



Universidad Autónoma de Yucatán

Facultad de Matemáticas

**Técnicas cohomológicas desde el punto de vista
diferencial**

TESIS

Presentada por:

Jhon Alexander Yam Borges

En opción al título de:

Licenciado en Matemáticas

Mérida, Yucatán, México

Abril, 2026

*A mis seres queridos,
con todo mi agradecimiento.*

Agradecimientos

Quiero agradecer en primer lugar a mi familia, cuyo apoyo ha sido fundamental para llegar hasta aquí. En especial, a mi madre, Elena Borges.

Quiero expresar mi más profundo reconocimiento a mi profesor, el Dr. Bernardo Villarreal Herrera, por su guía, su paciencia y su dedicación durante el desarrollo de este trabajo; sus enseñanzas, comentarios y acompañamiento fueron esenciales en esta tesis. Sin su ayuda este proyecto no habría sido posible. Asimismo, agradezco al Dr. José María Cantarero López por su constante disposición para compartir su conocimiento y por haberme brindado la oportunidad de asistir como oyente a sus clases y participar en diversos eventos académicos que enriquecieron profundamente mi formación universitaria. Deseo también reconocer a los profesores José Matías Navarro Soza, Jesús Efrén Pérez Terrazas, Waldemar Barrera Vargas y Juan Pablo Navarrete Carrillo, de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán, y a todos aquellos profesores que formaron parte de mi desarrollo académico, cuyo compromiso docente y apoyo fueron determinantes durante mi licenciatura. Les agradezco sinceramente todo lo que me enseñaron y el ejemplo profesional que representan.

A mis amigos Luna y Rodrigo, con quienes compartí momentos y recuerdos que siempre me harán extrañar Mérida. Aunque no estemos juntos, la distancia no ha mostrado ser suficiente para dejarlos de querer tanto como si estuviera con ustedes. A Félix, por su constante compañía en el aula, por su disposición para ayudarme en mis dudas y por su amistad sincera; sin duda, el mejor jugador de billar que conozco. A Pavel, por su amistad incondicional y por acompañarme en innumerables experiencias y aventuras.

Finalmente, a todas las personas con quienes compartí una parte de mi vida universitaria (fuera y dentro del aula). Sería imposible mencionarlas a todas, pero su presencia y apoyo dejaron una huella imborrable en mi formación y en mi vida.

A todos, muchas gracias. El impacto que han tenido en mí no es proporcional a todo lo que yo alguna vez pueda escribir sobre ustedes.

Índice general

1. Cien Años de Variedades	3
1.1. Variedades Suaves	3
1.2. Haz Tangente	9
1.3. k -Formas Suaves	19
1.3.1. Álgebra Exterior sobre Espacios Vectoriales	19
1.3.2. k -Formas Suaves	21
1.4. El Álgebra de k -Formas	24
1.4.1. Producto Cuña	24
1.4.2. Pullback	27
1.5. Integración en Variedades	30
1.5.1. Integración en $\mathbb{R}^n$	30
1.5.2. Integración en Variedades	34
1.5.3. Derivada Exterior	44
1.5.4. Teorema de Stokes	49
2. Rayuelas de Cocadenas	53
2.1. Cohomología de De Rham	53
2.2. Categorías	57
2.3. Invarianza Homotópica	58
2.3.1. Derivada de Lie y la Fórmula Mágica de Cartan	59
2.3.2. Invarianza Homotópica de la Cohomología de De Rham	62
2.4. Mayer-Vietoris	66
2.4.1. El Homomorfismo de Conexión	66
2.5. Ejemplos	71
2.6. Dualidad de Poincaré	77
2.6.1. Grupos de Cohomología de $\mathbb{C}P^n$ como Álgebra Graduada	79
3. Grupos de Lie Salvajes	81
3.1. La Fórmula de Künneth	81
3.1.1. R -Módulos	83
3.1.2. Producto Tensorial de Cocadenas	88
3.1.3. Demostración de la Fórmula de Künneth	96
3.2. Anillo de Cohomología del Producto de Esferas	98
3.2.1. Álgebra Exterior Generada por un Conjunto	98
3.2.2. Producto Tensorial de Álgebras Exteriores	103

3.3. Cohomología de De Rham para Grupos de Lie Compactos y Conexos . . .	106
Lista de notación	109

Introducción

En matemáticas es común introducir primero un concepto en un contexto específico y posteriormente generalizarlo para obtener un marco más amplio de estudio. Un ejemplo típico es el cálculo diferencial: originalmente concebido como una herramienta para medir la tasa de cambio de funciones reales $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, luego evolucionó naturalmente hacia el cálculo de varias variables. Las variedades surgen como una generalización de los espacios euclidianos: intuitivamente, son espacios que localmente se parecen a $\mathbb{R}^n$. En el contexto de variedades suaves se exige, además, que localmente sean difeomorfos a abiertos de $\mathbb{R}^n$, lo que permite introducir nociones de diferenciabilidad, espacios tangentes, derivadas parciales y demás herramientas del cálculo diferencial sobre una variedad suave. La definición moderna de variedad aparece por primera vez en [Veb62]; no obstante, conceptos análogos ya aparecían en la literatura matemática anterior (véanse [Gau28] y [Rie54]), lo que sugiere que esta definición es esencial en el campo de las matemáticas.

Nuestro objetivo en el primer capítulo es introducir las formas suaves: dada una variedad M y un entero $k \geq 0$, una forma suave de grado k (ó k -forma) es, de manera conceptual, una asignación suave que asocia a cada punto de M un tensor alternante de grado k en el espacio cotangente. Un caso particular son las 0-formas, que comúnmente llamamos funciones real-valuadas. Siguiendo la narrativa de generalización antes descrita, las formas suaves extienden la noción de función y permiten definir integrales sobre variedades; en particular, para una variedad orientada de dimensión n existen integrales de n -formas que generalizan la integral clásica de funciones. En ese entorno adecuado y elegante se unifican los Teoremas de Green, Gauss y el Teorema clásico de Stokes en un único enunciado general: el Teorema de Stokes. Sin duda, este caso representa adecuadamente el espíritu de las matemáticas, que busca crear un sistema consistente en donde expresar ideas abstractas, destacando el carácter constructivo y creador de las matemáticas, tal como expresó János Bolyai: “*Out of nothing I have created a strange new universe*”.

En el segundo capítulo presentamos la cohomología de De Rham, una de las herramientas fundamentales que relacionan el análisis diferencial con la topología. La cohomología de De Rham asigna a cada variedad suave una sucesión de espacios vectoriales (los grupos de cohomología), y esta asignación es funtorial: un morfismo suave entre variedades induce morfismos lineales entre sus grupos de cohomología. Conviene entender la cohomología de De Rham como una forma sistemática de transformar problemas topológicos en problemas algebraicos, de modo que técnicas algebraicas permitan estudiar invariantes topológicos. El propósito de esto es poder calcular invariantes que distingan variedades y describan su estructura. En el Capítulo 2 establecemos las hipótesis necesarias para definir la cohomología de De Rham, demostramos su invarianza homotópica y presentamos herramientas

que facilitan el cálculo de estos grupos en ejemplos concretos. El final de este capítulo sirve como una introducción de lo que veremos en el tercer y último capítulo, donde, usando la dualidad de Poincaré calcularemos el anillo de cohomología de $\mathbb{C}P^n$ como álgebra.

El tercer capítulo profundiza en la estructura de álgebra graduada que poseen los anillos de cohomología. En particular, estudiaremos la riqueza algebraica que emerge al considerar los anillos de cohomología de grupos de Lie. Los grupos de Lie son variedades que además poseen una estructura de grupo suave; este doble carácter los convierte en objetos de interés central en muchas áreas de la matemática y la física. El término *grupo de Lie* es debido a Sophus Lie, quien inició el estudio sistemático de estas estructuras en una serie de trabajos a partir de 1874. Para abordar la cohomología de ciertos grupos de Lie necesitaremos resultados que permitan calcular productos y tensores de anillos de cohomología. Un teorema clave en este sentido es el teorema de Künneth, que relaciona la cohomología de un producto de variedades con el producto tensorial de las cohomologías de cada factor; su demostración no es trivial y será un objetivo central del Capítulo 3, donde ampliaremos el lenguaje desde espacios vectoriales a R -módulos según sea necesario. Con estas herramientas, procederemos al cálculo explícito del anillo de cohomología del grupo de Lie $U(n)$, que constituyen el objeto de estudio de esta tesis.

Este trabajo sigue la estructura establecida por Alexander Kupers en sus notas [Kup20]. Por razones personales y de estilo, los nombres de los capítulos toman como referencia obras literarias del llamado “boom latinoamericano” y de la literatura posterior; el primer capítulo está inspirado en *Cien años de soledad* de Gabriel García Márquez, el segundo capítulo es una referencia a *Rayuela* de Julio Cortázar, y el tercero es una alusión a *Los detectives salvajes* de Roberto Bolaño. Después del nombre de cada capítulo aparece un epígrafe del respectivo libro en el que están basados los nombres de los capítulos, con el objeto de establecer cierta relación entre la obra y el contenido del capítulo. Estos títulos y epígrafes son apreciaciones personales que buscan subrayar analogías temáticas y aportar un matiz creativo a la estructura del trabajo; no pretenden implicar correspondencias estrictas entre periodos literarios y desarrollo matemático.

Finalmente, este trabajo pretende ser, por un lado, una exposición ordenada y rigurosa de conceptos fundamentales: formas suaves, teorema de Stokes, cohomología de De Rham y, por otro, una demostración práctica de técnicas de cálculo de cohomología en ejemplos relevantes en donde son imprescindibles técnicas de cálculo multivariable y álgebra lineal, cursos básicos en la licenciatura. Por otro lado, busca mostrar de forma accesible conexiones profundas que podemos encontrar en la estructura algebraica de los grupos de cohomología, además de establecer una conexión con la topología algebraica.

Capítulo 1

Cien Años de Variedades

El mundo era tan reciente, que muchas cosas carecían de nombre, y para mencionarlas había que señalarlas con el dedo.

Gabriel García Márquez.

1.1. Variedades Suaves

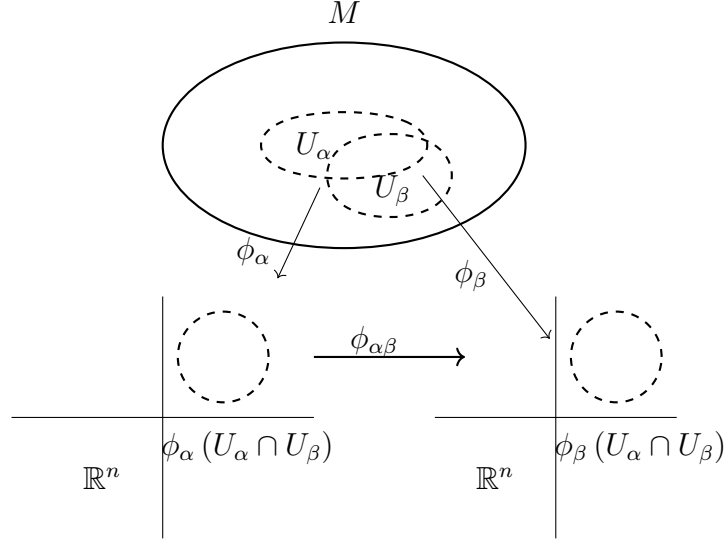
En este primer capítulo vamos a generalizar varios conceptos y teoremas vistos en nuestros primeros cursos de cálculo, empezando con la definición de variedad suave.

Definición 1.1.1. *Una variedad suave de dimensión n (ó n -variedad suave) es un espacio topológico Hausdorff, segundo numerable, junto con una estructura diferenciable definida por un atlas maximal suave.*

Un atlas de una variedad suave M es una colección de cartas $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$, es decir, una colección de tuplas (U_α, ϕ_α) , donde $U_\alpha \subset M$ es un subconjunto abierto de M y $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo de U_α a un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. El mapeo ϕ_α es llamado un mapeo local coordinado, ya que se puede ver como $\phi_\alpha(p) = (x_1(p), \dots, x_n(p))$, las funciones componentes son llamadas coordenadas locales en U_α , por lo que tiene sentido denotar a una carta como $(U_\alpha, \phi_\alpha) = (U_\alpha, x_1, \dots, x_n)$. Para que esta colección de cartas sea un atlas se debe cumplir que $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$. Decimos que un atlas es suave si todos los mapeos

$$\phi_{\alpha\beta} = \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

son mapeos suaves, es decir, mapeos de clase C^∞ entre conjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$. A los mapeos $\phi_{\alpha\beta}$ los vamos a llamar mapeos de transición.



Además, los mapeos de transición en un atlas suave son difeomorfismos, es decir, tienen inversa suave. En efecto $\phi_{\beta\alpha} \circ \phi_{\alpha\beta} = \phi_{\alpha\alpha} = \text{Id}_{\mathbb{R}^n}$ y $\phi_{\alpha\beta} \circ \phi_{\beta\alpha} = \phi_{\beta\beta} = \text{Id}_{\mathbb{R}^n}$ y por lo tanto $\phi_{\beta\alpha}$ es la inversa de $\phi_{\alpha\beta}$, y ya que estamos suponiendo que es un atlas suave, entonces el mapeo de transición $\phi_{\beta\alpha}$ es suave y por lo tanto $\phi_{\alpha\beta}$ es un difeomorfismo.

Dos atlas de M se dicen compatibles si su unión es un atlas. Decimos que un atlas $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ es maximal si cualquier atlas compatible que lo contiene está forzado a ser él mismo. Sin embargo, para mostrar que algo es una variedad suave basta con dar un atlas suave, esto debido a la siguiente proposición:

Proposición 1.1.2. *Todo atlas suave está contenido en un único atlas maximal.*

Demostración:

Sean $A' = \{(U'_\beta, \phi'_\beta)\}$ y $A'' = \{(U''_\gamma, \phi''_\gamma)\}$ dos atlas suaves que contienen un atlas suave $A = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$. Consideremos, para cada β, γ ,

$$\phi_{\beta\gamma} = \phi''_\gamma \circ (\phi'_\beta)^{-1} : \phi'_\beta(U'_\beta \cap U''_\gamma) \rightarrow \phi''_\gamma(U'_\beta \cap U''_\gamma).$$

Vamos a demostrar que $\phi_{\beta\gamma}$ es suave y por lo tanto A' y A'' compatibles. Ya que la suavidad es una propiedad local, basta con demostrar que cada $x \in \phi'_\beta(U'_\beta \cap U''_\gamma)$ tiene una vecindad abierta tal que la restricción de $\phi_{\beta\gamma}$ a esa vecindad abierta es suave.

Tomemos una carta $(U_\alpha, \phi_\alpha) \in A$ tal que $(\phi'_\beta)^{-1}(x) \in U_\alpha$. Podemos escribir la restricción de $\phi_{\beta\gamma}$ a $\phi'_\beta(U_\alpha \cap U'_\beta \cap U''_\gamma)$ como

$$\phi_{\beta\gamma} \Big|_{\phi'_\beta(U_\alpha \cap U'_\beta \cap U''_\gamma)} = \left(\phi''_\gamma \circ (\phi_\alpha)^{-1} \right) \Big|_{\phi_\alpha(U_\alpha \cap U'_\beta \cap U''_\gamma)} \circ \left(\phi_\alpha \circ (\phi'_\beta)^{-1} \right) \Big|_{\phi'_\beta(U_\alpha \cap U'_\beta \cap U''_\gamma)}$$

que es composición de dos mapeos suaves, ya que A' y A'' son compatibles con A , y ya que composición de mapeos suaves es suave, se tiene que $\phi_{\beta\gamma}$ es suave y por lo tanto A' y

A'' son compatibles. Ahora que hemos probado que si $A \subset A'$ y $A \subset A''$, implica que A' y A'' son compatibles, podemos construir un único atlas maximal de la siguiente manera:

$$A_{\max} := \bigcup_{A \subset A'} A'$$

donde A' contiene a A . □

Veamos algunos ejemplos de atlas en variedades suaves:

Ejemplo 1.1.3. *El ejemplo más trivial que podemos encontrar de una variedad suave es $\mathbb{R}^n$, notemos que $\{(\mathbb{R}^n, \text{Id}_{\mathbb{R}^n})\}$ es un atlas suave para $\mathbb{R}^n$.*

Aquí un ejemplo no tan trivial, pero muy conocido. Antes de introducirlo, enunciaremos un resultado general sobre mapeos cocientes que utilizaremos más adelante. Este resultado puede encontrarse en [Lee13, A.27].

Teorema 1.1.4. *Sean X y Y espacios topológicos y $\pi : X \rightarrow Y$ un mapeo cociente. Si B es un espacio topológico, un mapeo $F : Y \rightarrow B$ es continuo si y solo si $F \circ \pi : X \rightarrow B$ es continuo.*

Ejemplo 1.1.5. *Sea $\mathbb{CP}^1$ definido como $(\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}) / \sim$, donde $(z_1, z_2) \sim (z'_1, z'_2)$ si y solo si existe $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $(z_1, z_2) = \lambda(z'_1, z'_2)$. A la clase de equivalencia la denotamos $[z_1 : z_2]$. Como cociente de $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ existe una proyección natural, llamado el mapeo cociente, $\pi : \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \rightarrow (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}) / \sim$, que manda $x \in \mathbb{C}^2$ a su clase de equivalencia. Definimos la topología en $\mathbb{CP}^1$ declarando que U es abierto si $\pi^{-1}(U)$ es abierto en $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$.*

Definamos:

$$U_1 = \mathbb{CP}^1 \setminus \{[0 : 1]\}, \quad U_2 = \mathbb{CP}^1 \setminus \{[1 : 0]\},$$

y

$$\begin{aligned} \varphi_1 : U_1 &\rightarrow \mathbb{C}, & [1 : z_2] &\mapsto z_2, \\ \varphi_2 : U_2 &\rightarrow \mathbb{C}, & [z_1 : 1] &\mapsto z_1, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \varphi_1^{-1} : \mathbb{C} &\rightarrow U_1, & z &\mapsto [1 : z], \\ \varphi_2^{-1} : \mathbb{C} &\rightarrow U_2, & z &\mapsto [z : 1]. \end{aligned}$$

Ahora veamos que φ_1, φ_2 son homeomorfismos. Consideremos primero el caso de φ_1 . Para ello, observemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_1) \subset \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} & \xrightarrow{\pi} & U_1 \subset \mathbb{CP}^1 \\ & \searrow \varphi_1 \circ \pi & \downarrow \varphi_1 \\ & & \mathbb{C} \end{array}$$

La restricción $\pi|_{\pi^{-1}(U_1)} : \pi^{-1}(U_1) \rightarrow U_1$ es un mapeo cociente, véase el Teorema 22.1 de [Mun00]. Sea $(z_1, z_2) \in \pi^{-1}(U_1)$. Entonces,

$$\begin{aligned} \varphi_1 \circ \pi(z_1, z_2) &= \varphi_1([z_1, z_2]) \\ &= \frac{z_2}{z_1}, \end{aligned}$$

es un mapeo suave. Por el teorema 1.1.4 se sigue que φ_1 es un mapeo continuo. Por otra parte, el mapeo φ_1^{-1} puede escribirse como la composición

$$\varphi_1^{-1} = \pi \circ f,$$

donde

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}, \quad z \mapsto (1, z),$$

y

$$\pi : \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}P^1, \quad (z_1, z_2) \mapsto [z_1 : z_2],$$

es el mapeo cociente. Como ambos mapeos son continuos se concluye que φ_1^{-1} es continuo. Por lo tanto φ_1 es un homeomorfismo. Análogamente se prueba que φ_2 es un homeomorfismo. Vamos a ver que $\{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)\}$ es un atlas suave para $\mathbb{C}P^1$, por la Proposición 1.1.2, no es necesario que este atlas sea maximal para concluir que $\mathbb{C}P^1$ es una variedad suave. Primero observemos que $U_1 \cup U_2 = \mathbb{C}P^1$. Ahora vamos a mostrar que los mapeos de transición φ_{12} y φ_{21} son suaves. Sea

$$\varphi_{12} = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) = \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

uno de los mapeos de transición y $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, veamos que:

$$\begin{aligned} \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(z) &= \varphi_2([1 : z]) \\ &= \varphi_2([z^{-1} : 1]) \\ &= z^{-1}, \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad es debido a que $(1, z) = z(z^{-1}, 1)$ implica $[1 : z] = [z^{-1} : 1]$. De manera similar para el otro mapeo de transición φ_{21} tenemos

$$\begin{aligned} \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(z) &= \varphi_1([z : 1]) \\ &= \varphi_1([1 : z^{-1}]) \\ &= z^{-1}, \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad es debido a que $(z, 1) = z(1, z^{-1})$ implica $[z : 1] = [1 : z^{-1}]$. Los mapeos de transición $\varphi_{12}, \varphi_{21}$ son suaves en el sentido real, pues ambas corresponden a la función

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \quad (x, y) \mapsto \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2} \right),$$

que es suave.

Ejemplo 1.1.6. Sea $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}$. Definamos:

$$V_1 = S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}, \quad V_2 = S^2 \setminus \{(0, 0, -1)\},$$

y

$$\psi_1 : V_1 \rightarrow \mathbb{C}, \quad (a, b, c) \mapsto \frac{a}{1-c} + i \frac{b}{1-c},$$

$$\psi_2 : V_2 \rightarrow \mathbb{C}, \quad (a, b, c) \mapsto \frac{a}{1+c} + i \frac{b}{1+c},$$

donde

$$\psi_1^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow V_1, \quad z \mapsto \left(\frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1}, \frac{z - \bar{z}}{i(1 + |z|^2)}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right),$$

$$\psi_2^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow V_2, \quad z \mapsto \left(\frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1}, \frac{z - \bar{z}}{i(1 + |z|^2)}, -\frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right).$$

El mapeo $\psi_1(a, b, c) = \frac{a}{1+c} + i \frac{b}{1+c}$ es continuo en el sentido real, pues corresponde al mapeo $\psi'_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que envía (x, y, z) a $\left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right)$, que es suave si $z \neq 1$, que en este caso no estaría en el dominio pues a S^2 le removimos el punto $(0, 0, 1)$. El mapeo ψ_1^{-1} es suave pues igualmente la podemos ver como un mapeo de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que en este caso siempre es suave, ya que los denominadores de las tres entradas siempre son distintos de cero. Análogamente se prueba que ψ_2 es un difeomorfismo y por lo tanto ambos son difeomorfismos.

Ya que $V_1 \cup V_2 = S^2$, entonces $\{(V_1, \psi_1), (V_2, \psi_2)\}$ es un atlas para S^2 conocido como la proyección estereográfica. Ahora veamos que es suave. Sean

$$\psi_{12} = \psi_2 \circ \psi_1^{-1} : \psi_1(V_1 \cap V_2) = \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \psi_2(V_1 \cap V_2) = \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

$$\psi_{21} = \psi_1 \circ \psi_2^{-1} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

los mapeos de transición de este atlas. Tomemos $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, entonces

$$\begin{aligned} \psi_2 \circ \psi_1^{-1}(z) &= \psi_2 \left(\frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1}, \frac{z - \bar{z}}{i(1 + |z|^2)}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right) \\ &= z^{-1}, \end{aligned}$$

por otro lado

$$\begin{aligned} \psi_1 \circ \psi_2^{-1}(z) &= \psi_1 \left(\frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1}, \frac{z - \bar{z}}{i(1 + |z|^2)}, -\frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right) \\ &= z^{-1}, \end{aligned}$$

que son suaves para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Ahora vamos a definir los mapeos suaves entre variedades.

Definición 1.1.7. Sea $F : M \rightarrow N$ un mapeo entre una n -variedad M y una m -variedad N . Decimos que F es suave en el punto $p \in M$ si existen cartas (V, ψ) y (U, ϕ) con $F(p) \in V$ y $p \in U$ tales que la composición $h = \psi|_{V \cap F(U)} \circ F|_{F^{-1}(V) \cap U} \circ \phi^{-1}|_{\phi(F^{-1}(V) \cap U)}$ es suave en $\phi(p)$,

$$\begin{array}{ccc} F^{-1}(V) \cap U \subset M & \xrightarrow{F} & V \subset N \\ \downarrow \phi & & \downarrow \psi \\ \phi(F^{-1}(V) \cap U) & \xrightarrow{h} & \mathbb{R}^m \end{array}$$

esto es, el mapeo del subconjunto abierto $\phi(F^{-1}(V) \cap U)$ de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$, es suave en $\phi(p)$.

A continuación vamos a dar un ejemplo de difeomorfismo entre variedades:

Ejemplo 1.1.8. $\mathbb{C}P^1$ es difeomorfo a S^2 .

