SOLUCIONES A LA TAREA 6

1. Sea J un conjunto y sea $R-\mathrm{Mod}^J$ la categoría producto. Es decir, sus objetos son tuplas $(M_j)_{j\in J}$ de R–módulos y los morfismos son tuplas $(f_j)_{j\in J}$ donde cada f_j es un homomorfismo de R–módulos.

(a) Demuestra que existe un funtor covariante $\oplus\colon R-\mathrm{Mod}^J \to R-\mathrm{Mod}$ que envía $(M_j)_{j\in J}$ a $\bigoplus_{j\in J} M_j$.

Solución:

En objetos ya nos dice el enunciado que debe estar definido como

$$\oplus(M_j)_{j\in J} = \bigoplus_{j\in J} M_j$$

Sea $(f_j)_{j\in J}\colon (M_j)_j \to (N_j)_j$ un morfismo en la categoría $R-\mathrm{Mod}^J$, es decir, cada $f_j\colon M_j \to N_j$ es un morfismo de R–módulos. Para cada $k\in J$, definimos

$$\begin{aligned} f'_k\colon M_k &\to \bigoplus_{j\in J} N_j \\ m &\mapsto (a_j)_{j\in J} \end{aligned}$$

donde $a_k = f_k(m)$ y $a_j = 0$ si $j\neq k$. Es claramente un homomorfismo de R–módulos. Por la propiedad universal de la suma directa, existe un único homomorfismo

$$\oplus_j f_j\colon \bigoplus_{j\in J} M_j \to \bigoplus_{j\in J} N_j$$

tal que $(\oplus_j f_j)\iota_k = f'_k$ para cada $k\in J$. En la demostración de esta propiedad universal se vio que este homomorfismo está dado por

$$(\oplus_j f_j)(a_j)_j = \sum_k f'_k(a_k) = (f_j(a_j))_{j\in J}$$

Así que definimos en morfismos

$$\oplus(f_j)_{j\in J} = \oplus_j f_j$$

Resta comprobar que se comporta bien con los morfismos identidad y con la composición.

$$\oplus(1_{M_j})_{j\in J} = \oplus_j 1_{M_j} = 1_{\oplus_j M_j}$$

$$\oplus[(f_j)_{j\in J}\circ(g_j)_{j\in J}] = \oplus(f_j\circ g_j)_{j\in J} = \oplus_j(f_j\circ g_j)_j = [\oplus_j(f_j)_j]\circ[\oplus_j(g_j)_j] = \oplus(f_j)_{j\in J}\circ\oplus(g_j)_{j\in J}$$

donde la penúltima igualdad se cumple por la expresión explícita de lo que hace $\oplus$ en morfismos. $\square$

Nota: Notemos que como $\oplus_j f_j$ es el único homomorfismo que cumple $(\oplus_j f_j)\iota_k = f'_k$ y $f'_k = \iota_k f_k$, así que tenemos la igualdad $(\oplus_j f_j)\iota_k = \iota_k f_k$.

(b) Construye un funtor covariante $\Delta\colon R-\mathrm{Mod} \to R-\mathrm{Mod}^J$ que sea adjunto por la derecha de $\oplus$.

Solución:

Buscamos Δ que cumpla una biyección

$$\mathrm{Mor}_{R-\mathrm{Mod}}(\oplus(M_j)_{j\in J}, N) \cong \mathrm{Mor}_{R-\mathrm{Mod}^J}((M_j)_{j\in J}, \Delta(N))$$

que sea natural en N y en $(M_j)_{j\in J}$. Denotemos $\Delta(N) = (\Delta(N)_j)_{j\in J}$. Entonces este isomorfismo tendrá la forma

$$\mathrm{Hom}_R\left(\bigoplus_{j\in J} M_j, N\right) \cong \prod_{j\in J}\mathrm{Hom}_R(M_j, \Delta(N)_j)$$

