cada una de sus entradas y además

$$f_{A,B}(ar,b) = b \otimes ar = b \otimes ra = br \otimes a = rb \otimes a = f_{A,B}(a,rb)$$

Por lo tanto induce un homomorfismo de grupos $\varphi_{A,B}\colon A\otimes_R B\to B\otimes_R A$. Pero además

$$\begin{aligned}
\varphi_{A,B}\left(r\sum_i a_i\otimes b_i\right) &= \varphi_{A,B}\left(\sum_i (ra_i)\otimes b_i\right)\\
&= \sum_i \varphi_{A,B}((ra_i)\otimes b_i)\\
&= \sum_i f_{A,B}(ra_i,b_i)\\
&= \sum_i b_i\otimes(ra_i)\\
&= \sum_i (b_ir)\otimes a_i\\
&= \sum_i (rb_i)\otimes a_i\\
&= r\sum_i b_i\otimes a_i\\
&= r\varphi_{A,B}\left(\sum_i a_i\otimes b_i\right)
\end{aligned}$$

así que es un homomorfismo de R–módulos. Esta construcción es válida para cualesquiera A, B, así que también tenemos un homomorfismo $\varphi_{B,A}\colon B\otimes_R A\to A\otimes_R B$ que envía el generador $b\otimes a$ en $a\otimes b$. Claramente estos dos homomorfismos son inversos el uno del otro en generadores, y por lo tanto, son inversos el uno del otro. Con esto ya probamos que $A\otimes_R B\cong B\otimes_R A$ como R–módulos. Falta comprobar la naturalidad de este isomorfismo.

Dados homomorfismos $f\colon A\to C$ y $g\colon B\to D$, consideremos la función

$$\begin{aligned}
h\colon A\times B &\to C\otimes_R D\\
(a,b) &\mapsto f(a)\otimes g(b)
\end{aligned}$$

Veamos que es bilineal

$$h(a_1{+}a_2,b)=[f(a_1{+}a_2)]\otimes g(b)=[f(a_1){+}f(a_2)]\otimes g(b)=f(a_1)\otimes g(b){+}f(a_2)\otimes g(b)=h(a_1,b){+}h(a_2,b)$$

$$h(a,b_1{+}b_2)=f(a)\otimes[g(b_1{+}b_2)]=f(a)\otimes[g(b_1){+}g(b_2)]=f(a)\otimes g(b_1){+}f(a)\otimes g(b_2)=h(a,b_1){+}h(a,b_2)$$

$$h(ar,b)=f(ar)\otimes g(b)=[f(a)r]\otimes g(b)=f(a)\otimes rg(b)=f(a)\otimes g(rb)=h(a,rb)$$

Por lo tanto, induce un homomorfismo de R–módulos $A \otimes_R B \to C \otimes_R D$ que denotaremos $f \otimes g$. Ahora tenemos dos funtores $F_1, F_2 \colon R - \text{Mod} \times R - \text{Mod} \to R - \text{Mod}$.

$$F_1(A, B) = A \otimes_R B \qquad F_1(f, g) = f \otimes g$$

$$F_2(B, A) = B \otimes_R B \qquad F_2(f, g) = g \otimes f$$

Veamos que los $\varphi_{A,B}$ definen un isomorfismo natural de funtores. Para ello, escojamos $(f, g) \colon (A, B) \to (C, D)$ en la categoría $R - \text{Mod} \times R - \text{Mod}$ y veamos que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \otimes_R B \arrow[r, "\varphi_{A,B}"] \arrow[d, "f\otimes g"'] & B \otimes_R A \arrow[d, "g\otimes f"'] \\
C \otimes_R D \arrow[r, "\varphi_{C,D}"'] & D \otimes_R C
\end{tikzcd}$$

conmuta. Es suficiente ver que las dos composiciones coinciden en un generador $a \otimes b$.

$$(g \otimes f)\varphi_{A,B}(a \otimes b) = (g \otimes f)(b \otimes a) = g(b) \otimes f(a)$$

$$\varphi_{C,D}(f \otimes g)(a \otimes b) = \varphi_{C,D}(f(a) \otimes g(b)) = g(b) \otimes f(a)$$

Y ya vimos que cada $\varphi_{A,B}$ es un isomorfismo, así que definen un isomorfismo natural. □

3. (12 puntos) Consideremos $\mathbb{Z}/2$ como $\mathbb{Z}/6$–módulo con el producto escalar $[m]_6 \cdot [n]_2 = [mn]_2$. Expresa $\mathbb{Z}/2 \otimes_{\mathbb{Z}/6} \mathbb{Z}/2$ como suma directa de grupos cíclicos y determina la estructura de $\mathbb{Z}/6$–módulo de esta suma directa.