Demostración:

Usando la notación de los Ejemplos 1.1.5 y 1.1.6, definamos $F : \mathbb{C}P^1 \rightarrow S^2$ como

$$F([z_1 : z_2]) = \begin{cases} \psi_1^{-1}(\varphi_1([z_1 : z_2])) & \text{si } [z_1 : z_2] \in U_1, \\ \psi_2^{-1}(\varphi_2([z_1 : z_2])) & \text{si } [z_1 : z_2] \in U_2. \end{cases}$$

Primero, vamos a ver que está bien definida. Supongamos que $[z_1 : z_2] \in U_1 \cap U_2$, esto es, $z_1, z_2 \neq 0$, veamos que se cumplen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} \psi_1^{-1}(\varphi_1([z_1 : z_2])) &= \psi_1^{-1}\left(\varphi_1\left(\left[\frac{z_1}{z_1} : \frac{z_2}{z_1}\right]\right)\right) \\ &= \psi_1^{-1}\left(\frac{z_2}{z_1}\right) \\ &= \psi_2^{-1}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \\ &= \psi_2^{-1}\left(\varphi_2\left(\left[\frac{z_1}{z_2} : 1\right]\right)\right) = \psi_2^{-1}(\varphi_2([z_1 : z_2])), \end{aligned}$$

por lo tanto F está bien definida. Para probar que F es suave vamos a verificar que para todo par de índices $i, j \in \{1, 2\}$, el mapeo h es suave.

$$\begin{array}{ccc} F^{-1}(V_j) \cap U_i \subset \mathbb{C}P^1 & \xrightarrow{F} & V_j \subset S^2 \\ \downarrow \varphi_i & & \downarrow \psi_j \\ \varphi_i(F^{-1}(V_j) \cap U_i) \subset \mathbb{C} & \xrightarrow{h} & \mathbb{C} \end{array}$$

Para ello vamos a separarlo por casos. Si $i = j$ entonces

$$h = \psi_j \circ F \circ \varphi_i^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto z,$$

y si $i \neq j$

$$h = \psi_j \circ F \circ \varphi_i^{-1} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad z \mapsto z^{-1},$$

por lo tanto h es un mapeo suave. Solo falta verificar que su inversa, $F^{-1} : S^2 \rightarrow \mathbb{C}P^1$, definida de la siguiente manera:

$$F^{-1}(x) = \begin{cases} \varphi_1^{-1}(\psi_1(x)) & \text{si } x \in V_1, \\ \varphi_2^{-1}(\psi_2(x)) & \text{si } x \in V_2, \end{cases}$$

es suave. Para ello, vamos a verificar que para todo par de índices $i, j \in \{1, 2\}$, el mapeo h^{-1} es suave. Si $j = i$ entonces

$$h^{-1} = \varphi_i \circ F^{-1} \circ \psi_j^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto z,$$

y si $j \neq i$

$$h^{-1} = \varphi_i \circ F^{-1} \circ \psi_j^{-1} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad z \mapsto z^{-1},$$

y ambos son suaves en su respectivo dominio. Concluyendo que $\mathbb{C}P^1$ es difeomorfo a S^2 . □

1.2. Haz Tangente

Ahora vamos a definir el espacio tangente en un punto de una variedad. Existen distintas formas de definir este espacio, nosotros la definiremos usando gérmenes. Vamos a definir una relación de equivalencia $\sim$ en el conjunto de mapeos suaves entre variedades en una vecindad de $p \in M$. Consideremos

$$\{f : U \subset M \rightarrow N : M \text{ y } N \text{ variedades, } U \text{ es una vecindad abierta de } p, f \text{ es suave}\},$$

diciendo que $f \sim g$ si existe una vecindad abierta V de p tal que $f|_V = g|_V$. Comprobemos que en efecto se trata de una relación de equivalencia.

- *Reflexividad:* Es claro que $f \sim f$, ya que para cualquier vecindad abierta U de $p \in M$, $f|_U = f|_U$.
- *Simetría:* Si $f \sim g$ entonces existe una vecindad abierta V de p tal que $f|_V = g|_V$, pero esto es lo mismo que $g|_V = f|_V$, por lo tanto $g \sim f$.
- *Transitividad:* Supongamos que $f \sim g$ y $g \sim h$, entonces existen vecindades abiertas V, W de $p \in M$ tales que $f|_V = g|_V$ y $g|_W = h|_W$, pero $V \cap W \subset V$ y $V \cap W \subset W$ así que también se cumple que $f|_{V \cap W} = g|_{V \cap W}$ y $g|_{V \cap W} = h|_{V \cap W}$. Ya que p pertenece tanto a V como a W también va a pertenecer a la intersección $V \cap W$ y además la intersección de dos vecindades abiertas es una vecindad abierta. Hemos encontrado una vecindad abierta $V \cap W$ en p tal que $f|_{V \cap W} = h|_{V \cap W}$ y $f \sim h$.

Definición 1.2.1. La clase de equivalencia de $f : U \rightarrow N$ bajo $\sim$ se llama *germen de f en p* . El conjunto de gérmenes de mapeos con valores reales suaves $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ en $p \in M$ es denotado por $C_p^\infty(M)$.

El espacio tangente de una variedad M en un punto p , denotado por $T_p M$, es el conjunto de todas las derivaciones en p . Una derivación en p es un funcional lineal $X : C_p^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ que asigna a cada función diferenciable $f \in C_p^\infty(M)$ un número real $X(f)$ tal que satisface la regla de Leibniz:

$$X(fg) = f(p)X(g) + g(p)X(f), \quad \forall f, g \in C_p^\infty(M).$$

El conjunto de todas las derivaciones de $C_p^\infty(M)$ es cerrado bajo suma y producto escalar con las operaciones

$$(X_1 + X_2)(f) = X_1(f) + X_2(f), \quad (cX)(f) = c(X(f)),$$

para $f \in C_p^\infty(M)$, $c \in \mathbb{R}$. Es fácil comprobar que $T_p M$ es un espacio vectorial con estas dos operaciones.

Proposición 1.2.2. Sea M una variedad, $p \in M$, $X \in T_p M$ y $f, g \in C_p^\infty(M)$, entonces se cumplen las siguientes afirmaciones.

1. Si f es una función constante, entonces $X(f) = 0$.

2. Si $f(p) = g(p) = 0$, entonces $X(fg) = 0$.

Demostración:

1. Supongamos que $f = \text{cte}_c$, donde cte_c es la función constante que manda todo a $c \in \mathbb{R}$. Entonces por linealidad de las derivaciones

$$X(f) = X(\text{cte}_c) = cX(\text{cte}_1),$$

por lo que basta probar el caso cte_1 . Luego

$$\begin{aligned} X(\text{cte}_1) &= X(\text{cte}_1 \cdot \text{cte}_1) \\ &= 1X(\text{cte}_1) + 1X(\text{cte}_1) \\ &= 2X(\text{cte}_1), \end{aligned}$$

por lo tanto $X(\text{cte}_1) = 0$, completando la prueba.

2. Por la regla de Leibniz,

$$X(fg) = g(p)X(f) + f(p)X(g) = 0. \quad \square$$

El uso de gérmenes para definir el haz tangente está justificado, pues queremos que $T_p\mathbb{R}^n$ sea generado por el conjunto $\{\partial/\partial r_1|_p, \dots, \partial/\partial r_n|_p\}$, donde $r_1, \dots, r_n$ son las coordenadas usuales en $\mathbb{R}^n$. Veamos el caso para $T_p\mathbb{R}$: sea $f \in C_p^\infty(\mathbb{R})$, por el Teorema de Taylor se tiene, como igualdad de gérmenes en p :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(p) + \left(\frac{d}{dx} \Big|_p (f) \right) (x-p) + \frac{1}{2!} \left(\frac{d^2}{dx^2} \Big|_p (f) \right) (x-p)^2 \\ &\quad + \dots + \frac{1}{k!} \left(\frac{d^k}{dx^k} \Big|_p (f) \right) (x-p)^k + \dots \\ &= f(p) + f_1(x)(x-p), \end{aligned}$$

donde $f_1(x) = \frac{d}{dx} \Big|_p (f) + \frac{1}{2!} \left(\frac{d^2}{dx^2} \Big|_p (f) \right) (x-p) + \frac{1}{3!} \left(\frac{d^3}{dx^3} \Big|_p (f) \right) (x-p)^2 + \dots$, y $f_1(p) = \frac{d}{dx} \Big|_{x=p} (f)$. Por lo tanto

$$f = \text{cte}_{f(p)} + f_1(\text{Id}_{\mathbb{R}} - \text{cte}_p). \quad (1.1)$$

Sea X una derivación en p , por (1.1) se cumple

$$\begin{aligned} X(f) &= X(\text{cte}_{f(p)}) + X(f_1(\text{Id}_{\mathbb{R}} - \text{cte}_p)) \\ &= 0 + X(f_1(\text{Id}_{\mathbb{R}} - \text{cte}_p)) \\ &= X(f_1)(\text{Id}_{\mathbb{R}} - \text{cte}_p)(p) + X(\text{Id}_{\mathbb{R}} - \text{cte}_p)f_1(p) \\ &= X(f_1)(0) + X(\text{Id}_{\mathbb{R}} - \text{cte}_p)f_1(p) \\ &= X(\text{Id}_{\mathbb{R}} - \text{cte}_p) \frac{d}{dx} \Big|_{x=p} (f). \end{aligned}$$

Por lo tanto toda derivación X de $T_p\mathbb{R}$ se puede ver como una combinación lineal (de un elemento) de la derivada de f respecto a x en p y la derivada usual es una base para el espacio tangente de $\mathbb{R}$ en p .

Veamos que existe una manera natural de definir las derivadas parciales en una variedad suave.

Definición 1.2.3. Denotemos como $r_1, \dots, r_n$ a las coordenadas usuales en $\mathbb{R}^n$. Sea M una n -variedad y $(U, \phi) = (U, x_1, \dots, x_n)$ una carta alrededor de $p \in M$, donde $x_i = r_i \circ \phi : U \rightarrow \mathbb{R}$. Si f es un mapeo suave en una vecindad de p , definimos:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p f := \frac{\partial}{\partial r_i} \Big|_{\phi(p)} (f \circ \phi^{-1}) \in \mathbb{R}.$$

También se suele escribir

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_p = \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p f.$$

Ahora veamos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p (fg) &= \frac{\partial}{\partial r_i} \Big|_{\phi(p)} ((fg) \circ \phi^{-1}) \\ &= \frac{\partial}{\partial r_i} \Big|_{\phi(p)} (f \circ \phi^{-1}) (g \circ \phi^{-1}) \\ &= (f \circ \phi^{-1}) (\phi(p)) \frac{\partial}{\partial r_i} \Big|_{\phi(p)} (g \circ \phi^{-1}) \\ &\quad + (g \circ \phi^{-1}) (\phi(p)) \frac{\partial}{\partial r_i} \Big|_{\phi(p)} (f \circ \phi^{-1}) \\ &= f(p) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p g + g(p) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p f. \end{aligned}$$

Cumple la regla de Leibniz, por lo tanto $\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p$ es una derivación en p , por lo tanto un vector tangente en p .

Definición 1.2.4. Sea $F : M \rightarrow N$ un mapeo suave de variedades, donde M y N tienen dimensiones n y m respectivamente. Para cada punto $p \in M$, el mapeo F induce un mapeo lineal entre espacios tangentes, llamado la diferencial de F en p

$$(dF)_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N,$$

que está dado como sigue: si $X \in T_p M$, entonces $(dF)_p(X)$ está definido por

$$\left((dF)_p(X) \right) (f) = X(f \circ F) \in \mathbb{R} \quad \text{para } f \in C_{F(p)}^\infty(N).$$

Para ver que lo anterior tiene sentido, notemos que si $f \in C_{F(p)}^\infty(N)$ entonces $f \circ F \in C_p^\infty(M)$. Luego el operador $(dF)_p(X)$ es lineal ya que X es lineal, y cumple la regla de Leibniz debido a que para $f, g \in C_{F(p)}^\infty(N)$ se cumple:

$$\begin{aligned} (dF)_p(X)(fg) &= X((fg) \circ F) \\ &= X((f \circ F)(g \circ F)) \\ &= (f \circ F)(p) X(g \circ F) + (g \circ F)(p) X(f \circ F) \\ &= f(F(p)) (dF)_p(X)(g) + g(F(p)) (dF)_p(X)(f). \end{aligned}$$

Por lo tanto $(dF)_p(X) \in T_{F(p)}N$.

Teorema 1.2.5. *(Regla de la cadena) Si $F : N \rightarrow M$ y $G : M \rightarrow L$ son mapeos suaves entre variedades y $p \in N$, entonces*

$$(d(G \circ F))_p = (dG)_{F(p)} \circ (dF)_p.$$

Demostración:

Sea $X \in T_pN$ y sea f un germen en $G(F(p)) \in L$ entonces:

$$\left((d(G \circ F))_p X \right) (f) = X(f \circ G \circ F), \quad (1.2)$$

y por otro lado

$$\begin{aligned} \left(\left((dG)_{F(p)} \circ (dF)_p \right) X \right) (f) &= \left((dG)_{F(p)} \left((dF)_p X \right) \right) (f) \\ &= \left((dF)_p(X) \right) (f \circ G) \\ &= X(f \circ G \circ F). \end{aligned} \quad (1.3)$$

De (1.2) y (1.3) se tiene que

$$(d(G \circ F))_p = (dG)_{F(p)} \circ (dF)_p. \quad \square$$

A lo largo de este trabajo estaremos usando el espacio tangente de una variedad en un punto, por lo que nos conviene tener una base “canónica” para este espacio, y ahora usando la diferencial de un mapeo podemos probar una proposición que nos da esa base. Pero antes vamos a mostrar algunas cosas que necesitaremos.

La diferencial del mapeo identidad $\text{Id}_M : M \rightarrow M$ está dada por

$$\left((d \text{Id}_M)_p X_p \right) (f) = X_p(f \circ \text{Id}_M) = X_p(f),$$

para todo $X_p \in T_pM$ y $f \in C_p^\infty(M)$. Y por lo tanto

$$(d \text{Id}_M)_p = \text{Id}_{T_pM} : T_pM \rightarrow T_pM.$$

Sea (U, ϕ) una carta de M y $p \in U$. La diferencial de ϕ en p induce un mapeo lineal

$$(d\phi)_p : T_p M \rightarrow T_{\phi(p)} \mathbb{R}^n.$$

Ya que $\phi : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ es un difeomorfismo, existe $\psi : V \rightarrow U$ tal que $\phi \circ \psi = \text{Id}_V$ y $\psi \circ \phi = \text{Id}_U$. Por la regla de la cadena

$$(d\psi)_{\phi(p)} \circ (d\phi)_p = (d(\psi \circ \phi))_p = (d \text{Id}_U)_p = \text{Id}_{T_p M},$$

y

$$(d\phi)_p \circ (d\psi)_{\phi(p)} = (d(\phi \circ \psi))_{\phi(p)} = (d \text{Id}_V)_{\phi(p)} = \text{Id}_{T_{\phi(p)} \mathbb{R}^n}.$$

Concluimos que $(d\phi)_p$ es un isomorfismo de espacios vectoriales y $T_p M$ tiene la misma dimensión que M , de manera análoga se puede probar lo siguiente:

Corolario 1.2.6. *Si $F : N \rightarrow M$ es un difeomorfismo de variedades y $p \in N$, entonces $(dF)_p : T_p N \rightarrow T_{F(p)} M$ es un isomorfismo de espacios vectoriales.*

La siguiente proposición muestra que la derivada parcial proporciona de forma natural una base para el espacio tangente de $\mathbb{R}^n$.

Proposición 1.2.7. *El conjunto $\{\partial/\partial r_1|_p, \dots, \partial/\partial r_n|_p\}$ genera $T_p \mathbb{R}^n$.*

La demostración de esta proposición es análoga al caso de $T_p \mathbb{R}$, usando el Teorema de Taylor en varias variables:

Teorema 1.2.8 (Teorema de Taylor en varias variables). *Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^∞ en una vecindad de un punto $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$. Entonces, para $x = (x_1, \dots, x_n)$ suficientemente cercano a p , se tiene*

$$\begin{aligned} f(x) = & f(p) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)(x_i - p_i) + \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)(x_i - p_i)(x_j - p_j) \\ & + \dots + \frac{1}{k!} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(p)(x_{i_1} - p_{i_1}) \dots (x_{i_k} - p_{i_k}) + \dots \end{aligned}$$

Véase [MTM91, §3.2], donde se presentan explícitamente los casos hasta tercer orden, es decir, para funciones $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 , C^2 y C^3 respectivamente. La forma general se puede probar por inducción, usando el método de demostración que se da para el caso de segundo orden.

A continuación vamos a dar una base para el espacio tangente de M en un punto p .

Proposición 1.2.9. *Sea $(U, \phi) = (U, x_1, \dots, x_n)$ una carta alrededor de $p \in M$. Entonces, $\{\partial/\partial x_1|_p, \dots, \partial/\partial x_n|_p\}$ es una base para $T_p M$.*

Demostración:

Dada $f \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$, tenemos que

$$\begin{aligned} \left((d\phi)_p \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \right) (f) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p (f \circ \phi) \\ &= \frac{\partial}{\partial r_i} \Big|_{\phi(p)} (f \circ \phi \circ \phi^{-1}) \\ &= \frac{\partial}{\partial r_i} \Big|_{\phi(p)} (f). \end{aligned}$$

Y ya que $\left\{ \frac{\partial}{\partial r_1} \Big|_{\phi(p)}, \dots, \frac{\partial}{\partial r_n} \Big|_{\phi(p)} \right\}$ es una base para el espacio tangente $T_{\phi(p)}\mathbb{R}^n$ y que $(d\phi)_p : T_p M \rightarrow T_{\phi(p)}\mathbb{R}^n$ es un isomorfismo de espacios vectoriales se sigue que $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_p \right\}$ es una base de $T_p M$. $\square$

Proposición 1.2.10. *Sea M una variedad suave y $U \subset M$ una vecindad de $p \in M$. Entonces,*

$$T_p U = T_p M.$$

Demostración:

Sea (V, ψ) una carta de M alrededor de p , entonces $U \cap V \neq \emptyset$ es un conjunto abierto en M porque tanto U como V son abiertos en M . Así existe una carta $(U \cap V, \phi) = (U \cap V, x_1, \dots, x_n)$ donde $T_p U$ y $T_p M$ están generados por el conjunto

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_p \right\}.$$

Entonces $T_p U = T_p M$. $\square$

Ahora vamos a definir el haz tangente, que en particular es un haz vectorial sobre M .

Definición 1.2.11. *Para cualquier n -variedad suave M se define el haz tangente de M , denotado por TM , como el conjunto determinado por la unión disjunta de los espacios tangentes en todos los puntos de M :*

$$TM = \bigsqcup_{p \in M} T_p M.$$

Vamos a darle una topología al haz tangente. Para ello, vamos a construir una base para dicha topología. Recordemos la definición de una base de una topología.

Definición 1.2.12. *Si X es un conjunto, una base para la topología de X es una colección $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X tal que:*

1. *Para cada $x \in X$, existe al menos un elemento en la base $B \in \mathcal{B}$, que contiene a x .*

2. Si x pertenece a la intersección de dos elementos de la base $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, entonces existe un elemento en la base $B_3 \in \mathcal{B}$ que contiene a x tal que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Sea (U, ϕ) una carta alrededor de $p \in M$ y $\phi = (x_1, \dots, x_n)$, entonces

$$TU = \bigsqcup_{p \in U} T_p U = \bigsqcup_{p \in U} T_p M,$$

ya que por la Proposición 1.2.10 para $p \in U$,

$$T_p U = T_p M.$$

Una base para $T_p M$ es el conjunto de vectores $\{\partial/\partial x_1|_p, \dots, \partial/\partial x_n|_p\}$, así un punto $v \in T_p M$ se puede ver como la combinación lineal

$$v = \sum_i^n c_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p,$$

donde $c_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ es una función en U que depende de ϕ . Ahora consideremos la función

$$\Phi : TU \rightarrow \phi(U) \times \mathbb{R}^n$$

dada por

$$v \mapsto (x_1(p), \dots, x_n(p), c_1(p), \dots, c_n(p)). \quad (1.4)$$

Notemos que Φ tiene inversa y podemos darla explícitamente como

$$(\phi(p), a_1, \dots, a_n) \mapsto \sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p,$$

por lo tanto Φ es biyectivo.

Vamos a transferir la topología de $\phi(U) \times \mathbb{R}^n$ a TU de la siguiente manera: un conjunto A en TU es abierto si y solo si $\Phi(A)$ es abierto en $\phi(U) \times \mathbb{R}^n$ con la topología de subespacio que hereda de la topología estándar de $\mathbb{R}^{2n}$. Notemos que con esta definición tenemos que Φ es un homeomorfismo. De lo anterior tenemos que si $V \subset U$, la topología relativa de TV como subconjunto de TU es la misma que la topología inducida por la biyección $\Phi : TV \rightarrow \phi(V) \times \mathbb{R}^n$.

Sea $\mathcal{B}$ la colección de todos los subconjuntos abiertos de TU_α con U_α recorriendo todos los conjuntos abiertos coordinados en M , es decir:

$$\mathcal{B} = \bigcup_{\alpha} \{A : A \text{ abierto en } TU_\alpha, U_\alpha \text{ abierto coordinado en } M\}.$$

Ahora vamos a mostrar que esto es una base para una topología en TM . Para ello vamos a ver que satisface las condiciones de la Definición 1.2.12. Si $\mathcal{B}$ satisface estas dos condiciones, entonces podemos definir la topología $\mathcal{T}$ generada por $\mathcal{B}$. En nuestros términos lo que debemos probar es que se cumplen los dos incisos de la siguiente proposición:

Proposición 1.2.13. 1. Para cualquier variedad M , el conjunto TM es la unión de todos los elementos de $\mathcal{B}$.

2. Sean U, V conjuntos coordinados en una variedad M . Si A es un abierto en TU y B es un abierto en TV , entonces $A \cap B$ es abierto en $T(U \cap V)$.

Demostración:

Primero demostraremos el inciso 1. Sea $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ el atlas maximal de M . Entonces

$$TM = \bigcup_{\alpha} TU_{\alpha} \subset \bigcup_{A \in \mathcal{B}} A \subset TM.$$

Ahora tratamos el inciso 2. Ya que $T(U \cap V) \subset TU$, por la definición de topología relativa, $A \cap T(U \cap V)$ es abierto en $T(U \cap V)$. Análogamente $B \cap T(U \cap V)$ es abierto en $T(U \cap V)$. Pero

$$A \cap B \subset TU \cap TV = T(U \cap V),$$

de ahí

$$\begin{aligned} A \cap B &= A \cap B \cap T(U \cap V) \\ &= (A \cap T(U \cap V)) \cap (B \cap T(U \cap V)), \end{aligned}$$

es abierto en $T(U \cap V)$. □

Ya que $\mathcal{B}$ satisface las condiciones 1 y 2 de la proposición anterior, la colección $\mathcal{B}$ es una base. Vamos a darle al haz tangente TM la topología generada por la base $\mathcal{B}$. Veamos que si M es suave, entonces TM es suave:

Proposición 1.2.14. Si $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ es un atlas suave para M , entonces $\{(TU_\alpha, \Phi_\alpha)\}$ es un atlas suave para TM , donde Φ_α es el mapeo en TU_α definido como en (1.4).