Recordemos que por la propiedad universal de la suma directa, es equivalente dar un homomorfismo desde la suma directa a dar un homomorfismo desde cada uno de los sumandos. Así que parece que deberíamos definir $\Delta(N)_j = N$. Es decir, $\Delta(N) = (N)_{j\in J}$. Por otra parte, dado un homomorfismo $f\colon M \to N$ definimos $\Delta(f) = (f)_{j\in J}\colon (M)_{j\in J} \to (N)_{j\in J}$, que en efecto es un homomorfismo de $\Delta(M)$ a $\Delta(N)$. Vemos que

$$\Delta(1_M) = (1_M)_{j\in J} = 1_{(M_j)_j}$$

$$\Delta(gf) = (gf)_{j\in J} = (g)_j\circ(f)_j = \Delta(g)\Delta(f)$$

así que Δ es un funtor covariante.

Sea $Z = (M_j)_j$ y consideremos la función

$$\varphi_{Z,N}\colon \operatorname{Hom}_R\left(\bigoplus_{j\in J} M_j, N\right) \to \operatorname{Mor}_{R-\mathrm{Mod}^J}((M_j)_{j\in J}, (N)_j)$$
$$f \mapsto (f\iota_j)_j$$

y también

$$\psi_{Z,N}\colon \operatorname{Mor}_{R-\mathrm{Mod}^J}((M_j)_{j\in J}, (N)_j) \to \operatorname{Hom}_R\left(\bigoplus_{j\in J} M_j, N\right)$$
$$(f_j)_j \mapsto r_{(f_j)_j}$$

donde $r_{(f_j)_j}$ es el homomorfismo determinado por la propiedad universal de la suma directa. Se cumple

$$\varphi_{Z,N}\psi_{Z,N}((f_j)_j) = \varphi_{Z,N}(r_{(f_j)_j}) = (r_{(f_j)_j}\iota_j)_j = (f_j)_j$$

$$\psi_{Z,N}\varphi_{Z,N}(f) = \psi_{Z,N}((f\iota_j)_j) = r_{(f\iota_j)_j}$$

Por definición, $r_{(f\iota_j)_j}$ es el único homomorfismo tal que $r_{(f\iota_j)_j}\iota_j = f\iota_j$ para todo j. Pero claramente f también cumple $f\iota_j = f\iota_j$, así que $f = r_{(f\iota_j)_j}$. Esto prueba que $\varphi_{Z,N}$ es una biyección y solo resta comprobar que es natural en Z y N.

Comencemos con Z. Sea $W = (K_j)_j$ y $(g_j)_j\colon W \to Z$. Debemos probar que el siguiente cuadrado es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}_R\left(\bigoplus_{j\in J} M_j, N\right) \arrow[r, "\varphi_{Z,N}"] \arrow[d, "{[\oplus(g_j)_j]^*}"] & \operatorname{Mor}_{R-\mathrm{Mod}^J}((M_j)_{j\in J}, (N)_j) \arrow[d, "(g_j)_j^*"] \\
\operatorname{Hom}_R\left(\bigoplus_{j\in J} K_j, N\right) \arrow[r, "\varphi_{W,N}"] & \operatorname{Mor}_{R-\mathrm{Mod}^J}((K_j)_{j\in J}, (N)_j)
\end{tikzcd}$$

Hagamos las dos composiciones. Sea $s\colon \bigoplus_{j\in J} M_j \to N$.

$$(g_j)_j^*\varphi_{Z,N}(s) = (g_j)_j^*(s\iota_j)_j = (s\iota_j)_j(g_j)_j = (s\iota_j g_j)_j$$

$$\varphi_{W,N}[\oplus(g_j)_j]^*(s) = \varphi_{W,N}s[\oplus(g_j)_j] = (s[\oplus(g_j)_j]\iota_j)_j$$

Coinciden porque $[\oplus(g_j)_j]\iota_j = \iota_j g_j$. Esto lo vimos en la nota de la parte anterior.

