TAREA 6 A ENTREGARSE EL 16 DE MAYO

Esta tarea tiene una página y contiene cuatro problemas.

1. Sea J un conjunto y sea $R-\mathrm{Mod}^J$ la categoría producto. Es decir, sus objetos son tuplas $(M_j)_{j\in J}$ de R–módulos y los morfismos son tuplas $(f_j)_{j\in J}$ donde cada f_j es un homomorfismo de R–módulos.

(a) (12 puntos) Demuestra que existe un funtor covariante $\oplus\colon R-\mathrm{Mod}^J \to R-\mathrm{Mod}$ que envía $(M_j)_{j\in J}$ a $\displaystyle\bigoplus_{j\in J} M_j$.

(b) (12 puntos) Construye un funtor covariante $\Delta\colon R-\mathrm{Mod} \to R-\mathrm{Mod}^J$ que sea adjunto por la derecha de $\oplus$.

2. (12 puntos) Sea A un grupo abeliano y $n \geq 2$. Demuestra que $\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}/n, A) \cong {}_nA$ y que este isomorfismo es natural en A.

3. (12 puntos) Demuestra que $\displaystyle\mathrm{Tor}_k^R\left(\bigoplus_{i\in J} M_i, N\right) \cong \bigoplus_{i\in J} \mathrm{Tor}_k^R(M_i, N)$.

4. (12 puntos) Sea $F\colon \mathrm{Ab} \to \mathrm{Ab}$ el funtor dado por $F(A) = \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/2, A) \oplus (A \otimes \mathbb{Z}/2)$ y definido en morfismos usando los mapeos inducidos de $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/2, -)$ y $-\otimes \mathbb{Z}/2$ en cada coordenada. Calcula $L_1F(\mathbb{Z}/2)$ y $R^1F(\mathbb{Z}/2)$.