Solución:

Usemos el modelo $\mathbb{Z}/2 \otimes_{\mathbb{Z}/6} \mathbb{Z}/2 = \mathbb{Z}[\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2]/S$ y consideremos también $\mathbb{Z}/2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2 = \mathbb{Z}[\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2]/S'$. Recordemos que había tres tipos de relaciones en S y S'. Las relaciones de los primeros dos tipos solo tenían que ver con la suma en cada coordenada de $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$, así que son las mismas en S y S'. Las relaciones del tercer de tipo de S son de la forma

$$([n]_2[m]_6, [n']_2) - ([n]_2, [m]_6[n']_2) = ([nm]_2, [n']_2) - ([n]_2, [mn']_2) = ([n]_2 m, [n']_2) - ([n]_2, m[n']_2)$$

con lo cual vemos que están contenidas en S'. Pero viendo la igualdad de derecha a izquierda vemos que las relaciones del tercer tipo de S' están contenidas en S. Esto prueba que $S = S'$ y por lo tanto $\mathbb{Z}/2 \otimes_{\mathbb{Z}/6} \mathbb{Z}/2 = \mathbb{Z}/2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2$. Ya vimos en clase que este último es isomorfo a $\mathbb{Z}/2$ como grupo abeliano. Por último, vimos en la tarea 1 que $\mathbb{Z}/2$ tiene una única estructura de $\mathbb{Z}/6$–módulo, que es la descrita en el enunciado de este problema. □

4. (12 puntos) Veamos $\mathbb{Z}/2$ como $\mathbb{Z}/4$–módulo con el producto escalar $[m]_4 \cdot [n]_2 = [mn]_2$. Calcula $\mathrm{Ext}^j_{\mathbb{Z}/4}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$ para todo $j \geq 0$.

Solución:

Primero tomamos la resolución libre de $\mathbb{Z}/2$

$$\ldots \to \mathbb{Z}/4 \xrightarrow{2} \mathbb{Z}/4 \xrightarrow{2} \mathbb{Z}/4 \xrightarrow{q} \mathbb{Z}/2 \to 0$$

donde $q([m]_4) = [m]_2$. Ahora debemos aplicarle el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}/4}(-, \mathbb{Z}/2)$ al complejo

$$\ldots \to \mathbb{Z}/4 \xrightarrow{2} \mathbb{Z}/4 \xrightarrow{2} \mathbb{Z}/4 \to 0$$

lo que nos da

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}/4}(\mathbb{Z}/4, \mathbb{Z}/2) \xrightarrow{2^*} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}/4}(\mathbb{Z}/4, \mathbb{Z}/2) \xrightarrow{2^*} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}/4}(\mathbb{Z}/4, \mathbb{Z}/2) \to \ldots$$

Sabemos que hay un isomorfismo $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}/4}(\mathbb{Z}/4, \mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{Z}/2$ que envía f a $f([1]_4)$. La inversa envía $[m]_2$ al homomorfismo f_m dado por $f_m([n]_4) = [mn]_2$. Bajo este isomorfismo entonces el morfismo 2^* hace lo siguiente

$$[m]_2 \mapsto f_m \mapsto 2^* f_m = f_m \circ 2 \mapsto (f_m \circ 2)([1]_4) = f_m([2]_4) = [2m]_2 = [0]_2$$

Es decir, es el morfismo cero y el complejo tiene la forma

$$\ldots \to \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}/2 \to 0$$

Por lo tanto

$$\mathrm{Ext}^j_{\mathbb{Z}/4}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{Z}/2$$

para todo $j \geq 0$. □

5. (12 puntos) Veamos $\mathbb{Z}/2$ como $\mathbb{Z}[X]$–módulo con el producto escalar $p(x) \cdot [n]_2 = [p(0)n]_2$. Calcula $\mathrm{Ext}^j_{\mathbb{Z}[X]}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$ para todo $j \geq 0$. **Pista:** Mira la tarea 1.

Solución:

Usaremos la resolución libre de $\mathbb{Z}/2$ que encontramos en la tarea 1.

$$\ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z}[X] \xrightarrow{\partial_3} \mathbb{Z}[X]^2 \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}[X] \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 0 \longrightarrow \ldots$$

donde $\partial_3(p(x)) = (xp(x), 2p(x))$, $\partial_2(p(x), q(x)) = 2p(x) - xq(x)$ y $\partial_1(p(x)) = [p(0)]_2$. Debemos aplicarle el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[X]}(-, \mathbb{Z}/2)$ al complejo

$$\ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z}[X] \xrightarrow{\partial_3} \mathbb{Z}[X]^2 \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}[X] \longrightarrow 0$$

y nos quedaría

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[X]}(\mathbb{Z}[X], \mathbb{Z}/2) \xrightarrow{\partial_2^*} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[X]}(\mathbb{Z}[X]^2, \mathbb{Z}/2) \xrightarrow{\partial_3^*} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[X]}(\mathbb{Z}[X], \mathbb{Z}/2) \longrightarrow 0$$

Ya vimos en clase que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[X]}(\mathbb{Z}[X], \mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{Z}/2$ y $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[X]}(\mathbb{Z}[X]^2, \mathbb{Z}/2) \cong (\mathbb{Z}/2)^2$ y teníamos isomorfismos explícitos, así que veamos en qué se tranforman ∂_2^* y ∂_3^* bajo estos isomorfismos. Denotamos por f_m al único homomorfismo $\mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}/2$ de $\mathbb{Z}[X]$–módulos que envía el 1 a $[m]_2$. Denotaremos por $f_{m,n}$ al único homomorfismo $\mathbb{Z}[X]^2 \to \mathbb{Z}/2$ de $\mathbb{Z}[X]$–módulos que envía el $(1,0)$ a $[m]_2$ y el $(0,1)$ a $[n]_2$. Primero determinamos ∂_2^*.