Por otra parte, sea $h\colon N \to N'$ y veamos que el siguiente cuadrado es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_R\left(\bigoplus_{j\in J} M_j, N\right) \arrow[r, "\varphi_{Z,N}"] \arrow[d, "h_*"] & \mathrm{Mor}_{R-\mathrm{Mod}^J}((M_j)_{j\in J}, (N)_j) \arrow[d, "{[(h)_j]_*}"] \\
\mathrm{Hom}_R\left(\bigoplus_{j\in J} M_j, N'\right) \arrow[r, "\varphi_{Z,N'}"] & \mathrm{Mor}_{R-\mathrm{Mod}^J}((M_j)_{j\in J}, (N)_j)
\end{tikzcd}$$

Sea $s\colon \bigoplus_{j\in J} M_j \to N$. Se tiene

$$[(h)_j]_*\varphi_{Z,N}(s) = [(h)_j]_*(s\iota_j)_j = (h)_j \circ (s\iota_j)_j = (hs\iota_j)_j$$

$$\varphi_{Z,N'}h_*(s) = \varphi_{Z,N'}(hs) = (hs\iota_j)_j$$

y vemos que coinciden. □

2. Sea A un grupo abeliano y $n \geq 2$. Demuestra que $\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}/n, A) \cong {}_nA$ y que este isomorfismo es natural en A.

Solución:

Consideremos una resolución libre

$$\ldots \to 0 \to F_1 \xrightarrow{d} F_0 \xrightarrow{\epsilon} A \to 0$$

Tenemos que calcular el primer grupo de homología del complejo

$$\ldots \to 0 \to \mathbb{Z}/n \otimes F_1 \xrightarrow{1\otimes d} \mathbb{Z}/n \otimes F_0 \to 0$$

Es decir

$$\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}/n, A) = \mathrm{Ker}(1 \otimes d)$$

Por otra parte, recordemos el isomorfismo $f_M\colon \mathbb{Z}/n \otimes M \to M/nM$ que envía $([k]_n, m)$ a $km + nM$. Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}/n \otimes F_1 \arrow[r, "1\otimes d"] \arrow[d, "f_{F_1}"'] & \mathbb{Z}/n \otimes F_0 \arrow[d, "f_{F_0}"] \\
F_1/nF_1 \arrow[r, "d_*"'] & F_0/nF_0
\end{tikzcd}$$

donde $d_*(p + nF_1) = d(p) + nF_0$. Es conmutativo, pues en generadores se tiene

$$f_{F_0}(1 \otimes d)([k]_n \otimes p) = f_{F_0}([k]_n \otimes d(p)) = kd(p) + nF_1$$

$$d_*f_{F_1}([k]_n \otimes p) = d_*(kp + nF_0) = d(kp) + nF_1$$

De aquí obtenemos

$$\operatorname{Tor}(\mathbb{Z}/n, A) \cong \operatorname{Ker}(d_*)$$

Ahora consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F_1 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "n"] & F_0 \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[d, "n"] & A \arrow[r] \arrow[d, "n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & F_1 \arrow[r, "d"'] & F_0 \arrow[r, "\epsilon"'] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

con filas exactas. Usamos el lema de la serpiente y nos quedamos con el siguiente pedazo

$${}_nF_0 \to {}_nA \xrightarrow{\partial} F_1/nF_1 \xrightarrow{d_*} F_0/nF_0$$

Se cumple ${}_nF_0 = 0$ pues F_0 es libre, luego libre de torsión. Así que ∂ es inyectiva y $\operatorname{Im}(\partial) = \operatorname{Ker}(d_*)$. La restricción de codominio nos da un isomorfismo ${}_nA \to \operatorname{Ker}(d_*)$. Por lo tanto, obtenemos un isomorfismo $\eta_A\colon {}_nA \to \operatorname{Tor}(\mathbb{Z}/n, A)$. Retracemos nuestros pasos para dar una fórmula explícita de η_A. El isomorfismo ${}_nA \to \operatorname{Ker}(d_*)$ es la restricción de codominio del morfismo de conexión. Dado $a \in {}_nA$, debemos escoger $x \in F_0$ con $\epsilon(x) = a$. Entonces $nx = d(y)$ para algún $y \in F_1$ y se tiene $\partial(a) = y + nF_1$. Por otra parte el isomorfismo $\operatorname{Ker}(d_*) \to \operatorname{Tor}(\mathbb{Z}/n, A)$ envía $y + nF_1$ a $[1]_n \otimes y$. Así que