Demostración:

Es claro que $TM = \bigcup_{\alpha} TU_{\alpha}$ y que Φ_α es un homeomorfismo por lo que solo faltaría probar que las cartas son compatibles. Sean $(TU_\alpha, \Phi_\alpha), (TU_\beta, \Phi_\beta)$ dos cartas de TM y consideremos el mapeo de transición $\Phi_{\alpha\beta} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n$

$$\begin{array}{ccc} & TU_\alpha \cap TU_\beta & \\ \swarrow \Phi_\alpha & & \searrow \Phi_\beta \\ \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\Phi_{\alpha\beta} = \Phi_\beta \circ \Phi_\alpha^{-1}} & \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n \end{array}$$

dado por

$$(\phi_\alpha(p), a_1, \dots, a_n) \mapsto ((\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1})(\phi_\alpha(p)), b_1, \dots, b_n), \quad (1.5)$$

donde a_i y b_i están definidos como los números reales que satisfacen que sobre las cartas $(U_\alpha, \phi_\alpha) = (U_\alpha, x_1, \dots, x_n), (U_\beta, \phi_\beta) = (U_\beta, y_1, \dots, y_n)$ de M , un elemento en $T_p M$ se vea localmente para todo $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ como

$$\sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p = \sum_j b_j \frac{\partial}{\partial y_j} \Big|_p. \quad (1.6)$$

Usando (1.6) y la definición de derivada parcial tenemos

$$\begin{aligned}
b_k &= \left(\sum_j b_j \frac{\partial}{\partial y_j} \Big|_p \right) (y_k) \\
&= \left(\sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \right) (y_k) \\
&= \sum_i a_i \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \Big|_p \\
&= \sum_i a_i \frac{\partial (y_k \circ \phi_\alpha^{-1})}{\partial r_i} \Big|_{\phi_\alpha(p)} \\
&= \sum_i a_i \frac{\partial (r_k \circ \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1})}{\partial r_i} \Big|_{\phi_\alpha(p)} \\
&= \sum_i a_i \frac{\partial (\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1})_k}{\partial r_i} \Big|_{\phi_\alpha(p)}.
\end{aligned}$$

Así el mapeo (1.5) se puede ver como

$$(\phi_\alpha(p), a_1, \dots, a_n) \mapsto \left((\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1})(\phi_\alpha(p)), \sum_i a_i \frac{\partial (\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1})_1}{\partial r_i} \Big|_{\phi_\alpha(p)}, \dots, \sum_i a_i \frac{\partial (\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1})_n}{\partial r_i} \Big|_{\phi_\alpha(p)} \right)$$

que es suave entrada a entrada ya que por hipótesis $(\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1})$ es suave (pues es la función de transición en el atlas de M) y las derivadas parciales son suaves. Por lo tanto $\Phi_\beta \circ \Phi_\alpha^{-1}$ es suave y $\{(TU_\alpha, \Phi_\alpha)\}$ es un atlas suave para TM . $\square$

Definición 1.2.15. Sea M una variedad suave. Un haz vectorial real suave de rango k sobre M es una variedad suave E junto con un mapeo sobreyectivo $\pi : E \rightarrow M$ que satisface:

1. Para cada $p \in M$, el conjunto $E_p = \pi^{-1}(p) \subset E$ (llamado la fibra de E sobre p) es dotado de una estructura de espacio vectorial.
2. Para cada $p \in M$ existe una vecindad U de p en M y un difeomorfismo $\Phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc}
\pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\Phi} & U \times \mathbb{R}^k \\
& \searrow \pi & \downarrow \pi_1 \\
& & U
\end{array}$$

donde π_1 es la proyección sobre U .

3. Para cada $p \in U$

$$\Phi_p := \Phi|_{E_p} : E_p \rightarrow \{p\} \times \mathbb{R}^n,$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales. A dichos isomorfismos se les llama *trivializaciones locales*.

El haz tangente de una n -variedad suave es un haz vectorial suave de rango n , donde $E = TM$, $E_p = T_p M$ es un espacio vectorial y $\pi : TM \rightarrow M$ esta definido como $\pi(p, X) = p$. En efecto, las trivializaciones locales son los mapeos Φ definidos antes.

Definición 1.2.16. Una sección suave de un haz vectorial $\pi : E \rightarrow M$ es un mapeo suave $s : M \rightarrow E$ tal que $\pi \circ s = \text{Id}_M$.

De ahora en adelante, cuando se mencione una sección nos estaremos refiriendo a una sección suave a menos que se indique lo contrario.

Veamos una forma de poder calcular las bases del haz tangente.

Proposición 1.2.17. Supongamos que $(U, \phi) = (U, x_1, \dots, x_n)$ es una carta alrededor de $p \in M$. Entonces:

$$\left. \frac{\partial x_i}{\partial x_j} \right|_p = \delta_j^i.$$

Demostración:

Sea $p \in U$. Notemos que $x_i = r_i \circ \phi : U \rightarrow \mathbb{R}$, donde $r_1, \dots, r_n$ son las coordenadas usuales en $\mathbb{R}^n$. Entonces

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial x_i}{\partial x_j} \right|_p &= \left. \frac{\partial (x_i \circ \phi^{-1})}{\partial r_j} \right|_{(\phi(p))} \\ &= \left. \frac{\partial (r_i \circ \phi \circ \phi^{-1})}{\partial r_j} \right|_{\phi(p)} \\ &= \left. \frac{\partial r_i}{\partial r_j} \right|_{\phi(p)} = \delta_j^i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ 1 & \text{si } i = j. \end{cases} \quad \square \end{aligned}$$

Sea $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y consideremos la diferencial $(dF)_p : T_p \mathbb{R}^n \rightarrow T_{F(p)} \mathbb{R}^m$ para cierto $p \in \mathbb{R}^n$. Sean $x_1, \dots, x_n$ coordenadas en $\mathbb{R}^n$ y $y_1, \dots, y_m$ coordenadas en $\mathbb{R}^m$, entonces

$$(dF)_p \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p = \sum_s a_j^s \left. \frac{\partial}{\partial y_s} \right|_{F(p)}, \quad a_j^s \in \mathbb{R}.$$

Notemos que usando la Proposición 1.2.17:

$$\sum_s a_j^s \left. \frac{\partial}{\partial y^s} \right|_{F(p)} y^i = \sum_s a_j^s \delta_s^i = a_j^i. \quad (1.7)$$

Por lo tanto tenemos una manera de calcular el i -ésimo coeficiente de la combinación lineal de $(dF)_p \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p \in T_{F(p)} \mathbb{R}^m$ con la base $\left. \frac{\partial}{\partial y_1} \right|_{F(p)}, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial y_m} \right|_{F(p)}$, lo que es muy útil para calcular las bases explícitas del espacio tangente.

1.3. k -Formas Suaves

1.3.1. Álgebra Exterior sobre Espacios Vectoriales

Antes de continuar, vamos a presentar algunos conceptos y resultados del álgebra exterior de espacios vectoriales que nos serán útiles mas adelante para definir las k -formas. Empecemos definiendo que k -tensores en un espacio vectorial V .

Definición 1.3.1. *Un k -tensor en un espacio vectorial V es una función real-valuada T en el producto cartesiano $V^k = \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k \text{ veces}}$, que es multilineal, esto es:*

$$T(v_1, \dots, v_j + av'_j, \dots, v_k) = T(v_1, \dots, v_j, \dots, v_k) + aT(v_1, \dots, v'_j, \dots, v_k)$$

para toda $1 \leq j \leq k$.

Un tensor T es alternante si

$$T(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}) = \text{sgn}(\pi) T(v_1, \dots, v_k) \quad \forall \pi \in S_k,$$

donde S_k es el grupo simétrico de k elementos. Denotemos $T^\pi(v_1, \dots, v_k) = T(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)})$. Existe una forma canónica de “convertir” cualquier k -tensor T a uno alternante que denotaremos como $\text{Alt}(T)$ de la siguiente manera:

$$\text{Alt}(T) = \frac{1}{k!} \sum_{\pi \in S_k} \text{sgn}(\pi) T^\pi.$$

Si T es un k -tensor y S un l -tensor, definamos su producto tensorial como

$$(T \otimes S)(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+l}) = T(v_1, \dots, v_k) S(v_{k+1}, \dots, v_{k+l}).$$

A continuación presentaremos un lema con dos enunciados que nos permitirán demostrar en la Subsección 1.4.1 que el espacio de k -formas junto con una operación que definiremos más adelante (el producto cuña) es un álgebra graduada conmutativa. En particular el inciso que nos servirá es el 2, sin embargo para probar dicho inciso debemos probar el inciso 1 primero.

Lema 1.3.2. 1. Sean R, T un k -tensor y un l -tensor respectivamente y $\text{Alt}(R) = 0$, entonces

$$\text{Alt}(R \otimes T) = \text{Alt}(T \otimes R) = 0.$$

2. Si ω, η, θ son un k -tensor, un l -tensor y un q -tensor respectivamente, todos alternantes, entonces

$$\text{Alt}(\text{Alt}(\omega \otimes \eta) \otimes \theta) = \text{Alt}(\omega \otimes \eta \otimes \theta) = \text{Alt}(\omega \otimes \text{Alt}(\eta \otimes \theta)).$$

1. Se tiene, por definición, que

$$\begin{aligned} & (k+l)! \text{Alt} (R \otimes T) (v_1, \dots, v_{k+l}) \\ &= \sum_{\pi \in S_{k+l}} \text{sgn} (\pi) R (v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}) T (v_{\pi(k+1)}, \dots, v_{\pi(k+l)}). \end{aligned}$$

Si $G \subset S_{k+l}$ consiste en todas las permutaciones que dejan fijo $k+1, \dots, k+l$, entonces

$$\begin{aligned} & \sum_{\pi \in G} \text{sgn} (\pi) R (v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}) T (v_{\pi(k+1)}, \dots, v_{\pi(k+l)}) \\ &= \left(\sum_{\pi' \in S_k} \text{sgn} (\pi') R (v_{\pi'(1)}, \dots, v_{\pi'(k)}) \right) T (v_{k+1}, \dots, v_{k+l}) = 0, \end{aligned}$$

ya que por hipótesis $\text{Alt} (R) = 0$.

Supongamos que $\pi_0 \notin G$. Sea $G \cdot \pi_0 = \{\pi \cdot \pi_0 : \pi \in G\}$ y sea $v_{\pi_0(1)}, \dots, v_{\pi_0(k+l)} = w_1, \dots, w_{k+l}$. Entonces

$$\begin{aligned} & \sum_{\pi \in G \cdot \pi_0} \text{sgn} (\pi) R (v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}) T (v_{\pi(k+1)}, \dots, v_{\pi(k+l)}) \\ &= \left(\text{sgn} (\pi_0) \sum_{\pi' \in G} \text{sgn} (\pi') R (w_{\pi'(1)}, \dots, w_{\pi'(k)}) \right) T (w_{k+1}, \dots, w_{k+l}) = 0. \end{aligned}$$

Notemos que $G \cap G \cdot \pi_0 = \emptyset$, ya que son dos conjuntos de clases laterales diferentes. Podemos continuar de esta manera, separando S_{k+l} en subconjuntos disjuntos donde la suma es 0 por lo tanto la suma en S_{k+l} debe ser 0. De manera análoga se prueba que $\text{Alt} (T \otimes R) = 0$.

2. Tenemos que

$$\begin{aligned} \text{Alt} (\text{Alt} (\tau \otimes \omega) - \tau \otimes \omega) &= \text{Alt} (\tau \otimes \omega) - \text{Alt} (\tau \otimes \omega) \\ &= 0, \end{aligned}$$

entonces por el inciso anterior

$$\begin{aligned} 0 &= \text{Alt} (\omega \otimes (\text{Alt} (\tau \otimes \theta) - \tau \otimes \theta)) \\ &= \text{Alt} (\omega \otimes \text{Alt} (\tau \otimes \theta)) - \text{Alt} (\omega \otimes \tau \otimes \theta) \end{aligned}$$

y

$$\text{Alt} (\omega \otimes \text{Alt} (\tau \otimes \theta)) = \text{Alt} (\omega \otimes \tau \otimes \theta).$$

La igualdad $\text{Alt} (\text{Alt} (\omega \otimes \eta) \otimes \theta) = \text{Alt} (\omega \otimes \eta \otimes \theta)$ se prueba de manera análoga. $\square$

Vamos a definir el producto cuña como la forma alternante del producto tensorial, salvo un escalar. Si T es un k -tensor y S es un l -tensor, definimos

$$T \wedge S = \frac{(k+l)!}{k!l!} \text{Alt}(T \otimes S). \quad (1.8)$$

Si T y S son k -tensores alternantes la suma $(T + S)(v_1, \dots, v_k) = T(v_1, \dots, v_k) + S(v_1, \dots, v_k)$ y la multiplicación por un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda S)(v_1, \dots, v_k) = \lambda S(v_1, \dots, v_k)$ son k -tensores alternantes y forman un espacio vectorial denotado como $\Lambda^k(V)$, usualmente llamado la k -ésima potencia exterior de V . Además un teorema de álgebra lineal nos dice cómo son las bases de $\Lambda^k(V)$. Recordemos el siguiente resultado clásico sobre bases de las potencias exteriores.

Teorema 1.3.3. *Sea $\{\phi_1, \dots, \phi_k\}$ una base para el espacio vectorial real V , entonces el conjunto*

$$\{\phi_I = \phi_{i_1} \wedge \dots \wedge \phi_{i_l} : 1 \leq i_1 < \dots < i_l \leq k\}$$

es una base para $\Lambda^k(V)$.

Véase [Gre78, §5.6] para una demostración de este teorema. Como consecuencia inmediata del teorema anterior se obtiene:

Corolario 1.3.4. *Si $\dim V = l$, entonces $\dim(\Lambda^k(V)) = \binom{k}{l} = \frac{k!}{l!(k-l)!}$.*

1.3.2. k -Formas Suaves

El concepto de k -forma suave será fundamental en este trabajo, pues funciona como una generalización de funciones real-valuadas (0-formas), nos permitirán hablar de integración sobre variedades en la Subsección 1.5.2, proporcionan un “lenguaje” ideal para formular una generalización de los teoremas clásicos de cálculo vectorial con el Teorema de Stokes que veremos en la Subsección 1.5.4 y en el Capítulo 2 nos permitirán construir el k -ésimo grupo de cohomología de una variedad.

Definición 1.3.5. *Sea M una variedad suave y p un punto en M . El espacio cotangente de M en p , denotado por T_p^*M , se define como el espacio dual del espacio tangente T_pM :*

$$T_p^*M = (T_pM)^* = \text{Hom}(T_pM, \mathbb{R}).$$

Sea $(U, \phi) = (U, x_1, \dots, x_n)$ una carta alrededor del punto $p \in M$, entonces para cada x_i ,

$$(dx_i)_p : T_pM \rightarrow \mathbb{R},$$

$$X \mapsto X(x_i),$$

es lineal y $(dx_i)_p \in T_p^*M$. Como vamos a ver en la siguiente proposición, estas forman una base para el espacio cotangente en p . A los elementos del espacio cotangente se les llama *covectores*.

Proposición 1.3.6. *Para cada punto $p \in M$ el conjunto de covectores $\{(dx_1)_p, \dots, (dx_n)_p\}$ forman una base para el espacio cotangente T_p^*M dual a la base $\{\partial/\partial x_1|_p, \dots, \partial/\partial x_n|_p\}$ para el espacio tangente T_pM .*

Por definición:

$$(dx_i)_p \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p = \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p x_i = \delta_j^i. \quad \square$$

Al igual que al haz tangente, al espacio

$$T^*M = \bigsqcup_{p \in M} T_p^*M,$$

llamado haz cotangente, se le puede dar una topología. Sea $(U, \phi) = (U, x_1, \dots, x_n)$ una carta alrededor de $p \in M$. Entonces un elemento $v \in T_p^*M$ se puede ver como la combinación lineal

$$v = \sum_i^n c_i(p) (dx_i)_p,$$

donde $c_i : U \rightarrow T^*U$. Ahora, consideremos la función

$$\Phi : T^*U \rightarrow \phi(U) \times \mathbb{R}^n$$

dada por

$$v \mapsto (x_1(p), \dots, x_n(p), c_1, \dots, c_n).$$

Φ tiene inversa y la podemos dar explícitamente

$$(x_1(p), \dots, x_n(p), c_1, \dots, c_n) \mapsto \sum_i^n c_i (dx_i)_p,$$

por lo tanto es biyectiva. Declarando que un subconjunto A de T^*U es abierto si y solo si $\Phi(A)$ es abierto en $\phi(U) \times \mathbb{R}^n$, de manera análoga a TM . El espacio T^*M obtiene una topología inducida por esta identificación, que a su vez induce un atlas suave.

Definición 1.3.7. Sea M una variedad de dimensión n . Definimos:

$$\Lambda^k(T^*M) := \bigcup_{p \in M} \Lambda^k(T_p^*M),$$

donde $\Lambda^k(T_p^*M)$ es el espacio de k -tensores alternantes sobre T_p^*M .

Vamos a darle una estructura de variedad suave a $\Lambda^k(T^*M)$, de manera análoga a los casos anteriores. Por el Teorema 1.3.3 una base para $\Lambda^k(T_p^*U)$, donde $(U, x_1, \dots, x_n)$ es una carta alrededor de $p \in M$, es el conjunto

$$\left\{ (dx_I)_p = (dx_{i_1})_p \wedge \dots \wedge (dx_{i_k})_p : 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n \right\}.$$

Por lo tanto si $v \in \Lambda^k(T^*U)$, se puede ver como una combinación lineal

$$v = \sum_I c_I(p) (dx_I)_p,$$

y definimos

$$\Phi : \Lambda^k(T^*U) \rightarrow \phi(U) \times \mathbb{R}^{\binom{k}{n}}$$

dada por

$$v \mapsto (\phi(p), c_I(p)), \quad (1.9)$$

que es una biyección, ya que su inversa es la siguiente

$$(\phi(p), a_I) \mapsto \sum a_I(dx_I)_p.$$

De manera análoga a los casos anteriores, para darle una topología a $\Lambda^k(T^*M)$, usamos Φ para definir los abiertos y el atlas suave. También, $\Lambda^k(T^*M) \rightarrow M$ es un haz vectorial sobre M con trivializaciones dadas por $\{\Phi\}$ definidas en (1.9).

Definición 1.3.8. Una k -forma suave de M es una sección del haz k -potencia exterior

$$\Lambda^k(T^*M) \rightarrow M.$$

Sean ω, ν k -formas y $\lambda \in \mathbb{R}$. La suma de k -formas está definida como

$$(\omega + \nu)(v_1, \dots, v_k) = \omega(v_1, v_2, \dots, v_k) + \nu(v_1, v_2, \dots, v_k)$$

y la multiplicación por escalar

$$(\lambda\omega)(v_1, v_2, \dots, v_k) = \lambda\omega(v_1, v_2, \dots, v_k).$$

Con estas operaciones el conjunto de k -formas es un $\mathbb{R}$ -espacio vectorial y lo denotaremos por $\Omega^k(M)$.

En particular, una 0-forma es una sección de $\Lambda^0(T^*M) = M \times \mathbb{R}$. Por lo tanto las 0-formas son secciones $M \rightarrow M \times \mathbb{R}$ de la proyección $M \times \mathbb{R} \rightarrow M$, que son equivalentes a funciones suaves. Además vale la pena considerar las 1-formas, que por la definición que dimos, son secciones de $\Lambda^1(T^*M) = T^*M$. Sea f es una función real-valuada suave en una variedad M . Para cada $p \in M$, su diferencial $(df)_p$ es un funcional lineal sobre T_pM , es decir, $(df)_p \in T_p^*M$. En consecuencia, la asignación

$$p \mapsto (df)_p$$

define una sección del haz cotangente T^*M . Más adelante probaremos que es una 1-forma probando que es suave. Así tenemos que si (U, ϕ) es una carta, entonces las diferenciales $(dx_1), \dots, (dx_n)$ son secciones locales.

Proposición 1.3.9. Si $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ es un mapeo suave en una variedad M , entonces la diferencial en un punto $(df)_p$ es una 1-forma en M .

Demostración:

Sea $(U, \phi) = (U, x_1, \dots, x_n)$ una carta alrededor de p . Por la Proposición 1.3.6, si restringimos $(df)_p$ a U , tenemos que localmente es

$$(df)_p = \sum a_i(dx_i)_p.$$

Notemos que si evaluamos ambos lados en $\frac{\partial}{\partial x_j}\big|_p$ entonces

$$\begin{aligned} (df)_p \frac{\partial}{\partial x_j}\bigg|_p &= \sum_i a_i (dx_i)_p \frac{\partial}{\partial x_j}\bigg|_p \\ \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_j}\bigg|_p &= \sum_i a_i \delta_j^i = a_j. \end{aligned}$$

Por lo que podemos dar una expresión local para $(df)_p$ como

$$(df)_p = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}\bigg|_p (dx_i)_p.$$

Como esto sucede para cualquier carta se sigue que $(df)_p$ es suave porque los coeficientes $\frac{\partial f}{\partial x_i}\big|_p$ son todos suaves. $\square$

Corolario 1.3.10. *Las diferenciales $(dx)_p$ de las coordenadas de una carta $(U, x_1, \dots, x_n)$ alrededor de $p \in M$ son 1-formas suaves en M .*

Demostración:

Aplicamos la proposición anterior, pues $x_i : M \rightarrow \mathbb{R}$ es un mapeo suave. $\square$

1.4. El Álgebra de k -Formas

1.4.1. Producto Cuña

Tal como mencionamos anteriormente, el producto cuña que definimos dota al espacio de formas suaves de una estructura de álgebra, la cual será relevante en los siguientes capítulos. Definamos primero a qué llamaremos álgebra.

Definición 1.4.1. *Un álgebra A sobre un campo $\mathbb{F}$ es un $\mathbb{F}$ -espacio vectorial V con una operación bilineal*

$$\cdot : V \times V \rightarrow V,$$

tal que se cumplen las siguientes condiciones

1. $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.$
2. $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$
3. $(ax) \cdot y = a(x \cdot y) = x \cdot (ay).$

para cualesquiera $a \in \mathbb{F}, x, y, z \in V$.

En este trabajo vamos a considerar álgebras asociativas y con unidad, es decir

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z \quad \forall x, y, z \in A,$$

y existe $1 \in A$ tal que

$$1 \cdot x = x \cdot 1 = x \quad \forall x \in A.$$

Definición 1.4.2. *Un álgebra graduada sobre un campo $\mathbb{F}$ es un álgebra A sobre $\mathbb{F}$ tal que, como $\mathbb{F}$ -espacio vectorial, admite una descomposición en suma directa*

$$A = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n,$$

donde A_n es un subespacio vectorial de A , y cuya multiplicación respeta la graduación, es decir:

$$A_k A_l \subset A_{k+l} \quad \text{para cualesquiera } k, l \geq 0,$$

donde

$$A_k A_l = \{xy : x \in A_k, y \in A_l\}.$$

Los elementos de A_n se denominan elementos homogéneos de grado n . Si $x \in A_n$ es un elemento homogéneo, definimos su grado como $\deg(x) := n$. Una álgebra graduada A es conmutativa (en el sentido graduado) si para cualesquiera elementos homogéneos $x, y \in A$ se cumple

$$xy = (-1)^{\deg(x)\deg(y)} yx.$$

A continuación vamos a ver que las k -formas suaves junto con la operación que definimos en (1.8) y que llamamos producto cuña, admiten una estructura de $\mathbb{R}$ -álgebra conmutativa graduada.

Teorema 1.4.3. *Sea M una variedad de dimensión n , entonces el producto cuña hace a*

$$\Omega^*(M) = \bigoplus_{k=0}^n \Omega^k(M),$$

un $\mathbb{R}$ -álgebra conmutativa graduada.

Demostración:

1. Veamos primero que tiene unidad.

Sean $\omega \in \Omega^*(M)$ y $f = \text{cte}_1 \in \Omega^0(M)$, entonces $f\omega = \omega f = \omega$.

2. Veamos que es bilineal.

Sean $\omega, \theta \in \Omega^k(M)$ y $\tau \in \Omega^l(M)$, que localmente se ven como:

$$\omega = \sum_I a_I dx_I, \quad \theta = \sum_I b_I dx_I, \quad \tau = \sum_J c_J dy_J.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
(\omega + \theta) \wedge \tau &= \sum_I (a_I + b_I) dx_I \wedge \tau \\
&= \sum_I (a_I + b_I) (dx_I \wedge \tau) \\
&= \left(\sum_I a_I dx_I \wedge \tau \right) + \left(\sum_I b_I dx_I \wedge \tau \right) \\
&= \omega \wedge \tau + \theta \wedge \tau.
\end{aligned}$$

Análogamente se muestra que si $\omega \in \Omega^k(M)$ y $\theta, \tau \in \Omega^l(M)$, entonces

$$\omega \wedge (\theta + \tau) = \omega \wedge \theta + \omega \wedge \tau.$$

Por último supongamos que localmente $\omega = \sum_I a_I dx_I \in \Omega^k(M)$, $\theta \in \Omega^l(M)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned}
(\lambda\omega) \wedge \theta &= \left(\lambda \sum_I a_I dx_I \right) \wedge \theta \\
&= \lambda \left(\sum_I a_I dx_I \wedge \theta \right) \\
&= \lambda (\omega \wedge \theta).
\end{aligned}$$

Y análogamente

$$\omega \wedge (\lambda\theta) = \lambda (\omega \wedge \theta).$$

3. Veamos que es asociativa. Sean ω, τ, θ una k -forma, l -forma y q -forma respectivamente,

$$\begin{aligned}
(\omega \wedge \tau) \wedge \theta &= \frac{(k+l+q)!}{(k+l)!q!} \text{Alt}((\omega \wedge \tau) \otimes \theta) \\
&= \frac{(k+l+q)!}{(k+l)!q!} \text{Alt} \left(\frac{(k+l)!}{k!l!} \text{Alt}(\omega \otimes \tau) \otimes \theta \right) \\
&= \frac{(k+l+q)!}{(k+l)!q!} \frac{(k+l)!}{k!l!} \text{Alt}((\omega \otimes \tau) \otimes \theta) \\
&= \frac{(k+l+q)!}{k!l!q!} \text{Alt}(\omega \otimes \tau \otimes \theta),
\end{aligned}$$

la última igualdad se cumple por inciso 2 del Lema 1.3.2. De manera análoga se prueba que

$$\omega \wedge (\tau \wedge \theta) = \frac{(k+l+m)!}{k!l!q!} \text{Alt}(\omega \otimes \tau \otimes \theta),$$

probando la asociatividad del producto cuña.