$$\begin{aligned} [m]_2 &\mapsto f_m \\ &\mapsto \partial_2^* f_m \\ &= f_m \partial_2 \\ &\mapsto (f_m\partial_2(1,0), f_m\partial_2(0,1)) \\ &= (f_m(2), f_m(-x)) \\ &= (2[m]_2, (-x)[m]_2) \\ &= ([0]_2, [0]_2) \end{aligned}$$

Luego ∂_2^* es el homomorfismo cero. Ahora determinamos ∂_3^*

$$([m]_2, [n]_2) \mapsto f_{m,n} \mapsto \partial_3^* f_{m,n} = f_{m,n}\partial_3 \mapsto f_{m,n}\partial_3(1) = f_{m,n}(x,2) = x[m]_2 + 2[n]_2 = [0]_2$$

Así que también ∂_3^* es el homomorfismo cero. El complejo nos quedó entonces así:

$$0 \to \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{0} (\mathbb{Z}/2)^2 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}/2 \to 0 \to \dots$$

Y por lo tanto

$$\mathrm{Ext}^j_{\mathbb{Z}[X]}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2 & \text{si } j = 0, 2 \\ (\mathbb{Z}/2)^2 & \text{si } j = 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Esto concluye el cálculo. $\square$

Extra. (12 puntos) Sea $F\colon R$–Mod $\to S$–Mod un funtor aditivo contravariante que es exacto por la izquierda. Demuestra que R^0F es naturalmente isomorfo a F.

Solución:

Sea $P_* \to M \to 0$ una resolución proyectiva de M, donde $\epsilon\colon P_0 \to M$ es el morfismo de aumentación y los demas morfismos los denotamos $\partial_j\colon P_j \to P_{j-1}$. Por definición

$$R^0F(M) = \mathrm{Ker}(F(\partial_1))$$

Consideremos la sucesión exacta corta

$$0 \to P_1/\mathrm{Ker}(\partial_1) \xrightarrow{\hat{\partial}_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} M \to 0$$

donde $\hat{\partial}_1$ es el morfismo inducido por ∂_1 en el cociente. Como F es exacto por la izquierda tenemos una sucesión exacta

$$0 \to F(M) \xrightarrow{F(\epsilon)} F(P_0) \xrightarrow{F(\hat{\partial}_1)} F(P_1/\mathrm{Ker}(\partial_1))$$

Notemos que $\partial_1 = \hat{\partial}_1 q$, donde $q\colon P_1 \to P_1/\mathrm{Ker}(\partial_1)$ es el cociente. Entonces

$$F(\partial_1) = F(q)F(\hat{\partial}_1)$$

Como q es sobreyectiva y F es exacto por la derecha, $F(q)$ es inyectiva. Esto quiere decir que $\mathrm{Ker}(F(\partial_1)) = \mathrm{Ker}(\hat{\partial}_1)$. Puesto que $\mathrm{Im}(F(\epsilon)) = \mathrm{Ker}(\hat{\partial}_1) = \mathrm{Ker}(F(\partial_1)) = R^0F(M)$, el morfismo $F(\epsilon)$ nos define un isomorfismo

$$\eta_M\colon F(M) \to R^0F(M)$$

Resta ver que es natural en M. Sea $f\colon M \to N$ y sea $Q_* \to N \to 0$ una resolución proyectiva con aumentación $\epsilon'\colon Q_0 \to N$ y diferenciales $\partial'_j\colon Q_j \to Q_{j-1}$. Por el teorema de comparación, existe un morfismo $f_*\colon P_* \to Q_*$ de complejos que satisface $\epsilon' f_0 = f\epsilon$. El morfismo $R^0F(f)\colon R^0F(N) \to R^0F(M)$ está definido como el morfismo inducido $F(f_*)^*$ en cohomología en dimensión cero, es decir, el que manda $x \in \mathrm{Ker}(F(\partial'_1)) \leq F(Q_0)$ a $F(f_0)(x) \in \mathrm{Ker}(F(\partial_1))$. Ahora comprobemos que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
F(N) \arrow[r, "\eta_N"] \arrow[d, "F(f)"'] & R^0F(N) \arrow[d, "R^0F(f)"] \\
F(M) \arrow[r, "\eta_M"'] & R^0F(M)
\end{tikzcd}$$

Sea $x \in F(N)$. Entonces

$$R^0F(f)\eta_N(x) = F(f_0)F(\epsilon')(x)$$
$$\eta_M F(f)(x) = F(\epsilon)F(f)(x)$$

lo cuales son iguales porque $\epsilon' f_0 = f\epsilon$ implies $F(f_0)F(\epsilon') = F(\epsilon)F(f)$. Luego los η_M definen un isomorfismo natural entre F y R^0F. $\square$