$$\eta_A(a) = [1]_n \otimes y$$

donde $nx = d(y)$ y $\epsilon(x) = a$. Sea $g\colon A \to B$ y $P_1 \xrightarrow{d'} P_0 \xrightarrow{\omega} B \to 0$ una resolución libre de B. Sabemos que existen morfismos $g_1\colon F_1 \to P_1$ y $g_0 \to F_0 \to P_0$ formando un diagrama conmutativo entre las resoluciones, y que el mapeo inducido en $\operatorname{Tor}(\mathbb{Z}/n, -)$ es

$$\begin{aligned} g_*\colon\ &\operatorname{Ker}(1 \otimes d) \to \operatorname{Ker}(1 \otimes d') \\ &\sum z_i \otimes x_i \mapsto \sum z_i \otimes g_1(x_i) \end{aligned}$$

Veamos ahora que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
{}_nA \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "g_*"'] & \operatorname{Tor}(\mathbb{Z}/n, A) \arrow[d, "g_*"] \\
{}_nB \arrow[r, "\eta_B"'] & \operatorname{Tor}(\mathbb{Z}/n, B)
\end{tikzcd}$$

Sea $a \in {}_nA$ y encontremos $x \in F_0$, $y \in F_1$ tales que $\epsilon(x) = a$ y $d(y) = nx$. Entonces $\omega(g_0(x)) = g\epsilon(x) = g(a)$. y $d'(g_1(y)) = g_0d(y) = g_0(nx) = ng_0(x)$. Entonces $\eta_B(g(a)) =$

$[1]_n \otimes g_1(y)$. Por lo tanto, se cumple

$$\eta_B(g_*(a)) = \eta_B(g(a)) = [1]_n \otimes g_1(y)$$
$$g_*\eta_A(a) = g_*([1]_n \otimes y) = [1]_n \otimes g_1(y)$$

como queríamos probar. $\square$

3. Demuestra que $\operatorname{Tor}_k^R\left(\bigoplus_{i\in J} M_i, N\right) \cong \bigoplus_{i\in J} \operatorname{Tor}_k^R(M_i, N)$.

Solución:

Usaremos una resolución proyectiva $P_* \to N \to 0$. Entonces

$$\begin{aligned}
\operatorname{Tor}_k^R\left(\bigoplus_{i\in J} M_i, N\right) &= H_k\left(\left(\bigoplus_{i\in J} M_i\right) \otimes_R P_* \to 0\right)\\
&= H_k\left(\bigoplus_{i\in J}(M_i \otimes_R P_*) \to 0\right)\\
&= \bigoplus_{i\in J} H_k(M_i \otimes_R P_* \to 0)\\
&= \bigoplus_{i\in J} \operatorname{Tor}_k^R(M_i, N)
\end{aligned}$$

donde hemos usado que el producto tensorial distribuye respecto a la suma directa y que la homología de la suma directa de complejos es la suma directa de las homologías.

4. Sea $F\colon \mathrm{Ab} \to \mathrm{Ab}$ el funtor dado por $F(A) = \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}/2, A) \oplus (A \otimes \mathbb{Z}/2)$ y definido en morfismos usando los mapeos inducidos de $\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}/2, -)$ y $- \otimes \mathbb{Z}/2$ en cada coordenada. Calcula $L_1F(\mathbb{Z}/2)$ y $R^1F(\mathbb{Z}/2)$.