4. Veamos que es conmutativa. Si ω tiene grado k y τ tiene grado l , entonces $\omega \wedge \tau$ tiene grado $k + l$ y veremos que

$$\omega \wedge \tau = (-1)^{kl} \tau \wedge \omega.$$

Supongamos que dx_I y dy_J tienen longitud k' y l' respectivamente, entonces

$$\begin{aligned} (dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{k'}}) \wedge (dy_{j_1} \wedge \cdots \wedge dy_{j_{l'}}) &= (-1)^{k'} dy_{j_1} \wedge (dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{k'}}) \\ &\quad \wedge (dy_{j_2} \wedge \cdots \wedge dy_{j_{l'}}) \\ &= (-1)^{2k'} dy_{j_1} \wedge dy_{j_2} \wedge (dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{k'}}) \\ &\quad \wedge (dy_{j_3} \wedge \cdots \wedge dy_{j_{l'}}) \\ &= (-1)^{k'l'} (dy_{j_1} \wedge \cdots \wedge dy_{j_{l'}}) \wedge (dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{k'}}) \\ &= (-1)^{k'l'} dy_J \wedge dx_I. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Así, sea $\omega = \sum_I a_I dx_I \in \Omega^k(M)$ y $\tau = \sum_J b_J dy_J \in \Omega^l(M)$, entonces

$$\omega \wedge \tau = \left(\sum_I a_I dx_I \right) \wedge \left(\sum_J b_J dy_J \right),$$

y por (1.10)

$$\begin{aligned} \omega \wedge \tau &= (-1)^{kl} \left(\sum_J b_J dy_J \right) \wedge \left(\sum_I a_I dx_I \right) \\ &= (-1)^{kl} \tau \wedge \omega. \end{aligned} \quad \square$$

1.4.2. Pullback

Una construcción importante será la del pullback de un mapeo entre variedades, pues más adelante demostraremos que es un mapeo entre $\mathbb{R}$ -álgebras conmutativas graduadas. Pero primero vamos a verlo con el enfoque de álgebra exterior.

Un mapeo lineal $L : V \rightarrow W$ induce un mapeo pullback $L^* : \Lambda^k(W) \rightarrow \Lambda^k(V)$ definido como:

$$(L^*T)(v_1, \dots, v_k) = T(Lv_1, \dots, Lv_k),$$

para $T \in \Lambda^k(W)$. Vamos a ver algunas de sus propiedades en los siguientes lemas:

Lema 1.4.4. *L^* es un mapeo lineal.*

Demostración:

Bastará con hacer un par de cuentas:

$$\begin{aligned}
L^*(T_1 + T_2)(v_1, \dots, v_k) &= (T_1 + T_2)(Lv_1, \dots, Lv_k) \\
&= T_1(Lv_1, \dots, Lv_k) + T_2(Lv_1, \dots, Lv_k) \\
&= L^*T_1(v_1, \dots, v_k) + L^*T_2(v_1, \dots, v_k) \\
&= (L^*T_1 + L^*T_2)(v_1, \dots, v_k),
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
L^*(\lambda T)(v_1, \dots, v_k) &= (\lambda T)(Lv_1, \dots, Lv_k) \\
&= \lambda(T(Lv_1, \dots, Lv_k)) \\
&= \lambda(L^*T)(v_1, \dots, v_k).
\end{aligned}$$

□

Lema 1.4.5. Sea $L : V \rightarrow W$ un mapeo lineal. Entonces, para cualesquiera $T, S \in \Lambda^k(W)$,

$$L^*(T \wedge S) = L^*T \wedge L^*S.$$

Es decir, el pullback se distribuye con el producto cuña.

Demostración:

Sea T un k -tensor y S un l -tensor. La igualdad se probará mediante un cálculo directo:

$$\begin{aligned}
L^*(T \wedge S)(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+l}) &= (T \wedge S)(Lv_1, \dots, Lv_k, Lv_{k+1}, \dots, Lv_{k+l}) \\
&= T(Lv_1, \dots, Lv_k) \wedge S(Lv_{k+1}, \dots, Lv_{k+l}) \\
&= (L^*T)(v_1, \dots, v_k) \wedge (L^*S)(v_{k+1}, \dots, v_{k+l}) \\
&= (L^*T) \wedge (L^*S)(v_1, \dots, v_{k+l}).
\end{aligned}$$

□

Lema 1.4.6. Si $A : V \rightarrow W$ y $B : W \rightarrow U$ se obtiene la composición

$$\begin{array}{ccc}
V & \xrightarrow{B \circ A} & U \\
A \downarrow & \nearrow B & \\
W & &
\end{array}$$

y

$$(B \circ A)^* T = (A^* \circ B^*) T$$

para todo tensor $T \in \Lambda^k(U)$.

Sea $T \in \Lambda^k(U)$,

$$\begin{aligned} (B \circ A)^* T(v_1, \dots, v_k) &= T(B(A(v_1)), \dots, B(A(v_k))) \\ &= (B^* T)(A(v_1), \dots, A(v_k)) \\ &= A^*(B^* T)(v_1, \dots, v_k) \\ &= (A^* \circ B^*) T(v_1, \dots, v_k). \end{aligned}$$

□

Ahora vamos a definir el mapeo pullback para un mapeo suave entre variedades. Sea $F : M \rightarrow N$ un mapeo suave entre variedades. Para cada punto p en M , la diferencial

$$dF_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$$

es un mapeo lineal entre espacios vectoriales. Siguiendo lo anterior, vamos a definir el pullback F^* como sigue: si ω es una k -forma suave en N , entonces el pullback $F^*\omega$ es la k -forma en M definida puntualmente por

$$(F^*\omega)_p(v_1, \dots, v_k) = \omega_{F(p)}((dF)_p(v_1), \dots, (dF)_p(v_k)). \quad (1.11)$$

F^* es lineal por el Lema 1.4.4. Vamos a resumir las propiedades más importantes de F^* en el siguiente teorema:

Teorema 1.4.7. *Cada mapeo suave $F : M \rightarrow N$ induce un mapeo $F^* : \Omega^*(N) \rightarrow \Omega^*(M)$ de $\mathbb{R}$ -álgebras conmutativas graduadas que cumple las siguientes afirmaciones:*

1. *En 0-formas (funciones), F^* es dado por la composición:*

$$F^*g = g \circ F.$$

2. *$(G \circ F)^* = F^* \circ G^*$ y $(\text{Id}_M)^* = \text{Id}_{\Omega^*(M)}$.*

3. *Conmuta con el producto cuña:*

$$F^*(\omega \wedge \tau) = F^*(\omega) \wedge F^*(\tau).$$

4. *Conmuta con la derivada de funciones:*

$$F^*(dg) = dF^*(g).$$

1. Sea g una función suave, por la definición del pullback (1.11) tenemos que para cada $p \in M$

$$(F^*g)_p = g_{F(p)} = (g \circ F)(p).$$

2. $(G \circ F)^* = F^* \circ G^*$ se sigue inmediatamente del Lema 1.4.6. Para $(\text{Id}_M)^*$, sea una k -forma suave $\omega \in \Omega^k(M)$. Usemos la definición

$$\begin{aligned} ((\text{Id}_M)^* \omega)_p(v_1, \dots, v_k) &= \omega_{\text{Id}_M(p)}((d \text{Id}_M)_p v_1, \dots, (d \text{Id}_M)_p v_k) \\ &= \omega_p(v_1, \dots, v_k). \end{aligned}$$

Por lo tanto $(\text{Id}_M)^* = \text{Id}_{\Omega^k(M)}$.

3. Se sigue del Lema 1.4.5.
4. Hay que demostrar que para cada $p \in M$ y cualquier vector tangente $X \in T_p M$, entonces

$$(F^* dg)_p(X) = (dF^* g)_p(X).$$

Procederemos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} (F^* dg)_p(X) &= (dg)_{F(p)}((dF)_p(X)) \\ &= d(g \circ F)_p(X) \\ &= X(g \circ F) \\ &= X(F^* g) \\ &= (dF^* g)_p(X). \end{aligned}$$

□

1.5. Integración en Variedades

1.5.1. Integración en $\mathbb{R}^n$

Antes de empezar esta subsección es importante definir otro tipo de variedades suaves, las variedades suaves con frontera.

Variedades Suaves con Frontera

Definición 1.5.1. Definimos el semiespacio $\mathcal{H}^n$ de dimensión n como

$$\mathcal{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\}.$$

Definición 1.5.2. Una n -variedad topológica con frontera es un espacio topológico segundo numerable Hausdorff que localmente es homeomorfo a $\mathcal{H}^n$.

Tal como para variedades vamos a definir las cartas como una tupla (U, ϕ) donde U es un abierto en M y ϕ es un homeomorfismo

$$\phi : U \rightarrow \phi(U) \subset \mathcal{H}^n,$$

tal que $\phi(U)$ es abierto en $\mathcal{H}^n$. De manera análoga, una colección $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ es un atlas si $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$ y decimos que es suave si todas las funciones de transición son suaves.

Definición 1.5.3. Una variedad suave con frontera es una variedad topológica con frontera con un atlas suave.

De ahora en adelante usaremos el término “variedades con frontera” para referirnos a una variedad suave con frontera. Se define la frontera de $\mathcal{H}^n$ por $\partial\mathcal{H}^n = \{x \in \mathcal{H}^n : x_n = 0\}$.

Definición 1.5.4. Sea M una variedad con frontera de dimensión n . Definimos la frontera de M como el conjunto

$$\partial M := \{p \in M : \text{Existe } (U, \phi) \text{ alrededor de } p \text{ tal que } \phi(p) \in \partial\mathcal{H}^n\}.$$

Sea M una variedad con frontera y sea $p \in \partial M$. Si $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ son mapeos suaves real-valuados, donde U y V son dos vecindades de p , de manera análoga al caso de variedades sin frontera, decimos que f y g están en la misma clase de equivalencia si existe una vecindad W de p contenido en $U \cap V$ tal que $f|_W = g|_W$. Un germen de un mapeo suave en p es la clase de equivalencia de dicho mapeo suave. Denotamos por $C_p^\infty(M)$ al conjunto de gérmenes de mapeos suaves en p . El espacio tangente $T_p M$ en p es el espacio vectorial (con las mismas operaciones para el caso de variedad sin frontera) formado por todas las derivaciones en $C_p^\infty(M)$. El espacio cotangente $T_p^* M$ se define como el dual del espacio tangente en p ,

$$T_p^* M = \text{Hom}(T_p M, \mathbb{R}).$$

Las k -formas suaves en M se definen como secciones suaves del haz vectorial $\Lambda^k(T^* M)$.

Orientación

Vamos a definir una orientación en espacios vectoriales. Sean $(u_1, \dots, u_n)$ y $(v_1, \dots, v_n)$ dos bases ordenadas de un espacio vectorial finito V , decimos que son equivalentes, y escribimos $(u_1, \dots, u_n) \sim (v_1, \dots, v_n)$, si

$$(u_1, \dots, u_n) = (v_1, \dots, v_n) A,$$

para una matriz A de tamaño $n \times n$ con determinante positivo. Una orientación de V es una clase de equivalencia de bases ordenadas. Denotamos por $[(u_1, \dots, u_n)]$ a la clase de equivalencia de la base ordenada $(u_1, \dots, u_n)$. Cualquier espacio vectorial de dimensión finita tiene dos orientaciones.

Definición 1.5.5. Una orientación puntual μ en una n -variedad M es una elección para cada $p \in M$ de una orientación μ_p del espacio tangente $T_p M$.

Definición 1.5.6. Un marco para un haz vectorial $\pi : E \rightarrow M$ sobre un conjunto abierto U es una tupla de secciones $(s_1, \dots, s_r)$ de E sobre U tal que cada punto $p \in U$, los elementos $(s_1(p), \dots, s_r(p))$ forma una base ordenada de la fibra $E_p = \pi^{-1}(p)$.

Definición 1.5.7. Un campo vectorial X en una variedad M es un mapeo que asigna un vector tangente $X_p \in T_p M$ a cada punto $p \in M$,

$$X : M \rightarrow TM.$$

En términos del haz tangente, un campo vectorial en M es una sección del haz tangente $\pi : TM \rightarrow M$. Decimos que el campo vectorial es suave si es suave como un mapeo de M a TM . Un marco del haz tangente sobre un abierto $U \subset M$ es una tupla $(X_1, \dots, X_n)$ de campos vectoriales definidos en U tal que, para todo $p \in U$, los vectores $(X_{1,p}, \dots, X_{n,p})$ forman una base de $T_p M$. Decimos que el marco es suave si cada X_i es un campo vectorial suave. A partir de ahora, cuando hablemos de un marco nos referiremos siempre a un marco suave. Sea M una n -variedad y U un subconjunto abierto de M . Definimos una relación de equivalencia de marcos en U de la siguiente manera:

$$(X_1, \dots, X_n) \sim (Y_1, \dots, Y_n) \Leftrightarrow (X_{1,p}, \dots, X_{n,p}) \sim (Y_{1,p}, \dots, Y_{n,p}),$$

para todo $p \in U$. A la clase de equivalencia de $(X_1, \dots, X_n)$ la denotaremos por $[(X_1, \dots, X_n)]$.

Definición 1.5.8. Una orientación puntual μ en una variedad M se dice suave en $p \in M$ si p tiene una vecindad en la cual es representada por un marco suave. Es decir, existen campos vectoriales suaves $Y_1, \dots, Y_n$ en U tal que $\mu_q = [(Y_{1,q}, \dots, Y_{n,q})]$ para todo $q \in U$.

Una orientación μ es suave en M si es suave para cada punto $p \in M$. Una orientación puntual suave en M es llamada una orientación en M . Una variedad M se dice orientable si tiene una orientación.

Ejemplo 1.5.9. Sea $p \in \mathbb{R}^n$ y $(U, x_1, \dots, x_n)$ una carta alrededor de p . Entonces para cada p , la clase de equivalencia $\left[\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)\right]$ es una orientación suave. A esta orientación se le conoce como la orientación estándar de $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.5.10. Un vector tangente $X_p \in T_p M$ apunta hacia adentro si $X_p \notin T_p \partial M$ y existe un número real positivo ϵ y una curva $\gamma : [0, \epsilon) \rightarrow M$ tal que $\gamma(0) = p$, y $\gamma'(0) = X_p$.

Definición 1.5.11. Un vector tangente $X_p \in T_p(M)$ apunta hacia afuera si $-X_p$ apunta hacia dentro.

A continuación, presentaremos un resultado que relaciona la orientación de la frontera de una variedad orientada ∂M con la orientación de M . Véase [Lee13, §15].

Proposición 1.5.12. Sea M una n -variedad suave orientada con frontera, $n \geq 1$. Entonces ∂M es orientable, y todo campo vectorial que apunta hacia afuera sobre ∂M determina la misma orientación en ∂M .

Esta proposición nos dice que si M es una n -variedad con una orientación μ , ∂M es orientable con una orientación μ' definida para cada $p \in \partial M$ por la condición:

$$\mu'_p = [(X_1, \dots, X_{n-1})] \quad \text{tal que} \quad \mu_p = [(X, X_1, \dots, X_{n-1})],$$

donde X es un campo vectorial que apunta hacia afuera.

Determinemos la orientación inducida en $\partial \mathcal{H}^n$ cuando $\mathcal{H}^n$ tiene la orientación estándar heredada de $\mathbb{R}^n$. Podemos identificar $\partial \mathcal{H}^n$ con $\mathbb{R}^{n-1}$ bajo la correspondencia

$$(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1}).$$

Dado que el campo vectorial $-\frac{\partial}{\partial x_n}$ apunta hacia afuera a lo largo de $\mathcal{H}^n$, el sistema de coordenadas estándar para $\mathbb{R}^{n-1}$ tiene la misma orientación para $\partial\mathcal{H}^n$ si y solo si $\left[-\frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}\right]$ es la orientación estándar para $\mathbb{R}^n$. Esta orientación satisface

$$\begin{aligned} \left[-\frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}\right] &= -\left[\frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}\right] \\ &= (-1)^n \left[\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}, \frac{\partial}{\partial x_n}\right]. \end{aligned}$$

Entonces la orientación inducida en $\partial\mathcal{H}^n$ es igual a la orientación estándar en $\mathbb{R}^{n-1}$ cuando n es par, pero es opuesta a la orientación estándar cuando n es impar. Esto nos será de utilidad en la demostración del Teorema de Stokes.

Vimos anteriormente que de una carta $\phi : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n$ podemos obtener una trivialización local de T^*M y por lo tanto también de $\Lambda^k(T^*M)$. Es decir, si $\omega \in \Omega^k(V)$, la podemos escribir en coordenadas locales como

$$\omega(x) = \sum_I a_I(x) dx_I,$$

donde por cada conjunto índice $I = 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ podemos escribir $dx_I := dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ y $a_I : U \rightarrow \mathbb{R}$ es alguna función suave. En particular, una forma suave de dimensión máxima puede escribirse como $\omega = a(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$. Sea ω una forma suave de dimensión máxima en un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^n$. Entonces vamos a definir la integral de ω en U como la integral de Riemann de $a(x)$:

$$\int_U \omega = \int_U a(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n := \int_U a(x) dx_1 \cdots dx_n. \quad (1.12)$$

Si $F : U' \rightarrow U$ es un difeomorfismo, sean $x_1, \dots, x_n$ las coordenadas locales en U , sean $y_1, \dots, y_n$ las coordenadas locales en U' y sea $y \in U'$. Por un lado tenemos de la definición de integral que

$$\begin{aligned} \int_{U'} F^* \omega &= \int_{U'} (F^* a)(y) F^* dx_1 \wedge \dots \wedge F^* dx_n \\ &= \int_{U'} (a \circ F)(y) dF_1 \wedge \dots \wedge dF_n \\ &= \int_{U'} (a \circ F)(y) \det \left(\frac{\partial F_j}{\partial y_i} \right) dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n \\ &= \int_{U'} (a \circ F)(y) \det(J(F)) dy_1 \cdots dy_n. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Sin embargo, como podemos notar por el Teorema de Cambio de Variables en integrales múltiples, como se puede ver, por ejemplo en [Apo69, §11.32], que cambiando un poco la notación afirma lo siguiente:

Teorema 1.5.13.

$$\int_U a(x) dx_1 \cdots dx_n = \int_{U'} (a \circ F)(y) |\det(J(F))| dy_1 \cdots dy_n. \quad (1.14)$$

Notemos que (1.13) y (1.14) podrían diferir en un signo, es decir:

$$\int_{U'} F^* \omega = \pm \int_U a(x) dx_1 \cdots dx_n,$$

y por (1.12)

$$\int_{U'} F^* \omega = \pm \int_U \omega.$$

Sin embargo, si consideramos un difeomorfismo $F : U' \rightarrow U$ que preserva orientación, entonces el determinante del Jacobiano $J(F)$ es positivo en U' y así tenemos el siguiente corolario:

Corolario 1.5.14. *Si $\omega \in \Omega^n(U)$ es una forma de dimensión máxima, integrable y $F : U' \subset \mathbb{R}^n \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$ es un difeomorfismo que preserva orientación,*

$$\int_{U'} F^* \omega = \int_U \omega.$$

1.5.2. Integración en Variedades

Vamos a definir la integral de una forma de dimensión máxima con soporte compacto ω sobre una variedad orientada M en varios pasos. Recordemos que el soporte de un mapeo real-valuado $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ en una variedad M se define como la cerradura en M del subconjunto en donde $f \neq 0$:

$$\text{supp}(f) = \overline{\{p \in M : f(p) \neq 0\}}.$$

Análogamente para una forma de dimensión máxima ω , el soporte es la cerradura en M del conjunto donde $\omega(p) \neq 0$.

Sin embargo, para la construcción de la integral necesitamos probar antes la existencia de una partición suave en una variedad.

Mapeo Bump Suave

Definición 1.5.15. *Un mapeo bump en p con soporte en U es cualquier función ρ no negativa, suave en M que es 1 en una vecindad de p y con soporte $\text{supp}(\rho) \subset U$.*

El objetivo de este apartado es demostrar que, dada una variedad suave M , todo punto $p \in M$ admite un mapeo bump suave con soporte compacto contenido en una vecindad arbitraria de p . La demostración se realizará de manera constructiva y por pasos. Primero construiremos un mapeo bump en $\mathbb{R}$. Posteriormente extenderemos esta construcción al espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$. Finalmente, trasladaremos este resultado al caso general de variedades suaves.

A continuación construiremos un mapeo bump para un punto $p \in \mathbb{R}^n$. Para ello seguiremos los pasos que se muestran en [Tu11, §13.1]. Primero vamos a probar que la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0, \end{cases}$$

definida en $\mathbb{R}$ es suave. Para ello usaremos inducción sobre k para probar que para $x > 0$, la k -ésima derivada $f^{(k)}(x)$ es de la forma $p_{2k}(1/x) e^{-1/x}$ para algún polinomio $p_{2k}(y)$ de grado $2k$ en y . Luego probaremos que f es suave en $\mathbb{R}$ y que $f^{(k)}(0) = 0$ para todo $k \geq 0$.

Lema 1.5.16. *La función*

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0, \end{cases}$$

es suave en $\mathbb{R}$.

Demostración:

Por inducción sobre k veamos que para $x > 0$, la k -ésima derivada $f^{(k)}(x)$ es de la forma $p_{2k}(1/x) e^{-1/x}$ para algún polinomio $p_{2k}(y)$ de grado $2k$ en y .

Caso $k = 0$. Para este caso, trivialmente tenemos $p_0 = 1$.

Caso $k = 1$. Este caso es la derivada usual

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} (e^{-1/x}) = \frac{1}{x^2} e^{-1/x} \\ &= p_2(1/x) e^{-1/x}, \end{aligned}$$

donde $p_2(y) = y^2$ es un polinomio de grado 2.

Caso $k > 1$. Asumamos que el resultado se cumple para $k - 1$, es decir, tenemos $f^{(k-1)}(x) = p_{2(k-1)}(1/x) e^{-1/x}$ para $p_{2(k-1)}$ de grado $2(k-1)$. Veamos que

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= \frac{d}{dx} \left(p_{2(k-1)} \left(\frac{1}{x} \right) e^{-1/x} \right) \\ &= \frac{d}{dx} \left(p_{2(k-1)} \left(\frac{1}{x} \right) \right) e^{-1/x} + p_{2(k-1)} \left(\frac{1}{x} \right) \frac{d}{dx} (e^{-1/x}) \\ &= \left(\frac{d}{dx} \left(p_{2(k-1)} \left(\frac{1}{x} \right) \right) + \frac{1}{x^2} p_{2(k-1)} \left(\frac{1}{x} \right) \right) e^{-1/x} \\ &= p_{2k} \left(\frac{1}{x} \right) e^{-1/x}. \end{aligned}$$

Sea $y = \frac{1}{x}$. Por la regla de la cadena

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(p_{2(k-1)} \left(\frac{1}{x} \right) \right) &= \frac{d}{dy} (p_{2(k-1)}(y)) \cdot \frac{d}{dx} (y) \\ &= \frac{d}{dy} (p_{2(k-1)}(y)) \cdot \frac{-1}{x^2} \\ &= -y^2 \frac{d}{dy} (p_{2(k-1)}(y)). \end{aligned}$$

Así $p_{2k}(y) = -y^2 \frac{d}{dy} (p_{2(k-1)}(y)) + y^2 p_{2(k-1)}(y)$ es un polinomio de grado $2(k-1) + 2 = 2k$.

Ahora vamos a probar por inducción que para todo $k \geq 0$, la derivada $f^{(k)}$ existe y es continua, además $f^{(k)}(0) = 0$.

Caso $k = 0$. Claramente $f(0) = 0$ y además f es continua en 0 pues,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-1/x} = 0.$$

Caso $k > 0$. Supongamos que para $k - 1$ se cumple que $f^{(k-1)}(0) = 0$ y además $f^{(k-1)}$ es continua en 0.

$$\begin{aligned} f^{(k)}(0) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f^{(k-1)}(0+h) - f^{(k-1)}(0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f^{(k-1)}(h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{p_{2(k-1)}(1/h) e^{-1/h}}{h}. \end{aligned}$$

Sustituyendo $t = 1/h$.

$$f^{(k)}(0) = \lim_{t \rightarrow \infty} t p_{2(k-1)}(t) e^{-t} = 0.$$

Por como está definida la función f es fácil ver que $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f^{(k-1)}(h)}{h} = 0$.

$$f^{(k)}(0) = 0.$$

Ahora vamos a probar que las derivadas son continuas, para ello vamos a probar que $\lim_{x \rightarrow 0} f^{(k)}(x) = f^{(k)}(0) = 0$. Recordemos que $f^{(k)}(x) = p_{2k}(1/x) e^{-1/x}$. Sustituyendo $t = 1/x$,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} p_{2k}(1/x) e^{-1/x} = \lim_{t \rightarrow \infty} p_{2k}(t) e^{-t} = 0.$$

También tenemos que $\lim_{x \rightarrow 0^-} f^{(k)}(x) = 0$, pues para $x \leq 0$, la función f se define como $f(x) = 0$. Por lo tanto $f^{(k)}$ es continua. $\square$

Veremos ahora una serie de lemas que en conjunto nos ayudarán a probar la existencia del mapeo bump.

Lema 1.5.17. *Existe un mapeo $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ suave, tal que $0 \leq g \leq 1$, $g(x) = 0$ para $x \leq 0$ y $g(x) = 1$ para $x \geq 1$.*

Demostración:

Sea

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{f(x)}{f(x) + f(1-x)},$$

donde f está definido como en el Lema 1.5.16. Notemos primero que g está bien definida, pues $f(x) + f(1-x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Luego g es suave pues f es suave y $f(x) + f(1-x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Ya que $f \geq 0$, tenemos que $0 \leq g$. De lo anterior, también se sigue que $f(x) \leq f(x) + f(1-x)$ y por lo tanto, $\frac{f(x)}{f(x) + f(1-x)} \leq 1$, lo que implica que $g \leq 1$. Además, $g(x) = 0$ si y solo si $f(x) = 0$, pero esto solo se cumple para $x \leq 0$. Por otro lado $g(x) = 1$ si y solo si $f(1-x) = 0$ y esto solo sucede cuando $1-x \leq 0$, es decir $x \geq 1$. $\square$

Lema 1.5.18. Sea $0 < a < b$. Existe una función $\rho \in C^\infty(\mathbb{R})$ con $0 \leq \rho \leq 1$ tal que

$$\rho(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq a, \\ 0 & \text{si } |x| \geq b. \end{cases}$$

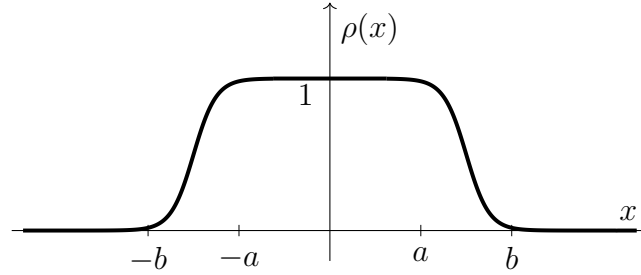
Demostración:

Sean $0 < a < b$ y

$$\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto 1 - g\left(\frac{x^2 - a^2}{b^2 - a^2}\right).$$

Ya que g es suave, ρ es suave. Ya que $0 \leq g \leq 1$, entonces $0 \leq 1 - g \leq 1$ y por lo tanto $0 \leq \rho \leq 1$. Por último, $\rho(x) = 0$ si y solo si $g\left(\frac{x^2 - a^2}{b^2 - a^2}\right) = 1$ y por el lema anterior esto solo pasa si $\frac{x^2 - a^2}{b^2 - a^2} \geq 1$ y ya que $0 < a < b$, la última afirmación se cumple si y solo si $x^2 \geq b^2$. $\rho(x) = 1$ si y solo si $g\left(\frac{x^2 - a^2}{b^2 - a^2}\right) = 0$ y por el lema anterior esto solo pasa si $\frac{x^2 - a^2}{b^2 - a^2} \leq 0$ y ya que $0 < a < b$, la última afirmación se cumple si y solo si $x^2 \leq a^2$. $\square$

En particular, el Lema 1.5.18 garantiza la existencia de un mapeo bump suave en $0 \in \mathbb{R}$ que es idénticamente 1 en $[-a, a]$ y con soporte compacto $[-b, b]$.



Para cualquier $q \in \mathbb{R}$, $\rho(x - q)$ es un mapeo bump suave en q . A continuación extendaremos esta construcción al caso del espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$

Lema 1.5.19. Sea $q \in \mathbb{R}^n$. Existe un mapeo bump suave σ en q con soporte en $\overline{B(q, r)}$.

Demostración:

Sea $q \in \mathbb{R}^n$, definamos

$$\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \rho(\|x - q\|) = 1 - g\left(\frac{\|x - q\|^2 - a^2}{b^2 - a^2}\right).$$

Notemos que σ es suave, pues tanto g como el cuadrado de la norma son mapeos suaves. Del lema anterior sabemos que $0 \leq \rho \leq 1$, por lo tanto $0 \leq \sigma \leq 1$. Ya que $\rho^{-1}(1) = [-a, a]$ se sigue que $\sigma^{-1}(1) = \overline{B(q, a)}$ y de manera similar, ya que $\rho^{-1}(0) = (-\infty, -b] \cup [b, \infty)$ se sigue que $\sigma^{-1}(0) = \mathbb{R}^n \setminus B(q, b)$. Entonces σ es un mapeo bump suave en q con soporte en $\overline{B(q, b)}$. $\square$

Lema 1.5.20. *Supongamos que M es una n -variedad suave. Sea U un conjunto abierto en M y $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave con soporte compacto. Entonces f puede extenderse de forma única a una función suave $\tilde{f} : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

1. $\tilde{f} = 0$ en $M \setminus U$
2. $\text{supp}(\tilde{f}) = \text{supp}(f)$

Demostración:

Sea U un conjunto abierto en M y $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave con soporte compacto. Definimos

$$\tilde{f} : M \rightarrow \mathbb{R}, \quad p \mapsto \begin{cases} f(p) & \text{en } U, \\ 0 & \text{en } M \setminus U. \end{cases}$$

Claramente $\tilde{f}$ es suave en U . Sea $K = \text{supp}(f)$, entonces K es compacto en U y también en M . Por definición $\tilde{f} = 0$ en $M \setminus U$ y $\tilde{f} = f = 0$ en $U \setminus K$ por definición de $\tilde{f}$ y de K . Por lo tanto $\tilde{f} = 0$ en $M \setminus K$ y $\tilde{f}$ es suave en $M \setminus K$. Pero $U \cup (M \setminus K) = M$ así $\tilde{f}$ es suave en M . Como $\tilde{f} = 0$ en $M \setminus K$ entonces $\text{supp}(\tilde{f}) \subset K$. Sea $p \in K = \text{supp}(f) \subset U$. Entonces p no está en el interior de $f^{-1}(\{0\})$. Supongamos que p está en el interior de $\tilde{f}^{-1}(\{0\})$, entonces existe un abierto $V \subset M$ tal que $p \in V \subset \tilde{f}^{-1}(\{0\})$. Luego $V \cap U$ es un abierto que contiene a p y

$$V \cap U \subset \tilde{f}^{-1}(\{0\}) \cap U = f^{-1}(\{0\}).$$

Lo cual contradice que p no esté en el interior de $f^{-1}(\{0\})$. Por lo tanto p no está en el interior de $\tilde{f}^{-1}(\{0\})$ y $p \in \text{supp}(\tilde{f})$. Concluyendo que $\text{supp}(\tilde{f}) = \text{supp}(f)$. $\square$

Teorema 1.5.21. *Sea M una n -variedad suave. Para cualquier $p \in M$ y cualquier vecindad U de p en M existe un mapeo bump suave ψ en p con soporte compacto en U .*

Demostración:

Sea $p \in M$ y U una vecindad de p . Puesto que U es abierto, existe una carta (V, φ) alrededor de p tal que $V \subset U$ (posiblemente podemos reemplazar la carta (V, φ) por $(V \cap U, \varphi)$ para cumplir esta condición). Sea $q = \varphi(p)$. Ya que $\varphi : V \rightarrow \varphi(V)$ es un homeomorfismo, $\varphi(V)$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ que contiene a q . Sea $0 < a < b$ tal que $\overline{B(q, b)} \subset \varphi(V)$. Definamos

$$\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

como en el Lema 1.5.19. Entonces σ es una función suave tal que

- $0 \leq \sigma \leq 1$.
- $\sigma^{-1}(1) = \overline{B(q, a)}$.

$$\blacksquare \sigma^{-1}(0) = \mathbb{R}^n \setminus B(0, b).$$

Sea

$$\psi = \sigma \circ \varphi : V \rightarrow \mathbb{R}.$$

Veamos que ψ es suave y $0 \leq \psi \leq 1$. Tenemos que

$$\begin{aligned} \psi^{-1}(1) &= (\sigma \circ \varphi)^{-1}(1) \\ &= \varphi^{-1}(\sigma^{-1}(1)) \\ &= \varphi^{-1}(\overline{B(q, a)}). \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \psi^{-1}(0) &= (\sigma \circ \varphi)^{-1}(0) \\ &= \varphi^{-1}(\sigma^{-1}(0)) \\ &= \varphi^{-1}(\mathbb{R}^n \setminus B(q, b)) \\ &= V \setminus \varphi^{-1}(B(q, b)). \end{aligned}$$

Sea $K = \varphi^{-1}(\overline{B(q, b)})$. Ya que $\overline{B(q, b)}$ es compacto y φ es un homeomorfismo, se sigue que $\text{supp}(\psi)$ es compacto. Como $V \setminus K \subset V \setminus \varphi^{-1}(B(q, b)) = \psi^{-1}(0)$, vemos que $\psi = 0$ en el conjunto abierto $V \setminus K$ y además $\text{supp}(\psi) \subset K$. Por el Lema 1.5.20 podemos extender ψ a una función $\tilde{\psi} : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\tilde{\psi} = 0$ en $M \setminus V$ y $\text{supp}(\tilde{\psi}) = K$. Entonces $\tilde{\psi}$ es un mapeo bump suave en p con soporte en U . Además $\tilde{\psi}$ tiene soporte compacto, ya que $\text{supp}(\tilde{\psi})$ es un conjunto cerrado del compacto K . $\square$

Particion de la Unidad

Ahora probaremos que dada una cubierta abierta $\{U_\alpha\}$ de una n -variedad suave M siempre existe una partición de la unidad subordinada a esa cubierta. Empecemos con las definiciones.

Definición 1.5.22. Una partición suave de la unidad en una variedad es una colección de funciones suaves no negativas $\{\rho_\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}\}_{\alpha \in A}$ tal que

- La colección de soportes $\{\text{supp}(\rho_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ es localmente finita.
- $\sum \rho_\alpha = 1$.

Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una cubierta abierta de M , decimos que una partición de la unidad $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es subordinada a la cubierta abierta $\{U_\alpha\}$ si $\text{supp}(\rho_\alpha) \subset U_\alpha$ para todo $\alpha \in A$.

A continuación vamos a probar un resultado importante para nuestros propósitos, la existencia de una partición de la unidad subordinada a una cubierta de una variedad suave y para ello vamos a hacer uso de algunos lemas.

Lema 1.5.23. Si $\rho_1, \dots, \rho_k$ son funciones real-valuadas en una variedad M , entonces

$$\text{supp}\left(\sum \rho_i\right) \subset \bigcup \text{supp}(\rho_i).$$

Demostración:

Sea $p \in \text{supp}(\sum \rho_i)$ entonces para cualquier vecindad U de p se cumple que $U \cap \{x : \sum \rho_i(x) \neq 0\} \neq \emptyset$ y por lo tanto existe un $q \in U$ tal que $\sum \rho_i(q) \neq 0$. Entonces debe de existir al menos un índice i_0 en donde $\rho_{i_0}(q) \neq 0$, por lo tanto $U \cap \{x : \rho_{i_0}(x) \neq 0\} \neq \emptyset$ y $p \in \text{supp}(\rho_{i_0})$. Por lo tanto

$$\text{supp}\left(\sum \rho_i\right) \subset \bigcup \text{supp}(\rho_i). \quad \square$$

Lema 1.5.24. *Toda variedad suave M tiene una base numerable donde todos sus elementos tienen cerradura compacta.*

Demostración:

Sea $\mathcal{B}$ una base numerable de M , $U \subset M$ un subconjunto abierto y $p \in U$. Ya que M es localmente euclidiano existe una vecindad V de p tal que $\overline{V}$ es compacto y ya que $\mathcal{B}$ es una base para M existe $B \in \mathcal{B}$ tal que

$$p \in B \subset V \subset U,$$

y por lo tanto $\overline{B} \subset \overline{V}$, pero como $\overline{B}$ es un cerrado contenido en el compacto $\overline{V}$ podemos concluir que $\overline{B}$ es compacto. Sea $\mathcal{B}'$ la colección de abiertos que cumplen lo anterior para cada abierto $U \subset M$ y cada $p \in U$. $\mathcal{B}'$ es una subcolección de $\mathcal{B}$ por lo tanto es numerable y es una base pues para cada subconjunto abierto $U \subset M$ y $p \in U$ podemos encontrar un $B \in \mathcal{B}'$ tal que

$$p \in B \subset U. \quad \square$$

Lema 1.5.25. *Para cada variedad suave M existe una sucesión numerable*

$$V_1 \subset \overline{V_1} \subset V_2 \subset \overline{V_2} \subset \dots$$

donde cada V_i es abierto y $\overline{V_i}$ es compacto y además $M = \bigcup V_i$.

Demostración:

Vamos a construir esta sucesión de manera inductiva. Del lema anterior sabemos que existe una base $\mathcal{B}'$ de M cuya cerradura de cualquiera de los elementos es compacta. Tomemos $B_1 \in \mathcal{B}'$ y digamos que $V_1 = B_1$ entonces $\overline{V_1} = \overline{B_1}$ es compacto y ya que existe una cubierta para $\overline{V_1}$ de elementos básicos de $\mathcal{B}'$ podemos extraer una subcubierta finita, por lo tanto podemos elegir un i_1 como el entero más pequeño y mayor o igual a 2 tal que

$$\overline{V_1} \subset B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_{i_1}.$$

Supongamos que logramos construir la sucesión tal como antes hasta el índice m

$$V_1 \subset \overline{V_1} \subset \cdots \subset V_m \subset \overline{V_m}.$$

Por compacidad tal como en el caso $m = 1$ podemos elegir i_m como el entero más pequeño mayor o igual a $\max\{m + 1, i_{m-1}\}$, tal que

$$\overline{V_m} \subset B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_{i_m}.$$

Entonces definimos V_{m+1} como

$$V_{m+1} = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_{i_m}.$$

V_{m+1} es un conjunto abierto pues es la unión de elementos básicos y además

$$\overline{V_{m+1}} = \overline{B_1} \cup \overline{B_2} \cup \cdots \cup \overline{B_{i_m}}$$

es compacto pues es la unión finita de conjuntos compactos. Y ya que $i_m \geq m + 1$ tenemos que $B_{i_m} \subset V_{i_m}$, entonces

$$M = \bigcup B_i \subset \bigcup V_i \subset M$$

y por lo tanto $M = \bigcup V_i$. □

En la construcción anterior podemos notar dos cosas:

- Para todo i , $\overline{V_{i+1}} \setminus V_i$ es un conjunto cerrado contenido en $\overline{V_{i+1}}$, por lo tanto es un conjunto compacto.
- Para todo i , $V_{i+2} \setminus \overline{V_{i-1}}$ es un conjunto abierto.

Teorema 1.5.26. *Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una cubierta abierta de una variedad suave M .*

1. *Hay una partición de la unidad suave $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ donde cada φ_k tiene soporte compacto tal que para cada k , $\text{supp}(\varphi_k) \subset U_\alpha$ para algún $\alpha \in A$.*
2. *Si no requerimos soporte compacto, entonces hay una partición de la unidad suave $\{\rho_\alpha\}$ subordinada a $\{U_\alpha\}$.*

Demostración:

1. Tomemos una sucesión

$$V_1 \subset \overline{V_1} \subset V_2 \subset \overline{V_2} \subset \cdots, \tag{1.15}$$

tal como en el Lema 1.5.25. Para cada índice de la sucesión (1.15) tomemos un $p \in \overline{V_{i+1}} \setminus V_i$. Ya que $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es una cubierta abierta de M podemos escoger un U_α que contenga a p y como $\overline{V_{i+1}} \setminus V_i \subset V_{i+2} \setminus \overline{V_{i-1}}$, entonces

$$p \in U_\alpha \cap (V_{i+2} \setminus \overline{V_{i-1}}),$$

que es abierto. Por el Teorema 1.5.21 existe un mapeo bump suave ψ_p que es positivo en una vecindad W_p de p y que tiene soporte en $U_\alpha \cap (V_{i+2} \setminus \overline{V_{i-1}})$ y además $\text{supp}(\psi_p)$ es un cerrado que esta contenido en $\overline{V_{i+2}}$ por lo tanto es compacto. Como para cada $p \in \overline{V_{i+1}} \setminus V_i$ pudimos hallar un W_p entonces $\{W_p : p \in \overline{V_{i+1}} \setminus V_i\}$ es una cubierta para $\overline{V_{i+1}} \setminus V_i$ y por compacidad podemos extraer una subcubierta finita $\{W_{p_1}, \dots, W_{p_m}\}$ donde cada W_{p_i} tiene asociado un mapeo bump ψ_{p_i} . Ya que la cardinalidad de la subcubierta depende del i con el que comenzamos, usaremos la siguiente notación: $\{W_{p_1}^i, \dots, W_{p_{m(i)}}^i\}$ y para cada mapeo bump asociado a estos subconjuntos escribiremos $\{\psi_{p_1}^i, \dots, \psi_{p_{m(i)}}^i\}$.

$\{\psi_j^i\}$ es la unión sobre $i \in \mathbb{N}$ de los conjuntos finitos $\{\psi_{p_1}^i, \dots, \psi_{p_{m(i)}}^i\}$, luego es numerable. Ahora vamos a ver que $\{\text{supp}(\psi_j^i)\}$ es localmente finito. Para cada l se cumple que $\text{supp}(\psi_j^l) \subset U_{\alpha_{il}} \cap (V_{i+2} \setminus \overline{V_{i-1}})$ y $\text{supp}(\psi_j^l) \subset V_{i+2} \setminus \overline{V_{i-1}}$. Entonces para $i+1 \leq l$,

$$\text{supp}(\psi_j^l) \cap V_i = \emptyset,$$

por lo tanto solo una cantidad finita de elementos de $\{\text{supp}(\psi_j^i)\}$ intersectan a cada V_i y por lo tanto es localmente finito.

Ahora para cada $p \in M$ existe un i tal que $p \in \overline{V_{i+1}} \setminus V_i$ y un j tal que $p \in W_j^i$. Para estos mismos índices $\psi_j^i(p) > 0$, por lo tanto la suma $\psi = \sum_{i,j} \psi_j^i$ es localmente finita y positiva en todo M . Entonces si escribimos $\{\psi_j^i\}$ como $\{\psi_1, \psi_2, \dots\}$ y definimos

$$\varphi_k = \frac{\psi_k}{\psi},$$

se cumple $\sum \varphi_k = \sum \psi_k / \psi = 1$ y $\text{supp}(\varphi_k) = \text{supp}(\psi_k) \subset U_\alpha$ para algún $\alpha \in A$. Entonces $\{\varphi_k\}$ es una partición de la unidad con soporte compacto tal que para cada k , $\text{supp}(\varphi_k) \subset U_\alpha$ para algún $\alpha \in A$ como queríamos demostrar.

2. Sea $\{\varphi_k\}$ una partición como en el inciso anterior. Vimos que para cada $k \in \mathbb{N}$ existe un índice que depende de k y por lo tanto vamos a denotarlo como $\tau(k)$ tal que

$$\text{supp}(\varphi_k) \subset U_{\tau(k)}.$$

Definamos

$$\rho_\alpha = \sum_{\tau(k)=\alpha} \varphi_k$$

si existe una k tal que $\tau(k) = \alpha$ y en otro caso, $\rho_\alpha = 0$. Luego

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \in A} \rho_\alpha &= \sum_{\alpha \in A} \sum_{\tau(k)=\alpha} \varphi_k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \\ &= 1. \end{aligned}$$

Por el Lema 1.5.23, $\text{supp}(\rho_\alpha) \subset \bigcup_{\tau(k)=\alpha} \text{supp}(\varphi_k) \subset U_k$. Por lo tanto $\{\rho_\alpha\}$ es una partición de la unidad suave subordinada a $\{U_\alpha\}$. $\square$

Una vez establecida la existencia de una partición de la unidad subordinada a cualquier cubierta abierta de M podemos retomar nuestra discusión de integrales en variedades. En la Sección 1.5.1 definimos la integral de una forma de dimensión máxima en subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$. A continuación vamos a extender esta noción a variedades arbitrarias.

Teorema 1.5.27. *Existe una construcción única de una integral de formas de dimensión máxima ω con soporte compacto en un variedad de dimensión n , con las siguientes propiedades:*

1. *Si la variedad tiene un difeomorfismo que preserva la orientación a un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, es la integral definida para formas en $\mathbb{R}^n$, es decir, la que viene dada por (1.12).*
2. *Si ω tiene soporte en $U \subset M$, entonces $\int_M \omega = \int_U \omega$.*
3. *Es lineal.*

Demostración:

Los criterios 1 y 2 implican que si ω tiene soporte en una carta (U, ϕ) tal que $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ preserva orientaciones, debemos definir:

$$\int_U \omega := \int_{\phi(U)} (\phi^{-1})^* \omega.$$

Si M es orientada, podemos encontrar una cubierta abierta de M por cartas $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$ donde todas las funciones de transición preservan orientación. A continuación vamos a probar que no depende de la carta que hayamos elegido. Sea (U, ϕ') otra carta en el mismo conjunto abierto U tal que $\phi \circ \phi'^{-1} : \phi'(U) \rightarrow \phi(U)$ es un difeomorfismo que preserva la orientación. Entonces

$$\begin{aligned} \int_{\phi(U)} (\phi^{-1})^* \omega &= \int_{\phi'(U)} (\phi \circ \phi'^{-1})^* (\phi^{-1})^* \omega \\ &= \int_{\phi'(U)} (\phi'^{-1})^* \omega. \end{aligned}$$

Ahora elijamos una partición de la unidad $\{\rho_\alpha\}$ subordinada a $\{U_\alpha\}$ y observemos que $\omega = \sum_\alpha \rho_\alpha \omega_\alpha$ donde $\omega_\alpha = i_\alpha^* \omega$ y $i_\alpha : U_\alpha \hookrightarrow M$. Ya que $i_\alpha^* \omega = \omega|_{U_\alpha}$, entonces para todo $p \in M$ existe un índice α tal que $p \in U_\alpha$ y se tiene

$$\begin{aligned} \sum_\alpha \rho_\alpha \omega_\alpha(p) &= \left(\sum_\alpha \rho_\alpha(p) \right) (\omega_\alpha(p)) \\ &= \left(\sum_\alpha \rho_\alpha(p) \right) (\omega(p)) \\ &= \omega(p), \end{aligned}$$

que además es una suma finita ya que el soporte de ω es localmente finito. Entonces el criterio 3 nos fuerza a definir:

$$\int_M \omega := \sum_\alpha \int_{U_\alpha} \rho_\alpha \omega_\alpha$$

que tiene sentido porque es una suma finita como vimos en la demostración del Teorema 1.5.26.

Necesitamos verificar que es independiente de la elección de cubierta abierta y partición de la unidad. Sea $\{(V_\beta, \phi'_\beta)\}$ otro atlas orientado y $\{\rho_\beta\}$ una partición subordinada a $\{V_\beta\}$. Usando el hecho que $\sum_\beta \rho'_\beta = 1$ y que las sumas son finitas, podemos distribuir, es decir:

$$\begin{aligned}\sum_\alpha \int_{U_\alpha} \rho_\alpha \omega_\alpha &= \sum_\alpha \int_{U_\alpha} \rho_\alpha \left(\sum_\beta \rho'_\beta \omega_\beta \right) \\ &= \sum_\alpha \sum_\beta \int_{U_\alpha} \rho_\alpha \rho'_\beta \omega_\beta,\end{aligned}$$

y ya que el soporte de $\rho_\alpha \rho'_\beta$ esta contenido en $U_\alpha \cap V_\beta$

$$= \sum_\alpha \sum_\beta \int_{U_\alpha \cap V'_\beta} \rho_\alpha \rho'_\beta \omega_\beta.$$

Por simetría, la suma anterior también es igual a $\sum_\beta \int_{V_\beta} \rho_\beta \omega$ y por lo tanto

$$\sum_\alpha \int_{U_\alpha} \rho_\alpha \omega_\alpha = \sum_\beta \int_{V_\beta} \rho_\beta \omega_\beta$$

y la integral está bien definida. □

Por lo tanto podemos generalizar el Corolario 1.5.14.