Solución:

Notemos que F es un funtor covariante, así que para calcular sus funtores derivados por la izquierda necesitamos una resolución proyectiva de $\mathbb{Z}/2$. Por ejemplo, podemos usar

$$\ldots \to 0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{q} \mathbb{Z}/2 \to 0$$

donde q es el cociente usual Aplicamos el funtor F al complejo

$$\ldots \to 0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \to 0$$

y obtenemos

$$\ldots \to 0 \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/2) \xrightarrow{F(2)} \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/2) \to 0$$

Sabemos que $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}) = 0$ y $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/2 \cong \mathbb{Z}/2$, así que tenemos que identificar en qué se convierte $F(2)$ cuando usamos estos isomorfismos. Como el funtor F funciona en morfismos coordenada a coordenada y en la primera coordenada ambos grupos son cero, es el morfismo cero en la primera coordenada. En la segunda coordenada, consiste en lo siguiente

$$[m]_2 \mapsto 1 \otimes [m]_2 \mapsto 2 \otimes [m]_2 \mapsto [2m]_2 = [0]_2$$

así que es el morfismo cero. Es decir, es el complejo

$$\ldots \to 0 \to \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}/2 \to 0$$

y por lo tanto $L_1F(\mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2$.

Para calcular sus funtores derivados por la derecha, necesitamos una resolución inyectiva, como por ejemplo

$$0 \to \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{i} \mathbb{Q}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0 \to \ldots$$

donde $i([m]_2) = m + 2\mathbb{Z}$ y $f(m + 2\mathbb{Z}) = m + \mathbb{Z}$. Ahora tenemos que aplicar el funtor F al complejo de cocadenas

$$0 \to \mathbb{Q}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0 \to \ldots$$

y nos queda

$$0 \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Q}/2\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Q}/2\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/2) \xrightarrow{F(f)} \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/2) \to 0 \to \ldots$$

Primero recordemos que $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/2, M) \cong {}_2M$. Si $m/n + \mathbb{Z} \in {}_2\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, entonces

$$\mathbb{Z} = 2\left(\frac{m}{n} + \mathbb{Z}\right) = \frac{2m}{n} + \mathbb{Z}$$

Así que $2m/n$ es un entero o equivalentemente $m/n = k/2$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. Pero además se tiene $k/2 + \mathbb{Z} = k'/2 + \mathbb{Z}$ si y solo si $k - k'$ es par, así que ${}_2\mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \{\mathbb{Z}, 1/2 + \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}/2$. Sea $m/n + 2\mathbb{Z} \in {}_2\mathbb{Q}/2\mathbb{Z}$. De la misma manera que antes, esto quiere decir $2m/n$ es un entero par, luego m/n es entero. Entonces ${}_2\mathbb{Q}/2\mathbb{Z} = \{2\mathbb{Z}, 1 + 2\mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}/2$.

Por otra parte, sabemos que $M \otimes \mathbb{Z}/2 \cong M/2M$. Primero vemos que

$$\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/2 \cong \frac{\mathbb{Q}/\mathbb{Z}}{2\mathbb{Q}/\mathbb{Z}} \cong \frac{\mathbb{Q}}{2\mathbb{Q}} \cong \mathbb{Q} \otimes \mathbb{Z}/2 = 0$$

De la misma manera se prueba que $\mathbb{Q}/2\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/2 = 0$. De nuevo, como los homomorfismos inducidos por el funtor F van a coordenada a coordenada y la segunda coordenada es cero, es suficiente ver lo inducido en la primera coordenada, es decir $f_*\colon \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Q}/2\mathbb{Z}) \to \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ pero visto como morfismo $\mathbb{Z}/2 \to \mathbb{Z}/2$. Dado $m \in {}_2M$, denotamos por $h_m\colon \mathbb{Z}/2 \to M$ el homomorfismo dado por $h_m([n]_2) = nm$.

$$[n]_2 \mapsto h_{n+2\mathbb{Z}} \mapsto f_*h_{n+2\mathbb{Z}} = fh_{n+2\mathbb{Z}} \mapsto fh_{n+2\mathbb{Z}}([1]_2) = f(n+2\mathbb{Z}) = n + \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$$

Es el homomorfismo cero, así que el complejo tiene la forma

$$0 \to \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}/2 \to 0 \to \dots$$

y por lo tanto $R^1F(\mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2$. $\square$