Corolario 1.5.28. *Si $F : M \rightarrow N$ es un difeomorfismo que preserva la orientación y $\omega \in \Omega^n(N)$ es una forma de dimensión máxima con soporte compacto, entonces*

$$\int_M F^* \omega = \int_N \omega.$$

1.5.3. Derivada Exterior

Primero vamos a definir la derivada exterior para subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ y luego lo vamos a extender a variedades suaves.

Definición 1.5.29. *Supongamos que tenemos una k -forma en un subconjunto $U \subset \mathbb{R}^n$ que localmente es de la forma $\omega = \sum_I a_I dx_I$. Entonces la derivada exterior se define tomando la i -ésima derivada parcial para cada coeficiente y haciendo cuña con dx_i*

$$d\omega = \sum_i \sum_I \frac{\partial a_I}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_I.$$

A continuación vamos a ver algunos ejemplos:

Ejemplo 1.5.30. *Si $f : \mathbb{R}^3 \supset U \rightarrow \mathbb{R}$ es una función suave, o sea una 0-forma, entonces su derivada exterior es*

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3, \quad (1.16)$$

que es el gradiente.

Ejemplo 1.5.31. Si tenemos una 1-forma en $U \subset \mathbb{R}^3$.

$$\alpha = a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + a_3 dx_3,$$

entonces su derivada exterior es

$$\begin{aligned} d\alpha &= \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial a_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial a_1}{\partial x_3} dx_3 \right) \wedge dx_1 \\ &\quad + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial a_2}{\partial x_3} dx_3 \right) \wedge dx_2 \\ &\quad + \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial a_3}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial a_3}{\partial x_3} dx_3 \right) \wedge dx_3 \\ &= \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2} \right) dx_1 \wedge dx_2 + \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_3} \right) dx_1 \wedge dx_3 \\ &\quad + \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3} \right) dx_2 \wedge dx_3, \end{aligned} \tag{1.17}$$

que es el rotacional.

Ejemplo 1.5.32. Si tenemos una 2-forma en $U \subset \mathbb{R}^3$,

$$\omega = a_1 dx_2 \wedge dx_3 - a_2 dx_1 \wedge dx_3 + a_3 dx_1 \wedge dx_2,$$

la derivada exterior es

$$d\omega = \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3} \right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3, \tag{1.18}$$

que es la divergencia.

Teorema 1.5.33. La derivada exterior es la única operación $\Omega^*(U) \rightarrow \Omega^{*+1}(U)$ con las siguientes propiedades:

1. Para funciones suaves $f \in \Omega^0(U)$, $df = \sum_{i=1}^k \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$.
2. Es lineal, $d(\omega + \nu) = d\omega + d\nu$.
3. Es una antiderivación para el producto cuña es decir, para una k -forma ω y una l -forma ν , $d(\omega \wedge \nu) = d(\omega) \wedge \nu + (-1)^k \omega \wedge d(\nu)$.
4. Es una diferencial, $d(d\omega) = 0$.

Demostración:

1. Por definición.

2. Sean $\omega_1 = \sum_I a_I dx_I$ y $\omega_2 = \sum_I b_I dx_I$ entonces $\omega_1 + \omega_2 = \sum_I (a_I + b_I) dx_I$ y desarrollando:

$$\begin{aligned}
 d(\omega_1 + \omega_2) &= \sum_I d(a_I + b_I) dx_I \\
 &= \sum_I (da_I + db_I) \wedge dx_I \\
 &= \sum_I da_I \wedge dx_I + \sum_I db_I \wedge dx_I \\
 &= d\omega_1 + d\omega_2.
 \end{aligned}$$

3. Sea $\omega = \sum_I a_I dx_I$ una k -forma y $\theta = \sum_J b_J dx_J$ una l -forma entonces

$$\begin{aligned}
 \omega \wedge \theta &= \left(\sum_I a_I dx_I \right) \wedge \left(\sum_J b_J dx_J \right) \\
 &= \sum_I \sum_J (a_I b_J) dx_I \wedge dx_J.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
 d(\omega \wedge \theta) &= \sum_{I,J} d(a_I b_J) dx_I \wedge dx_J \\
 &= \sum_{I,J} b_J da_I \wedge dx_I \wedge dx_J + \sum_{I,J} a_I db_J \wedge dx_I \wedge dx_J \\
 &= \sum_{I,J} da_I \wedge dx_I \wedge b_J dx_J \\
 &+ \sum_{i_1, \dots, i_k} \sum_J a_{i_1 \dots i_k} db_J \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_J \\
 &= \left(\sum_I da_I \wedge dx_I \right) \wedge \left(\sum_J b_J dx_J \right) \\
 &+ (-1)^k \left(\sum_{I,J} a_I dx_I \wedge db_J \wedge dx_J \right) \\
 &= d\omega \wedge \theta + (-1)^k \left(\sum_{I,J} a_I dx_I \right) \wedge \left(\sum_J db_J \wedge dx_J \right) \\
 &= d\omega \wedge \theta + (-1)^k \omega \wedge d\theta.
 \end{aligned}$$

4. Sea $\omega = \sum_I a_I dx_I \in \Omega^k(U)$

$$d\omega = \sum_I da_I \wedge dx_I,$$

volviendo a derivar

$$\begin{aligned}
d(d\omega) &= \sum_I d \left(\sum_i \frac{\partial a_I}{\partial x_i} dx_i \right) \wedge dx_I \\
&= \sum_I \left(\sum_i d \left(\frac{\partial a_I}{\partial x_i} \right) dx_i \right) \wedge dx_I \\
&= \sum_I \left(\sum_{i,j} \frac{\partial^2 a_I}{\partial x_i \partial x_j} dx_j \wedge dx_i \right) \wedge dx_I.
\end{aligned}$$

Lo que está entre paréntesis se puede escribir como

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j} \frac{\partial^2 a_I}{\partial x_i \partial x_j} dx_j \wedge dx_i &= \sum_{i=1}^k \sum_{i=1}^k \frac{\partial^2 a_I}{\partial x_i \partial x_j} dx_j \wedge dx_i \\
&= \sum_{1 \leq i < j \leq k} \frac{\partial^2 a_I}{\partial x_i \partial x_j} (dx_i \wedge dx_j + dx_j \wedge dx_i) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Unicidad: Supongamos que existe otro operador D tal que cumple todo lo anterior. Primero veamos que $D(dx_I) = 0$. Por el inciso 3,

$$D(dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}) = \sum_j \pm dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge D(dx_{i_j}) \wedge \cdots \wedge dx_{i_k},$$

pero por el inciso 1, $dx_{i_j} = D x_{i_j}$, y por el inciso 4, $D(D(x_{i_j})) = 0$. Así

$$D(dx_{i_j}) = D(D x_{i_j}) = 0,$$

y por lo tanto $D(dx_I) = 0$. Sea $\omega = \sum_I a_I dx_I$ una k -forma. Por el inciso 2 y por el inciso 3 tenemos

$$D\omega = \sum_I (D(a_I) \wedge dx_I + a_I D(dx_I)),$$

pero ya habíamos visto que $D(dx_I) = 0$ y por el inciso 1, $Da_I = da_I$. Por lo tanto

$$D\omega = \sum_I da_I \wedge dx_I,$$

pero esta es justamente la definición de $d\omega$, así que $D\omega = d\omega$. □

Proposición 1.5.34. Si U es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, V es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, $F : U \rightarrow V$ es un mapeo suave, y $\omega \in \Omega^k(V)$, entonces

$$F^*(d\omega) = d(F^*\omega).$$

Sea $p \in M$ y $(U, \phi) = (U, x_1, \dots, x_n)$ una carta en p , entonces localmente ω se ve como

$$\omega = \sum a_I dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k},$$

donde $I = (i_1 < \dots < i_k)$ entonces:

$$\begin{aligned} dF^*\omega &= d\left(\sum (F^*a_I) F^*dx_{i_1} \wedge \dots \wedge F^*dx_{i_k}\right) \\ &= d\left(\sum (a_I \circ F) dF_{i_1} \wedge \dots \wedge dF_{i_k}\right) \\ &= \sum d(a_I \circ F) \wedge dF_{i_1} \wedge \dots \wedge dF_{i_k} \\ &= \sum d(F^*a_I) \wedge dF_{i_1} \wedge \dots \wedge dF_{i_k} \\ &= \sum F^*da_I \wedge F^*dx_{i_1} \wedge \dots \wedge F^*dx_{i_k} \\ &= F^*\left(\sum da_I \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}\right) \\ &= F^*d\omega. \end{aligned}$$

□

Ahora vamos a generalizar la derivada exterior para variedades. Sea M una n -variedad suave y (U, ϕ) una carta alrededor de $p \in M$. Definimos la derivada exterior de la k -forma ω definida en M , en el punto p como

$$(d\omega)_p = \phi^*\left(d\left((\phi^{-1})^*\omega\right)\right)_{\phi^{-1}(p)}.$$

De manera conceptual, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \Omega^k(M) & \xrightarrow{d} & \Omega^{k+1}(M) \\ (\phi^{-1})^* \downarrow & & \uparrow \phi^* \\ \Omega^k(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{d} & \Omega^{k+1}(\mathbb{R}^n) \end{array}$$

Hay que probar que $(d\omega)$ está bien definida. Sea (V, ψ) una carta alrededor de p . El mapeo $\psi \circ \psi^{-1}$ es un difeomorfismo entre conjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$, entonces por la Proposición 1.5.34, se sigue que

$$(\phi \circ \psi^{-1})^* d\left((\psi^{-1})^*\omega\right) = d\left((\phi \circ \psi^{-1})^*(\psi^{-1})^*\omega\right).$$

Y ya que $(\phi \circ \psi^{-1})^* = (\psi^{-1})^* \circ \phi^*$,

$$(\psi^{-1})^* \circ \phi^* d\left((\phi^{-1})^*\omega\right) = d\left((\psi^{-1})^*\omega\right),$$

y

$$\phi^* d\left((\phi^{-1})^*\omega\right) = \psi^* d\left((\psi^{-1})^*\omega\right).$$

Por lo tanto la derivada exterior en variedades está bien definida.

Teorema 1.5.35. Si $F : M \rightarrow N$ es un mapeo suave. Para cada k , el mapeo pullback $F^* : \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^k(M)$ conmuta con la derivada exterior.

$$F^*(d\omega) = d(F^*\omega).$$

Demostración:

Sea (U, ϕ) una carta alrededor de $p \in M$ y sea (V, ψ) una carta en N alrededor de $F(p)$. En $U \cap F^{-1}(V)$

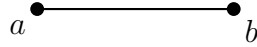
$$\begin{aligned} F^*(d\omega) &= F^*\psi^*d\left((\psi^{-1})^*\omega\right) \\ &= \phi^* \circ (\psi \circ F \circ \phi^{-1})^* d\left((\psi^{-1})^*\omega\right) \\ &= \phi^*d\left((\psi \circ F \circ \phi^{-1})^*(\psi^{-1})^*\omega\right) \\ &= \phi^*d\left((\phi^{-1})^*F^*\omega\right) \\ &= d(F^*\omega). \end{aligned}$$

□

1.5.4. Teorema de Stokes

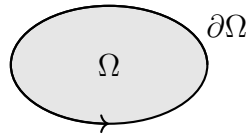
Recordemos algunos teoremas vistos en cursos de cálculo:

Teorema 1.5.36. Segundo teorema fundamental del cálculo:



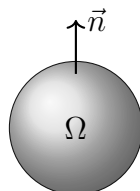
$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a).$$

Teorema 1.5.37. El teorema de Green en el plano:



$$\oint_{\partial\Omega} f_1 dx + f_2 dy = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy.$$

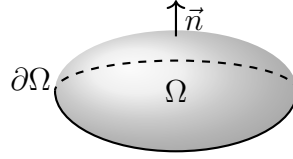
Teorema 1.5.38. El teorema de la divergencia de Gauss en el espacio de dimensión 3:



$$\int \int \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} dv = \int \int_{\Omega} \vec{F} \cdot \vec{n} dA$$

donde $\vec{F} = (f_1, f_2, f_3)$.

Teorema 1.5.39. El teorema clásico de Stokes en el espacio de dimensión 3:



$$\oint_{\partial S} f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz = \int \int_S \vec{n} \cdot \operatorname{curl} \vec{F} dA.$$

Los teoremas clásicos de *Green*, *Gauss* y *Stokes* son consecuencias directas del Teorema de Stokes, debido a las relaciones entre $d\omega$ y los conceptos de gradiente, divergencia y el rotacional que vimos en los Ejemplos 1.5.30, 1.5.31 y 1.5.32.

Teorema 1.5.40 (Teorema de Stokes). *Sea M una n -variedad orientada con frontera ∂M y sea ω una $(n-1)$ -forma diferenciable con soporte compacto en M . Entonces se cumple que*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega. \quad (1.19)$$

Demostración:

Empecemos viendo primero que se cumple para $\mathcal{H}^n$. Ya que ω tiene soporte compacto, existe $R > 0$ tal que

$$\operatorname{supp}(\omega) \subset [-R, R] \times \cdots \times [-R, R] \times [0, R] = A.$$

Una $(n-1)$ -forma ω en $\mathcal{H}^n$ se puede expresar como sigue:

$$\omega = \sum_{i=1}^n a_i dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n,$$

donde “ $\widehat{}$ ” significa que ese término se omite. Entonces su derivada exterior será

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{j,i} \frac{\partial a_i}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \frac{\partial a_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{H}^n} d\omega &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \int_A \frac{\partial a_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \int_0^R \int_{-R}^R \cdots \int_{-R}^R \frac{\partial a_i}{\partial x_i} dx_1 \cdots dx_n.\end{aligned}\quad (1.20)$$

El sumando correspondiente a $i \neq n$ es igual, por el Teorema de Fubini a

$$\int_0^R \int_{-R}^R \cdots \int_{-R}^R \frac{\partial a_i}{\partial x_i} dx_i dx_1 \cdots \widehat{dx_i} \cdots dx_n, \quad (1.21)$$

y ya que $\int_{-R}^R \frac{\partial a_i}{\partial x_i} dx_i = a_i|_{-R}^R = 0$ tenemos que (1.21) es igual a 0. Por lo tanto, el único sumando de la sumatoria (1.20) que podría ser no cero es el correspondiente a $i = n$:

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{H}^n} d\omega &= (-1)^{n-1} \int_0^R \int_{-R}^R \cdots \int_{-R}^R \frac{\partial a_n}{\partial x_n} dx_1 \cdots dx_n \\ &= (-1)^{n-1} \int_{-R}^R \cdots \int_0^R \frac{\partial a_n}{\partial x_n} dx_n dx_1 \cdots dx_{n-1}.\end{aligned}$$

Y ya que

$$\begin{aligned}\int_0^R \frac{\partial a_n}{\partial x_n} dx_n &= a_n|_0^R = a_n(x_1, \dots, x_{n-1}, R) - a_n(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \\ &= -a_n(x_1, \dots, x_{n-1}, 0),\end{aligned}$$

al final tenemos que

$$\int_{\mathcal{H}^n} d\omega = (-1)^n \int_{-R}^R \cdots \int_{-R}^R a_n(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) dx_1 \cdots dx_{n-1}. \quad (1.22)$$

Ahora, vamos a analizar el lado derecho de la igualdad (1.19).

$$\begin{aligned}\int_{\partial \mathcal{H}^n} \omega &= \int_{A \cap \partial \mathcal{H}^n} \sum_{i=1}^n a_i(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{A \cap \partial \mathcal{H}^n} a_i(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n,\end{aligned}$$

y ya que $x_n = 0$ en la frontera de $\mathcal{H}$ entonces $dx_n = 0$ y se cancelan las sumas en donde $i \neq n$,

$$\int_{\partial \mathcal{H}^n} \omega = \int_{A \cap \partial \mathcal{H}^n} a_n(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n-1}.$$

La orientación inducida en la frontera $\partial \mathcal{H}^k$ coincide con la orientación canónica de $\mathbb{R}^{k-1}$ si k es par y la invierte si k es impar,

$$\int_{\partial \mathcal{H}^n} \omega = (-1)^n \int_{-R}^R \cdots \int_{-R}^R a_n(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) dx_1 \cdots dx_{n-1}. \quad (1.23)$$

Así igualando (1.22) y (1.23) tenemos

$$\int_{\mathcal{H}^n} d\omega = \int_{\partial\mathcal{H}^n} \omega.$$

Ahora para el caso de $\mathbb{R}^n$, sea ω una $(n-1)$ -forma suave con soporte compacto. Existe $R > 0$ tal que

$$\text{supp}(\omega) \subset [-R, R] \times \cdots \times [-R, R] = A.$$

Podríamos continuar de forma análoga al caso de $\mathcal{H}^n$, sin embargo, en este caso todos los sumandos de (1.20) serían cero, por lo que

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\omega = 0.$$

Por otro lado $\partial\mathbb{R}^n = \emptyset$ por lo que

$$\int_{\partial\mathbb{R}^n} \omega = 0.$$

Así que en este caso también se cumple

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\omega = \int_{\partial\mathbb{R}^n} \omega = 0.$$

Ahora vamos a probarlo para una variedad general. Sea M una n -variedad y sea $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ un atlas de M . Note que U_α puede ser difeomorfo a $\mathbb{R}^n$ o $\mathcal{H}^n$ (casos en donde sabemos que se cumple el teorema). Sea $\{\rho_\alpha\}$ una partición suave subordinada a $\{U_\alpha\}$, entonces

$$\begin{aligned} \int_{\partial M} \omega &= \int_{\partial M} \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \omega_{\alpha} \\ &= \sum_{\alpha} \int_{\partial M} \rho_{\alpha} \omega_{\alpha} \\ &= \sum_{\alpha} \int_{\partial U_{\alpha}} \rho_{\alpha} \omega_{\alpha}. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Estas integrales pueden ser algunos de los dos casos anteriores, por lo que

$$\begin{aligned} \int_{\partial M} \omega &= \sum_{\alpha} \int_{U_{\alpha}} d(\rho_{\alpha} \omega_{\alpha}) \\ &= \sum_{\alpha} \int_M d(\rho_{\alpha} \omega_{\alpha}) \\ &= \int_M d\left(\sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \omega_{\alpha}\right) \\ &= \int_M d\omega. \end{aligned} \quad \square$$

Capítulo 2

Rayuelas de Cocadenas

Un ángulo recto, una línea que sube,
de aquí para allá, del fondo al frente,
hacia arriba, hacia abajo,
espasmódicamente, frenando en seco y
arrancando en el mismo instante en
otra dirección, y todo esto va tejiendo
un dibujo, una figura.

Julio Cortázar

2.1. Cohomología de De Rham

En el capítulo anterior definimos $d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$ para todo k , esto lo podemos representar con el siguiente diagrama:

$$\cdots \longrightarrow \Omega^{k-1}(M) \xrightarrow{d} \Omega^k(M) \xrightarrow{d} \Omega^{k+1}(M) \longrightarrow \cdots, \quad (2.1)$$

lo que da lugar a la siguiente definición.

Definición 2.1.1. *Un complejo de cocadenas $\mathcal{A}$ es una colección de espacios vectoriales $\{A^k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ con una sucesión de mapeos lineales $d^k : A^k \rightarrow A^{k+1}$, llamados diferenciales,*

$$\cdots \longrightarrow A^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} A^0 \xrightarrow{d^0} A^1 \xrightarrow{d^1} A^2 \xrightarrow{d^2} \cdots$$

tales que $d^{k+1} \circ d^k = 0$.

Para una n -variedad suave M , la sucesión de espacios vectoriales $\{\Omega^k(M)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ con la derivada exterior es un complejo de cocadenas llamado el complejo de De Rham (2.1), pues d es lineal y $d \circ d = 0$. En el complejo de De Rham es usual omitir el índice en la derivada exterior, a diferencia de las diferenciales de un complejo de cocadenas general.

Sea $\omega \in \Omega^k(M)$ una k -forma, entonces decimos que es cerrada si $d\omega = 0$. Denotemos por $Z^k(M)$ al conjunto de todas las k -formas cerradas en M . Decimos que ω es exacta

si existe $\tau \in \Omega^{k-1}(M)$ tal que $\omega = d\tau$. Denotemos por $B^k(M)$ al conjunto de todas las k -formas exactas en M . Claramente toda forma exacta es cerrada, ya que $d(d\tau) = 0$ para toda forma. Sin embargo, la recíproca no siempre es cierta: no toda forma cerrada es exacta. Para capturar y medir esta diferencia se introduce el concepto de cohomología.

Definamos el k -ésimo grupo de cohomología de De Rham como el cociente de espacios vectoriales

$$H^k(M) := \frac{Z^k(M)}{B^k(M)}.$$

Decimos que $\omega, \omega' \in Z^k(M)$ son cohomólogas si $\omega - \omega' \in B^k(M)$. Si consideramos el complejo de cocadenas:

$$\dots \longrightarrow \Omega^{k-1}(M) \xrightarrow{d} \Omega^k(M) \xrightarrow{d} \Omega^{k+1}(M) \longrightarrow \dots,$$

entonces el k -ésimo grupo de cohomología de este complejo es

$$H^k(M) = \frac{\ker(d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M))}{\operatorname{im}(d : \Omega^{k-1}(M) \rightarrow \Omega^k(M))} = \frac{Z^k(M)}{B^k(M)}.$$

Cabe recalcar que usualmente al k -ésimo grupo de cohomología de De Rham es denotado por $H_{DR}^k(M)$ para distinguirlo de otros grupos de cohomología. Sin embargo, en el presente trabajo solo veremos la cohomología de De Rham, por lo que usaremos la notación $H^k(M)$ para estos. A continuación vamos a probar varias propiedades de la cohomología de De Rham.

Proposición 2.1.2. *Sea M una n -variedad suave entonces*

$$H^k(M) = 0, \quad \forall k > n.$$

Demostración:

Una k -forma es una sección de $\Lambda^k(T^*M)$, pero $\Lambda^k(T^*M) = 0$ para $k > n$. Por lo tanto la única k -forma que puede existir es la que manda todo al cero y $H^k(M) = 0$. $\square$

Proposición 2.1.3. *Si M es una variedad suave que tiene r componentes conexas, entonces*

$$H^0(M) \cong \mathbb{R}^r.$$

Demostración:

Primero notemos que no hay 0-formas exactas, por lo tanto

$$H^0(M) = Z^0(M) = \{f \in C^\infty(M) : df = 0\}.$$

Sean f una 0-forma cerrada en M y $(U, x_1, \dots, x_n)$ una carta. Localmente

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = 0,$$

pero esto solo sucede si para toda i se cumple que $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$. Por lo tanto f es localmente constante. Por compatibilidad de cartas f es constante en cada componente conexa de M . Como tiene r componentes conexas, tenemos r constantes diferentes, teniendo así que $H^0(M) = \mathbb{R}^r$. $\square$

Usando estas dos propiedades se puede calcular dos ejemplos sencillos.

Ejemplo 2.1.4. *Los grupos de cohomología de un punto $\{p\}$ en $\mathbb{R}^n$ están dados por*

$$H^k(\{p\}) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 0, \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Demostración:

$\{p\}$ es una variedad de dimensión 0, pues $\{(\{p\}, \phi)\}$, donde

$$\phi : \{p\} \rightarrow \mathbb{R}^0, \quad p \mapsto 0,$$

es un atlas suave para $\{p\}$. Por lo tanto $H^k(\{p\}) = 0$, para todo $k > 0$. Luego $H^0(\{p\}) \cong \mathbb{R}$, pues $\{p\}$ es conexo. $\square$

Ejemplo 2.1.5. *La cohomología de De Rham de $\mathbb{R}$ es*

$$H^k(\mathbb{R}) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 0, \\ 0 & \text{si } k > 0. \end{cases}$$

Demostración:

$H^0(M) \cong \mathbb{R}$, ya que $\mathbb{R}$ es conexo y $H^k(M) = 0$ para $k > 1$, ya que $\mathbb{R}$ es una 1-variedad. Solo faltaría probar que $H^1(\mathbb{R}) = 0$. Sea $f dx$ una 1-forma y consideremos

$$g(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

Por el teorema fundamental del cálculo vemos que $f(x) dx = g'(x) dx = dg$ por lo tanto toda 1-forma en $\mathbb{R}$ es exacta, de lo que se sigue que $H^1(\mathbb{R}) = 0$. $\square$

Lema 2.1.6. *Sea $F : M \rightarrow N$ un mapeo suave, entonces el pullback $F^* : \Omega^*(N) \rightarrow \Omega^*(M)$ manda formas cerradas en formas cerradas y manda formas exactas en formas exactas.*

Sea $\omega \in \Omega^*(N)$ una forma cerrada, entonces

$$0 = F^*d\omega = dF^*\omega.$$

Si $\omega \in \Omega^*(N)$ es una forma exacta, tenemos

$$F^*\omega = F^*d\tau = dF^*\tau. \quad \square$$

Por lo tanto podemos inducir un mapeo que denotaremos con $F^\#$ de la siguiente manera:

$$F^\# : \frac{Z^k(N)}{B^k(N)} \rightarrow \frac{Z^k(M)}{B^k(M)}, \quad F^\#([\omega]) = [F^*(\omega)],$$

que es llamado el mapeo pullback en la cohomología de De Rham.

En general, si $\mathcal{A}$ es un complejo de cocadenas

$$\dots \longrightarrow A^{k-1} \xrightarrow{d^{k-1}} A^k \xrightarrow{d^k} A^{k+1} \longrightarrow \dots,$$

entonces definimos el espacio vectorial

$$H^k(\mathcal{A}) := \frac{\ker(d^k)}{\operatorname{im}(d^{k-1})}. \quad (2.2)$$

Decimos que el complejo de cocadenas es exacto en A_k si $\operatorname{im}(d^{k-1}) = \ker(d^k)$. Para cada k , llamamos cociclos a los elementos de $\ker(d^k)$ y cobordes a los elementos de $\operatorname{im}(d^{k-1})$. Para nuestro complejo de De Rham, (2.2) coincide en como definimos los k -ésimos grupos de cohomología.

Definición 2.1.7. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ complejos de cocadenas con diferenciales d_A y d_B respectivamente. Un mapeo $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ es una colección de mapeos lineales $\varphi_k : A^k \rightarrow B^k$ para cada k ,

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & A^{k-1} & \xrightarrow{d_A^{k-1}} & A^k & \xrightarrow{d_A^k} & A^{k+1} & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow \varphi_{k-1} & & \downarrow \varphi_k & & \downarrow \varphi_{k+1} & & \\ \dots & \longrightarrow & B^{k-1} & \xrightarrow{d_B^{k-1}} & B^k & \xrightarrow{d_B^k} & B^{k+1} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

tales que $d_B^k \circ \varphi_k = \varphi_{k+1} \circ d_A^k$.

En general, un mapeo de cocadenas $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ induce un mapeo en cohomología

$$\varphi^\# : H^k(\mathcal{A}) \rightarrow H^k(\mathcal{B}),$$

dado por

$$\varphi^\#([a]) = [\varphi(a)].$$

Para ver que está bien definido se procede de forma análoga al caso del pullback ya que por definición φ_k conmuta con los respectivos diferenciales, que es lo que usamos en el caso anterior.

2.2. Categorías

La noción de categoría fue introducida por Eilenberg y Mac Lane en 1945 [EM45], con el propósito de ofrecer un marco abstracto para describir y comparar estructuras matemáticas de manera unificada. Desde entonces, la teoría de categorías se ha convertido en una herramienta fundamental en gran parte de las matemáticas modernas, pues permite estudiar estructuras y las relaciones entre ellas de una manera general y abstracta. Veremos como se relaciona este concepto con la cohomología de De Rham.

Definición 2.2.1. *Una categoría consiste en una colección de elementos, llamados objetos y para cada dos objetos A y B , un conjunto $\text{Mor}(A, B)$ de elementos, llamados morfismos de A a B tal que dado cualquier morfismo $f \in \text{Mor}(A, B)$ y cualquier morfismo $g \in \text{Mor}(B, C)$ la composición $g \circ f \in \text{Mor}(A, C)$ está definida. Además de la composición de morfismos se necesita satisfacer dos propiedades:*

1. *Para cada objeto A , existe un morfismo identidad $\text{Id}_A \in \text{Mor}(A, A)$ tal que para cualesquiera $f \in \text{Mor}(A, B)$ y $g \in \text{Mor}(B, A)$,*

$$f \circ \text{Id}_A = f \quad \text{y} \quad \text{Id}_A \circ g = g.$$

2. *Para $f \in \text{Mor}(A, B)$, $g \in \text{Mor}(B, C)$ y $h \in \text{Mor}(C, D)$ se cumple*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Si $f \in \text{Mor}(A, B)$, usualmente escribimos $f : A \rightarrow B$.

Definición 2.2.2. *Dos objetos A y B en una categoría se dicen isomorfos si existen morfismos $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow A$ tales que*

$$g \circ f = \text{Id}_A \quad \text{y} \quad f \circ g = \text{Id}_B.$$

En ese caso ambos f y g son llamados isomorfismos.

Definición 2.2.3. *Un funtor contravariante $\mathcal{F}$ de una categoría $\mathcal{C}$ a otra categoría $\mathcal{D}$ es un mapeo que asocia a cada objeto A en $\mathcal{C}$ un objeto $\mathcal{F}(A)$ en $\mathcal{D}$ y para cada morfismo $f : A \rightarrow B$ un morfismo $\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(B) \rightarrow \mathcal{F}(A)$ tal que:*

1. $\mathcal{F}(\text{Id}_A) = \text{Id}_{\mathcal{F}(A)}$.
2. $\mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f)$.

Notemos que en nuestro análisis anterior se cumplen las siguientes propiedades:

- Si

$$\text{Id}_M : M \rightarrow M$$

es la identidad entonces el pullback es la identidad $\text{Id}_M^*(\omega) = \omega$ y $\text{Id}_M^\#([\omega]) = [\omega]$, por lo tanto $\text{Id}_M^\#$ es la identidad.

- Sean $F : N \rightarrow M$ y $G : M \rightarrow P$ mapeos suaves entre variedades, entonces $(G \circ F)^\#([\omega]) = [(G \circ F)^*(\omega)] = [F^* \circ G^*(\omega)]$ y por lo tanto $(G \circ F)^\# = F^\# \circ G^\#$.

Ya que se cumplen ambas propiedades, existe un funtor contravariante $(H^k(-), f^\#)$ de la categoría de variedades suaves cuyos morfismos son los mapeos suaves a la categoría de espacios vectoriales cuyos morfismos son los mapeos lineales. Es decir, la cohomología de De Rham es un funtor contravariante entre variedades suaves y espacios vectoriales.

Proposición 2.2.4. *Sea $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un funtor contravariante. Si $f : X \rightarrow Y$ es un isomorfismo en la categoría $\mathcal{C}$, entonces $F(f)$ es un isomorfismo en la categoría $\mathcal{D}$.*

Demostración:

Sea $f : X \rightarrow Y$ un isomorfismo. Entonces existe $f' : Y \rightarrow X$ tal que $f' \circ f = \text{Id}_X$ y $f \circ f' = \text{Id}_Y$, luego se cumple que

$$F(f') \circ F(f) = F(f \circ f') = F(\text{Id}_Y) = \text{Id}_{F(Y)}$$

y

$$F(f) \circ F(f') = F(f' \circ f) = F(\text{Id}_X) = \text{Id}_{F(X)}.$$

Por lo tanto $F(f)$ es un isomorfismo en la categoría $\mathcal{D}$. □

Ejemplo 2.2.5. *Las variedades suaves junto con los mapeos suaves forman una categoría.*

Ejemplo 2.2.6. *Los espacios vectoriales junto con las transformaciones lineales forman una categoría.*

En la categoría de variedades, los isomorfismos son precisamente los difeomorfismos y en la categoría de espacios vectoriales, los isomorfismos son los isomorfismos entre espacios vectoriales. Por lo tanto podemos enunciar el siguiente corolario.

Corolario 2.2.7. *Si $F : M \rightarrow N$ es un difeomorfismo entre variedades, entonces $F^\# : H^k(M) \rightarrow H^k(N)$ es un isomorfismo de espacios vectoriales.*

2.3. Invarianza Homotópica

La invarianza homotópica constituye una de las propiedades fundamentales de la cohomología de De Rham. Esta nos dice que si dos variedades son homotópicamente equivalentes, entonces tienen el mismo grupo de cohomología (salvo isomorfismos). Esto permite a la cohomología distinguir entre variedades que no son homotópicamente equivalentes. Esta propiedad junto con el Corolario 2.2.7 y alguna otra herramienta más, nos servirán más adelante para calcular grupos de cohomología.

Definición 2.3.1. *Sea M y N dos variedades. Dos mapeos suaves $F, G : M \rightarrow N$ son homotópicos (suaves) si existe un mapeo suave $h : M \times I \rightarrow N$ tal que*

$$h(x, 0) = F(x) \quad y \quad h(x, 1) = G(x).$$

Si F y G son homotópicos lo vamos a denotar como $F \simeq G$.

Definición 2.3.2. Un mapeo $F : M \rightarrow N$ es una equivalencia homotópica si tiene una inversa homotópica, es decir, un mapeo $G : N \rightarrow M$ tal que $G \circ F$ es homotópico a la identidad Id_M en M y $F \circ G$ es homotópico a la identidad Id_N en N . Decimos que M es homotópicamente equivalente a N .

Veamos un ejemplo.

Ejemplo 2.3.3. Sean $p = (0, \dots, 1)$ y $q = (0, \dots, -1)$ en $\mathbb{R}^{n+1}$, entonces $S^n \setminus (\{p\} \cup \{q\})$ es homotópicamente equivalente a S^{n-1} .

En efecto, denotemos a $S^n \setminus (\{p\} \cup \{q\})$ como U . Sean

$$F : S^{n-1} \rightarrow U, \quad x \mapsto (x, 0),$$

y

$$G : U \rightarrow S^{n-1}, \quad (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \mapsto \frac{(x_1, \dots, x_n)}{\|(x_1, \dots, x_n)\|}.$$

Es fácil ver que $G \circ F = \text{Id}_{S^{n-1}}$ solo falta ver que $F \circ G$ es homotópico a Id_U . Sea

$$h : U \times I \rightarrow U, \quad (x, t) \mapsto \frac{(1-t)x + t \frac{\text{Proy}_{\mathbb{R}^n}(x)}{\|\text{Proy}_{\mathbb{R}^n}(x)\|}}{\left\| (1-t)x + t \frac{\text{Proy}_{\mathbb{R}^n}(x)}{\|\text{Proy}_{\mathbb{R}^n}(x)\|} \right\|},$$

donde $\text{Proy}_{\mathbb{R}^n}$ es la proyección ortogonal $\text{Proy}_{\mathbb{R}^n}(x) = (x_1, \dots, x_n, 0)$. El mapeo h es una especie de homotopía lineal, sin embargo, para que $h(x, t) \in U$ lo hemos normalizado. La norma es distinta de cero pues $\|\text{Proy}_{\mathbb{R}^n}(x)\|$ es cero solo cuando las primeras n entradas de x en U son cero. En S^n los únicos puntos que cumplen esto son p y q , y por lo tanto para todo $x \in U$ se cumple que $\|\text{Proy}_{\mathbb{R}^n}(x)\| \neq 0$. De igual manera $(1-t)x + t(\text{Proy}_{\mathbb{R}^n}(x)) / (\|\text{Proy}_{\mathbb{R}^n}(x)\|)$ es cero cuando las primeras n entradas de x son cero. Por el mismo argumento del caso anterior concluimos que el denominador es distinto de cero. Por lo tanto h está bien definida. El mapeo h es suave ya que la homotopía en línea recta es suave y la normalización es suave. Además $h(x, 0) = \frac{x}{\|x\|} = x$ ya que $x \in U$ y $h(x, 1) = F \circ G$. Por lo tanto $S^n \setminus (\{p\} \cup \{q\})$ es homotópicamente equivalente a S^{n-1} .

2.3.1. Derivada de Lie y la Fórmula Mágica de Cartan

En esta subsección añadimos las definiciones y resultados (sin demostración) necesarios para enunciar y comprender la fórmula mágica de Cartan, que relaciona la derivada de Lie, la derivada exterior y el producto interior. Este resultado será fundamental para la demostración del teorema de invarianza homotópica, que se presentará en la siguiente subsección.

Definición 2.3.4. Un flujo local alrededor de un punto p en un conjunto abierto U de una variedad M es un mapeo suave

$$\theta : (-\epsilon, \epsilon) \times W \rightarrow U,$$

donde ϵ es un número real positivo y W es una vecindad de p en U , tal que

1. $\theta(0, q) = q$ para todo $q \in W$,
2. $\theta(t, \theta(s, q)) = \theta(t + s, q)$ siempre que ambos lados estén definidos.

Nota 2.3.5. Usualmente se suele denotar como $\theta_t(q)$ a $\theta(t, q)$.

Para definir la derivada de Lie, es necesario primero definir el *flujo local generado por un campo vectorial* X como sigue.

Definición 2.3.6. Sea X un campo vectorial sobre una variedad M . Un *flujo local generado por X* es un *flujo local*

$$\theta : (-\epsilon, \epsilon) \times W \rightarrow M,$$

donde $\epsilon > 0$ y W es un abierto, tal que satisface la ecuación:

$$\frac{d}{dt} \theta_t(q) = X(\theta_t(q)).$$

La existencia y unicidad del flujo local generado por un campo vectorial X está garantizada por teoremas de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales ordinarias en variedades suaves. Una referencia más detallada de la existencia y unicidad del flujo local generado por un campo vectorial X se puede encontrar en [Tu11, §14.3].

Definición 2.3.7. Una colección $\{\omega_t\}_{t \in \Lambda}$ de formas se dice que es una *familia uniparamétrica* si el parámetro t corre sobre algún subconjunto de la recta real $\Lambda \subset \mathbb{R}$.

Definición 2.3.8. Una familia uniparamétrica $\{\omega_t\}_{t \in \Lambda}$ de formas en M se dice que *depende suavemente de t* si para cada punto de M existe una vecindad coordinada $(U, x_1, \dots, x_n)$ en la cual

$$(\omega_t)_p = \sum b_J(t, p) dx_J|_p, \quad (t, p) \in \Lambda \times U,$$

para algunas funciones suaves b_J en $\Lambda \times U$. También llamamos a dicha familia $\{\omega_t\}_{t \in \Lambda}$ una *familia suave de k -formas en M* .

Definición 2.3.9. Sea $\{\omega_t\}_{t \in \Lambda}$ una familia suave de k -formas en M . Definimos su derivada con respecto a t como

$$\left(\frac{d}{dt} \right)_{t=t_0} \omega_t \Big|_p = \sum \frac{\partial b_J}{\partial t}(t_0, p) dx_J|_p.$$

Los siguientes resultados muestran que la derivada de una familia suave de k -formas en M es una derivación y además conmuta con la derivada exterior. Las pruebas se pueden ver en [Tu11, §20.3].

Proposición 2.3.10. Si $\{\omega_t\}_{t \in \Lambda}$ y $\{\tau_t\}_{t \in \Lambda}$ son familias suaves de k -formas y l -formas respectivamente sobre una variedad M , entonces

$$\frac{d}{dt} (\omega_t \wedge \tau_t) = \left(\frac{d}{dt} \omega_t \right) \wedge \tau_t + \omega_t \wedge \frac{d}{dt} \tau_t.$$

Proposición 2.3.11. Si $\{\omega_t\}_{t \in \Lambda}$ es una familia suave de formas diferenciales en una variedad M , entonces

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} d\omega_t = d \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} \omega_t \right).$$

Ahora podemos definir la derivada de Lie para formas.

Definición 2.3.12. Sea X un campo vectorial, θ el flujo local generado por X y ω una k -forma en una variedad M . La derivada de Lie $\mathcal{L}_X \omega$ en $p \in M$ se define como

$$(\mathcal{L}_X \omega)_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\theta_t^* (\omega_{\theta_t(p)}) - \omega_p}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\theta_t^* \omega)_p - \omega_p}{t} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\theta_t^* \omega)_p.$$

Vamos a definir el producto interior de formas suaves en una variedad con un campo vectorial X .

Definición 2.3.13. Dado un campo vectorial X y una k -forma ω en una variedad M , la multiplicación interior $i_X : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k-1}(M)$ se define como

$$i_X \omega (X_1, \dots, X_{k-1}) = \omega (X, X_1, \dots, X_{k-1}),$$

para $X_1, \dots, X_{k-1}$ campos vectoriales. Este operador también se denota como $X \lrcorner \omega$ y de ahora en adelante es la que usaremos, para evitar confusión con el mapeo inclusión.

El siguiente teorema contiene las propiedades fundamentales de la derivada de Lie, véase [Tu11, §20.5].

Proposición 2.3.14. Sea X un campo vectorial en una variedad M . Entonces

1. La derivada de Lie $\mathcal{L}_X : \Omega^*(M) \rightarrow \Omega^*(M)$ es una derivación: esto es, un mapeo $\mathbb{R}$ -lineal y si $\omega \in \Omega^k(M)$ y $\tau \in \Omega^l(M)$, entonces

$$\mathcal{L}_X (\omega \wedge \tau) = (\mathcal{L}_X \omega) \wedge \tau + \omega \wedge (\mathcal{L}_X \tau).$$

2. La derivada de Lie $\mathcal{L}_X$ conmuta con la derivada exterior.

3.

$$\mathcal{L}_X = di_X + i_X d.$$

4. Para $\omega \in \Omega^k(M)$ y $Y_1, \dots, Y_k$ campos vectoriales,

$$\mathcal{L}_X (\omega (Y_1, \dots, Y_k)) = (\mathcal{L}_X \omega) (Y_1, \dots, Y_k) + \sum_{i=1}^k \omega (Y_1, \dots, \mathcal{L}_X Y_i, \dots, Y_k).$$

El inciso 3 de la Proposición 2.3.14 es lo que llamamos en este documento como “la fórmula mágica de Cartán”.

2.3.2. Invarianza Homotópica de la Cohomología de De Rham

Teorema 2.3.15. *Dos mapeos homotópicos $F, G : M \rightarrow N$ entre variedades inducen el mismo mapeo en cohomología de De Rham, es decir:*

$$F^\# = G^\# : H^k(N) \rightarrow H^k(M).$$

Demostración:

Primero, consideremos los mapeos:

$$\begin{aligned} i_0 : M &\rightarrow M \times I, & i_1 : M &\rightarrow M \times I, \\ p &\mapsto (p, 0), & p &\mapsto (p, 1). \end{aligned}$$

i_0, i_1 son homotópicos, por el mapeo identidad

$$\text{Id}_{M \times I} : M \times I \rightarrow M \times I.$$

Vamos a probar el teorema por ahora solo para este caso. Consideremos el siguiente diagrama,

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{d} & \Omega^{k-1}(M \times I) & \xrightarrow{d} & \Omega^k(M \times I) & \xrightarrow{d} & \Omega^{k+1}(M \times I) \xrightarrow{d} \dots \\ & \swarrow K & \downarrow i_0^* \downarrow i_1^* & \swarrow K & \downarrow i_0^* \downarrow i_1^* & \swarrow K & \downarrow i_0^* \downarrow i_1^* \swarrow K \\ \dots & \xrightarrow{d} & \Omega^{k-1}(M) & \xrightarrow{d} & \Omega^k(M) & \xrightarrow{d} & \Omega^{k+1}(M) \xrightarrow{d} \dots \end{array}$$

en donde K es un mapeo de un grado menor, definido por

$$K : \Omega^k(M \times I) \rightarrow \Omega^{k-1}(M), \quad \omega \mapsto \int_0^1 i_t^* \left(\frac{\partial}{\partial t} \lrcorner \omega \right) dt,$$

donde $i_t : M \rightarrow M \times I$ denota la inclusión $p \mapsto (p, t)$.

El cálculo de $dK\omega$ puede realizarse punto a punto en coordenadas locales, diferenciando bajo el signo integral, lo que da como resultado

$$dK\omega = \int_0^1 di_t^* \left(\frac{\partial}{\partial t} \lrcorner \omega \right) dt,$$

y por otro lado

$$Kd\omega = \int_0^1 i_t^* \left(\frac{\partial}{\partial t} \lrcorner d\omega \right) dt.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} Kd\omega + dK\omega &= \int_0^1 i_t^* \left(\frac{\partial}{\partial t} \lrcorner d\omega \right) + di_t^* \left(\frac{\partial}{\partial t} \lrcorner \omega \right) dt \\ &= \int_0^1 i_t^* \left(\frac{\partial}{\partial t} \lrcorner d\omega \right) + i_t^* \left(d \left(\frac{\partial}{\partial t} \lrcorner \omega \right) \right) dt \\ &= \int_0^1 i_t^* \left(\mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial t}} \omega \right) dt. \end{aligned} \tag{2.3}$$

La última igualdad es consecuencia directa de la fórmula mágica de Cartán. Aquí tenemos que el flujo es $\theta(t, m, s) = (m, t + s)$, así podemos escribir $i_t = \theta_t \circ i_0$ y

$$i_t^* \left(\mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial t}} \omega \right) = i_0^* \left(\theta_t^* \left(\mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial t}} \omega \right) \right) = i_0^* \left(\frac{\partial}{\partial t} (\theta_t^* \omega) \right) = \frac{\partial}{\partial t} i_0^* (\theta_t^* \omega) = \frac{\partial}{\partial t} i_t^* \omega.$$

Por lo tanto, sustituyendo en (2.3) tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^1 i_t^* \left(\mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial t}} \omega \right) dt &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} i_t^* \omega dt \\ &= i_1^* \omega - i_0^* \omega, \end{aligned}$$

donde la última igualdad se sigue del teorema fundamental del cálculo. Hemos demostrado que para la K definida anteriormente,

$$i_1^* \omega - i_0^* \omega = dK\omega + Kd\omega. \quad (2.4)$$

Sea τ una forma cerrada. Entonces, ya que K es lineal, $K(d\tau) = K(0) = 0$ y por (2.4) tenemos

$$i_1^* \tau - i_0^* \tau = dK\tau.$$

Por lo tanto $i_1^* \tau \sim i_0^* \tau$ y están en la misma clase de equivalencia y tenemos que

$$i_0^\# [\tau] = [i_0^* \tau] = [i_1^* \tau] = i_1^\# [\tau].$$

Por lo tanto

$$i_0^\# = i_1^\# : H^k(N) \rightarrow H^k(M). \quad (2.5)$$

Ahora, consideremos cualesquiera mapeos homotópicos $F, G : M \rightarrow N$. Sea $H : M \times I \rightarrow N$ una homotopía entre ellas, es decir,

$$H \circ i_0 = F \quad \text{y} \quad H \circ i_1 = G,$$

con i_0, i_1 definidas al principio de la prueba. Por propiedades del funtor contravariante entonces tenemos

$$i_0^\# \circ H^\# = F^\# \quad \text{y} \quad i_1^\# \circ H^\# = G^\#.$$

Luego, por (2.5) se concluye que $F^\# = G^\#$ terminando así la prueba. $\square$

Teorema 2.3.16. *Si $F : M \rightarrow N$ es una equivalencia homotópica entonces*

$$F^\# : H^k(N) \rightarrow H^k(M)$$

es un isomorfismo.

Demostración:

Por hipótesis existe $G : N \rightarrow M$ tal que

$$G \circ F \simeq \text{Id}_M \quad \text{y} \quad F \circ G \simeq \text{Id}_N.$$

Por el Teorema 2.3.15 tenemos:

$$(G \circ F)^\# = \text{Id}_{H^k(M)} \quad \text{y} \quad (F \circ G)^\# = \text{Id}_{H^k(N)}.$$

Luego, por propiedades del funtor contravariante

$$F^\# \circ G^\# = \text{Id}_{H^k(M)} \quad \text{y} \quad G^\# \circ F^\# = \text{Id}_{H^k(N)}.$$

Por lo tanto $F^\#$ es un isomorfismo. □

Corolario 2.3.17 (Lema de Poincaré). *Los grupos de cohomología de De Rham de $\mathbb{R}^n$ están dados como sigue:*

$$H^k(\mathbb{R}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 0, \\ 0 & \text{si } k > 0. \end{cases}$$

Demostración:

Sea $p \in \mathbb{R}^n$. Consideremos

$$i : \{p\} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad p \mapsto p,$$

y

$$r : \mathbb{R}^n \rightarrow \{p\}, \quad x \mapsto p.$$

Entonces $r \circ i = \text{Id}_{\{p\}}$. Para probar que $i \circ r$ es homotópico a $\text{Id}_{\mathbb{R}^n}$ vamos a definir:

$$h : \mathbb{R}^n \times I \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (x, t) \mapsto (1 - t)x + tp,$$

que es un mapeo suave donde $h(x, 0) = \text{Id}_{\mathbb{R}^n}$ y $h(x, 1) = i \circ r$. Por lo tanto $\mathbb{R}^n$ es homotópicamente equivalente a un punto $\{p\}$ y entonces

$$H^k(\mathbb{R}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 0, \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases} \quad \square$$

Una variedad es *contraíble* si es homotópicamente equivalente a un punto. Además la homotopía que dimos en el ejemplo anterior es muy usual y recibe el nombre de homotopía de línea recta (u homotopía lineal). Otro ejemplo que veremos involucra un tipo especial de relación homotópica.

Definición 2.3.18. Una retracción de M a una subvariedad $S \subset M$, es un mapeo suave $r : M \rightarrow S$ que se restringe al mapeo identidad en S , es decir, $r \circ i = \text{Id}_S$, donde $i : S \rightarrow M$ es el mapeo inclusión.

Si existe una retracción de M a S decimos que S es retracto de M .

Definición 2.3.19. Una retracción por deformación de M a una subvariedad $S \subset M$, es un mapeo suave $h : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ tal que para toda $x \in M$,

1. $h(x, 0) = x$.
2. Hay una retracción $r : M \rightarrow S$ tal que $h(x, 1) = r(x)$,
3. Para todo $s \in S$ y $t \in \mathbb{R}$, $h(s, t) = s$.

y solemos denotar $h_t(x) = h(x, t)$.

Si existe una retracción por deformación de M a S , decimos que S es retracto por deformación de M .

Proposición 2.3.20. Si $S \subset M$ es retracto por deformación de M , entonces S y M son homotópicamente equivalentes.

Demostración:

Sea $h : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ una retracción por deformación y sea $r(x) = f_1(x) = h(x, 1)$ una retracción. Ya que r es una retracción, la composición

$$S \xrightarrow{i} M \xrightarrow{r} S, \quad r \circ i = \text{Id}_S,$$

es el mapeo identidad en S . Por la definición de retracción la composición

$$S \xrightarrow{r} S \xrightarrow{i} M$$

es f_1 y la retracción por deformación nos da una homotopía

$$f_1 = i \circ r \sim f_1 = \text{Id}_M.$$

Por lo tanto, $r : M \rightarrow S$ es una equivalencia homotópica, con inversa homotópica $i : S \rightarrow M$. □

Así que si S es retracto por deformación de M , entonces $H^k(S) \cong H^k(M)$ para todo k . A continuación vamos a ver un ejemplo:

Ejemplo 2.3.21. Sea

$$V = \mathbb{C}P^n - \{[0 : \cdots : 1]\}.$$

Vamos a ver que $\mathbb{C}P^{n-1}$ es retracto por deformación de V . Definamos

$$h : V \times \mathbb{R} \rightarrow V, \quad ([z_1 : \cdots : z_n], t) \mapsto [z_1 : \cdots : z_{n-1} : (1-t)z_n].$$

Entonces $h(x, 0) = x$ y h_1 es una retracción. Además $h(x, t) = x$ para todo $x \in V$, por lo tanto V es homotópicamente equivalente a $\mathbb{C}P^{n-1}$.

2.4. Mayer-Vietoris

En esta sección presentamos el Teorema de Mayer-Vietoris, una herramienta fundamental para calcular la cohomología de una variedad a partir de subconjuntos abiertos que la cubren.

2.4.1. El Homomorfismo de Conexión

Sea

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{i} \mathcal{B} \xrightarrow{j} \mathcal{C} \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta corta de complejos de cocadenas. Podemos construir un mapeo lineal $\delta : H^k(\mathcal{C}) \rightarrow H^{k+1}(\mathcal{A})$ de la siguiente manera. Consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \xrightarrow{\alpha} & A^{k+1} & \xrightarrow{i_{k+1}} & B^{k+1} & \xrightarrow{j_{k+1}} & C^{k+1} & \xrightarrow{\beta} & 0 \\ & & \uparrow d & & \uparrow d & & \uparrow d & & \\ 0 & \xrightarrow{\gamma} & A^k & \xrightarrow{i_k} & B^k & \xrightarrow{j_k} & C^k & \xrightarrow{\eta} & 0 \end{array}$$

Notemos que la sucesión es exacta en C^k , así que $\text{im}(j_k) = \ker(\eta) = C^k$. Por lo tanto j es sobreyectiva. Sea $[c] \in H^k(\mathcal{C})$, entonces ya que j es sobreyectiva existe un $b \in B^k$ tal que $j_k(b) = c$. Ahora notemos que $db \in B^{k+1}$ está en $\ker j_{k+1}$ ya que:

$$j_{k+1}(db) = dj_k(b) = dc = 0.$$

Luego existe a en A^{k+1} tal que $db = i(a)$ ya que por la exactitud en B^{k+1} tenemos $\ker(j_{k+1}) = \text{im}(i_{k+1})$. Ahora

$$i_{k+2}da = di_{k+1}a = ddb = 0$$

y como i_{k+2} es inyectiva, tenemos que $da = 0$. Por lo tanto podemos considerar su clase de equivalencia $[a]$. Entonces definimos el mapeo homomorfismo de conexión como el que manda $[c]$ a la clase de a , es decir

$$\delta[c] = [a].$$

La construcción de este mapeo se puede resumir con el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{i} & db \\ & \uparrow d & \\ & b & \xrightarrow{j} c \end{array}$$

Sin embargo, aún nos falta probar que está bien definida. Recordemos que hicimos dos elecciones que pueden ser no únicas, primero elegimos el representante de $[c]$ y luego elegimos un elemento $b \in B^k$ tal que $j(b) = c$, empecemos por este último.

Los elementos que son preimagen de c difieren de b por $i_k(\omega)$, así escojamos un nuevo elemento $b + i_k(\omega)$. Luego

$$d(b + i_k(\omega)) = db + i_{k+1}(d\omega)$$

Ahora consideremos otro representante de $[c]$, digamos $c + du$. Entonces ya que j_{k-1} es suprayectiva escogemos $v \in B^{k-1}$ (esta elección está bien definida por el caso anterior) tal que $j_{k-1}(v) = u$, luego

y por lo tanto δ está bien definida.

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{i} \mathcal{B} \xrightarrow{j} \mathcal{C} \longrightarrow 0$$
$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \xrightarrow{\delta} & H^k(\mathcal{A}) & \xrightarrow{i^\#} & H^k(\mathcal{B}) & \xrightarrow{j^\#} & H^k(C) \\ & & & & & & \downarrow \delta \\ & & & & & & \text{(hooked back to } H^{k+1}(\mathcal{A}) \text{)} \\ & & H^{k+1}(\mathcal{A}) & \xrightarrow{i^\#} & H^{k+1}(\mathcal{B}) & \xrightarrow{j^\#} & H^{k+1}(C) \xrightarrow{\delta} \cdots \end{array}$$

Vamos a probar la exactitud en $H^k(\mathcal{A}), H^k(\mathcal{B}), H^k(\mathcal{C})$ para cualquier k . Empezaremos por probar la exactitud para $H^k(\mathcal{C})$:

- $$\delta \left(j^{\#} [b] \right) = \delta [j (b)] .$$

$$\begin{array}{ccc} 0 & \xrightarrow{i} & db = 0 \\ & \uparrow d & \\ & b & \xrightarrow{j} j(b) \end{array}$$
$$\delta [j(b)] = \delta [0] = [0].$$

- $$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{i} & db \\ \uparrow d & & \uparrow d \\ a' & & b \xrightarrow{j} c \end{array}$$

Luego

$$\begin{aligned} d(b - i(a')) &= db - di(a') \\ &= db - i(da') \\ &= db - ia = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto $b - i(a')$ es una forma cerrada, luego

$$\begin{aligned} j(b - i(a')) &= j(b) - j(i(a')) \\ &= j(b) = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto $j^\# [b - i(a')] = [c]$ y $[c] \in \text{im} j^\#$.

Ahora vamos a probar la exactitud en $H^k(\mathcal{B})$:

- $\text{im} i^\# \subset \ker j^\#$. Sea $[b] \in H^k(\mathcal{B})$ tal que $i^\# [a] = [b]$ para algún $[a] \in H^k(\mathcal{A})$. Entonces,

$$j^\# [b] = j^\# i^\# [a] = j^\# [ia] = [jia] = [0].$$

- $\ker j^\# \subset \text{im} i^\#$. Sea $[b] \in H^k(\mathcal{B})$ tal que $j^\# [b] = [jb] = [0]$. Ya que jb está en la misma clase de equivalencia que el cero existe un c tal que $jb = dc$ y ya que j es sobreyectiva existe un b' tal que $jb' = c$. Entonces $j(b - db') = jb - jdb' = dc - djb' = 0$. Por lo tanto existe un a tal que $ia = b - db'$ y a es cerrada debido a que $ida = dia = d(b - db') = 0$. Esta a será nuestra candidata para la imagen de $i^\#$. Veamos:

$$i^\# [a] = [ia] = [b - db'] = [b].$$

Por último vamos a probar la exactitud en $H^k(\mathcal{A})$:

- $\text{im} \delta \subset \ker i^\#$. Sea $\delta [c] = [a] \in H^k(\mathcal{A})$

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{i} & db \\ & \uparrow d & \\ & b & \xrightarrow{j} c \end{array}$$

$$i^\# \delta [c] = i^\# [a] = [ia] = [db] = 0.$$

- $\ker i^\# \subset \text{im} \delta$. Sea $[a] \in H^k(\mathcal{A})$ tal que $i^\# [a] = [ia] = [0]$. Ya que ia está en la misma clase de equivalencia de 0 existe b tal que $ia = db$. Sea $jb = c$ entonces por construcción de δ tenemos que $\delta [c] = [a]$. $\square$

Sea $\{U, V\}$ una cubierta abierta de una variedad M , entonces tenemos las siguientes inclusiones:

$$\begin{array}{ccccc} & & U & & \\ & \nearrow j_U & & \nwarrow i_U & \\ U \cap V & & & & M \\ & \searrow j_V & & \nearrow i_V & \\ & & V & & \end{array}$$

El pullback $i_U^* : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^k(U)$ está dado por la restricción $i_U^*\omega = \omega|_U$. El pullback de las otras contenciones está definida de la misma forma. Sean

$$i : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V), \quad \sigma \mapsto (i_U^*\sigma, i_V^*\sigma) = (\sigma|_U, \sigma|_V),$$

y

$$j : \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V) \rightarrow \Omega^k(U \cap V), \quad (\omega, \tau) \mapsto j_V^*\tau - j_U^*\omega = \tau|_{U \cap V} - \omega|_{U \cap V}.$$

Vamos a ver que ambos mapeos conmutan con la derivada exterior. La derivada exterior en $\Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V)$ está dada por $d(\omega, \tau) = (d\omega, d\tau)$. Para i , tenemos que

$$\begin{aligned} di(\sigma) &= d(i_U^*\sigma, i_V^*\sigma) = (di_U^*(\sigma), di_V^*(\sigma)) \\ &= (i_U^*(d\sigma), i_V^*(d\sigma)) \\ &= i(d\sigma). \end{aligned}$$

Para j , tenemos que

$$\begin{aligned} dj(\omega, \tau) &= d(j_V^*(\tau) - j_U^*(\omega)) = j_V^*(d\tau) - j_U^*(d\omega) \\ &= j(d(\omega, \tau)). \end{aligned}$$

Por lo tanto j e i son mapeos entre complejos de cocadenas.

Proposición 2.4.2. *Para cada $k \geq 0$, la sucesión*

$$0 \longrightarrow \Omega^k(M) \xrightarrow{i} \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V) \xrightarrow{j} \Omega^k(U \cap V) \longrightarrow 0$$

es exacta.

Demostración:

- Veamos primero que es exacta en $\Omega^k(M)$, para ello basta probar que i es inyectiva. Sea $\sigma \in \Omega^k(M)$ tal que $i\sigma = (i_U^*\sigma, i_V^*\sigma) = (\sigma|_U, \sigma|_V) = (0, 0)$. Ya que $\{U, V\}$ cubre a todo M , σ tiene que ser cero en todo M . Por lo tanto σ es la forma cero, es decir la que manda todos los puntos de M a 0. Por lo tanto i es inyectiva.

- Ahora vamos a probar que es exacta en $\Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V)$, para esto vamos a usar la doble contención.

Sea $\sigma \in \Omega^k(M)$ entonces

$$\begin{aligned} j(i(\sigma)) &= j(\sigma|_U, \sigma|_V) \\ &= j_V^*\sigma|_U - j_U^*\sigma|_V \\ &= \sigma|_{U \cap V} - \sigma|_{U \cap V} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\text{im} i \subset \ker j$.

Sea $(\omega, \tau) \in \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V)$ tal que $j(\omega, \tau) = 0$, esto es, $\omega|_{U \cap V} - \tau|_{U \cap V} = 0$, lo que implica que:

$$\omega|_{U \cap V} = \tau|_{U \cap V}.$$

Definimos la forma σ en M como

$$\sigma = \begin{cases} \omega & \text{en } U, \\ \tau & \text{en } V, \end{cases}$$

que está bien definida por lo anterior. Claramente $i\sigma = (i_U^* \sigma, i_V^* \sigma) = (\sigma|_U, \sigma|_V) = (\omega, \tau)$ y por lo tanto $\ker j \subset \text{im} i$. Con esto se prueba la exactitud en $\Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V)$.

- Por último vamos a revisar la exactitud en $\Omega^k(U \cap V)$. Para probar esto basta ver que j es sobreyectiva.

Sea $\omega \in \Omega^k(U \cap V)$. Debemos mostrar que existen $\eta \in \Omega^k(U)$ y $\eta' \in \Omega^k(V)$ tales que

$$\omega = j(\eta, \eta') = \eta|_{U \cap V} - \eta'|_{U \cap V}.$$

Sea $\{\rho, \rho'\}$ una partición de la unidad subordinada a $\{U, V\}$. Definimos $\nu \in \Omega^k(U)$ como la extensión por cero de $\rho'\omega$, es decir,

$$\eta = \begin{cases} -\rho'\omega & \text{en } U \cap V, \\ 0 & \text{en } U \setminus (U \cap V). \end{cases}$$

Análogamente

$$\eta' = \begin{cases} \rho\omega & \text{en } U \cap V, \\ 0 & \text{en } V \setminus (U \cap V). \end{cases}$$

Por lo tanto

$$j(\eta, \eta') = \eta'|_{U \cap V} - \eta|_{U \cap V} = \rho\omega - (-\rho'\omega) = \rho\omega + \rho'\omega = \omega,$$

y hemos probado que j es sobreyectivo. □

Con todo lo anterior, es posible hacer un cálculo explícito de δ en la cohomología de De Rham. Sea $\omega \in \Omega^k(U \cap V)$ una forma cerrada, entonces existe $(\eta, \eta') \in \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V)$ definida como en la demostración anterior, tal que $j(\eta, \eta') = \omega$ ya que por conmutatividad se cumple que $j(d(\eta, \eta')) = d(\omega) = 0$, por lo tanto $d\eta'|_{U \cap V} - d\eta|_{U \cap V} = 0$ y $d\eta = d\eta'$ en la intersección $U \cap V$. Por lo tanto, la preimagen de $d(\eta, \eta')$ es

$$\tau = \begin{cases} -d(\eta) = d(\rho'\omega) & \text{en } U, \\ d(\eta') = d(\rho\omega) & \text{en } V. \end{cases}$$

El homomorfismo de conexión estaría dado explícitamente por

$$\delta[\omega] = [\tau]. \tag{2.6}$$

Ahora, ya que

$$0 \longrightarrow \Omega^k(M) \xrightarrow{i} \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V) \xrightarrow{j} \Omega^k(U \cap V) \longrightarrow 0$$

es exacta podemos aplicar directamente el Teorema 2.4.1 y obtenemos:

Teorema 2.4.3 (Mayer-Vietoris). *Sea M una variedad que puede descomponerse como la unión de dos subconjuntos abiertos U, V . Entonces existe una sucesión exacta larga para los grupos de cohomología de De Rham*

[illegible]

2.5. Ejemplos

Antes de desarrollar los ejemplos vamos a ver un lema que nos será muy útil en el cálculo de los grupos de cohomología de De Rham de estos espacios:

Lema 2.5.1. *Sea*

$$0 \rightarrow A^0 \xrightarrow{d^0} A^1 \xrightarrow{d^1} A^2 \xrightarrow{d^2} \dots \xrightarrow{d^{m-1}} A^m \rightarrow 0$$

una sucesión exacta de espacios vectoriales de dimensión finita. Entonces

$$\sum_{i=0}^m (-1)^i \dim A^i = 0.$$

Demostración:

Por el teorema de rango-nulidad

$$\dim(A^k) = \dim(\ker d^k) + \dim(\operatorname{im} d^k).$$

Podemos sustituir

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m (-1)^k \dim(A^k) &= \sum_{k=0}^m (-1)^k (\dim(\ker d^k) + \dim(\operatorname{im} d^k)) \\ &= \dim(\ker d^0) + (-1)^m \dim(\operatorname{im} d^m), \end{aligned}$$

ya que $\ker d^k = \operatorname{im} d^{k+1}$. Como d^0 es inyectivo y d^m es sobreyectivo se sigue que

$$\sum_{k=0}^m (-1)^k \dim(A^k) = 0.$$

☐

Teorema 2.5.2. *Los grupos de cohomología de S^n con $n \geq 1$ están dados por*

$$H^k(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 0, n, \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Demostración:

La prueba será por inducción sobre n .

Caso $n = 1$. Para este caso vamos a considerar

$$U = S^1 \cap \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 > -1\}$$

 y

$$V = S^1 \cap \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 < 1 \right\}.$$

Tenemos que ambos U y V son difeomorfos a $\mathbb{R}$ por la proyección estereográfica, así que $H^k(U) \cong H^k(V) \cong H^k(\mathbb{R})$, que por el Lema de Poincaré sabemos que es cero para todo $k \neq 0$ y para $k = 0$, $H^0(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$. Además, ya que $U \cap V$ tiene dos componentes conexas $H^0(U \cap V) \cong \mathbb{R}^2$. Por lo tanto tenemos la siguiente sucesión exacta larga:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & H^0(S^1) \cong \mathbb{R} & \xrightarrow{i^\#} & H^0(U) \oplus H^0(V) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} & \xrightarrow{j^\#} & H^0(U \cap V) \cong \mathbb{R}^2 \\
 & & & & & & \downarrow \delta \\
 & \hookrightarrow & H^1(S^1) & \xrightarrow{i^\#} & H^1(U) \oplus H^1(V) = 0 & \xrightarrow{j^\#} & H^1(U \cap V) \\
 & & & & & & \downarrow \delta \\
 & \longrightarrow & 0 & \xrightarrow{i^\#} & \cdots & &
 \end{array}$$

Así por el Lema 2.5.1 tenemos que $\dim(H^1(S^1)) = 1$, por lo tanto $H^1(S^1) \cong \mathbb{R}$. Por la Proposición 2.1.2 sabemos que los grupos de cohomología para $k > 1$ son 0 y concluimos entonces que:

$$H^k(S^1) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 0, 1, \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Caso $n > 1$. Para $S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\}$ definamos la cubierta $\{U, V\}$, donde

$$U = S^n \cap \left\{ (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} > -1 \right\},$$

$$V = S^n \cap \left\{ (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} < 1 \right\}.$$

De nuevo, por la proyección estereográfica U y V son difeomorfos a $\mathbb{R}^n$, y por lo tanto $H^k(U), H^k(V) \cong H^k(\mathbb{R}^n)$ para todo k . Para $k > 1$ la sucesión

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{i^\#} & H^{k-1}(U) \oplus H^{k-1}(V) = 0 & \xrightarrow{j^\#} & H^{k-1}(U \cap V) & \xrightarrow{\delta} & \\ & & & & & \searrow & \\ & & & & & & H^k(S^n) \end{array}$$

$$\dim \left(H^{k-1} (U \cap V) \right) = \dim \left(H^k (S^n) \right).$$
$$H^{k-1}(S^{n-1}) \cong H^k(S^n), \quad k > 1.$$
$$0 \xrightarrow{\delta} H^0(S^n) \cong \mathbb{R} \xrightarrow{i^\#} H^0(U) \oplus H^0(V) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{j^\#} H^0(S^{n-1}) \cong \mathbb{R}$$

 $\hookrightarrow H^k(S^n) \xrightarrow{i^\#} H^1(U) \oplus H^1(V) = 0 \xrightarrow{j^\#} \dots$
$$\begin{aligned}\dim \left(H^1 \left(S^n \right) \right) &= \dim \left(H^0 \left(S^n \right) \right) - \dim \left(H^0 \left(U \right) \oplus H^0 \left(V \right) \right) + \dim \left(H^0 \left(S^{n-1} \right) \right) \\ &= 1 - 2 + 1 = 0.\end{aligned}$$
$$H^k(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 0, n, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad \square$$
$$H^k(\mathbb{R}^n \setminus X) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 0, \\ \mathbb{R}^{|X|} & \text{si } k = n - 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

73

Obtenemos que $G \circ F : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ es el mapeo identidad en S^{n-1} . Para probar que $F \circ G$ es homotópico a la identidad en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ definamos

$$h : (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times I \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad (x, t) \mapsto (1 - t)x + t \frac{x}{\|x\|},$$

que es la homotopía de línea recta. Claramente h es suave y $h(x, 0) = \text{Id}_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$ y $h(x, 1) = F \circ G$, por lo tanto $F \circ G \simeq \text{Id}_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$ y con eso hemos demostrado que $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y S^{n-1} son homotópicamente equivalentes. Del ejemplo anterior

$$H^k(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 0, n-1, \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Caso $|X| > 1$. Fijemos un punto $x \in X$ y vamos a definir la cubierta para $\mathbb{R}^n$ dada por

$$U = \mathbb{R}^n \setminus \{x\}, \quad V = \mathbb{R}^n \setminus \{X \setminus \{x\}\}.$$

Se tiene que $U \cap V = \mathbb{R}^n \setminus X$.

- Para $k = n-1$ y sabiendo por el caso $|X| = 1$ que $H^k(U) \cong \mathbb{R}$ y que $H^k(V) \cong \mathbb{R}^{|X|-1}$ por hipótesis de inducción, tenemos la siguiente sucesión exacta:

$$\begin{array}{c} \cdots \xrightarrow{\delta} H^k(\mathbb{R}^n) = 0 \xrightarrow{i^\#} H^k(U) \oplus H^k(V) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{|X|-1} \xrightarrow{j^\#} H^k(U \cap V) \\ \quad \searrow \delta \\ \quad \hookrightarrow H^{k+1}(\mathbb{R}^n) = 0 \xrightarrow{i^\#} \cdots \end{array}$$

y por lo tanto

$$H^k(U \cap V) \cong H^k(U) \oplus H^{k-1}(V) \cong \mathbb{R}^{|X|}.$$

- Para $k \neq n - 1$ y $k \neq 0$, del caso $|X| = 1$ sabemos que $H^k(U) = 0$. Por hipótesis de inducción $H^k(V) = 0$ y obtenemos la siguiente sucesión exacta:

[illegible]

Por lo tanto

$$H^k(U \cap V) = H^k(U) \oplus H^k(V) = 0.$$

- Para $k = 0$, dado que $n \geq 2$ y X es un conjunto finito, tenemos que $\mathbb{R}^n \setminus X$ es conexa por caminos, por lo tanto $H^0(\mathbb{R}^n \setminus X) \cong \mathbb{R}$.

Juntando todos los casos concluimos que:

$$H^k(\mathbb{R}^n \setminus X) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 0, \\ \mathbb{R}^{|X|} & \text{si } k = n - 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Teorema 2.5.4. *Los grupos de cohomología de $\mathbb{C}P^n$ con $n \geq 1$, están dados por*

$$H^k(\mathbb{C}P^n) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } 0 \leq k \leq 2n \text{ es par,} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Demostración:

Vamos a hacerlo por inducción sobre n .

Caso $n = 1$. Este caso ya lo tenemos, ya que por el Ejemplo 1.1.8, $\mathbb{C}P^1$ es difeomorfo a S^2 .

Caso $n > 1$. Vamos a dar una cubierta abierta de $\mathbb{C}P^n$. Sea $p = [0 : \cdots : 1]$. Definimos

$$U = \mathbb{C}P^n \setminus \mathbb{C}P^{n-1}, \quad V = \mathbb{C}P^n \setminus \{p\}.$$

Se tiene que $U \cup V = \mathbb{C}P^n$ ya que $p \in U$. Luego $U \cap V = (\mathbb{C}P^n \cap \mathbb{C}P^n) \setminus (\mathbb{C}P^{n-1} \cup \{p\}) = \mathbb{C}P^n \setminus (\mathbb{C}P^{n-1} \cup \{p\}) = U \setminus \{p\}$.

Luego, U es difeomorfo a $\mathbb{C}^n$, ya que todo elemento en U tiene la última coordenada z_n distinto de cero por lo que podemos escalarlo por $\frac{1}{z_n}$ y $[z_0 : \cdots : z_n] = \left[\frac{z_0}{z_n} : \cdots : 1\right]$. Así que definimos el mapeo

$$\varphi: U \rightarrow \mathbb{C}^n, \quad [z_0: \cdots: z_n] \mapsto \left(\frac{z_0}{z_n}, \dots, \frac{z_{n-1}}{z_n} \right),$$

que es multiplicar por un escalar y proyectar las primeras $n - 1$ entradas. Por lo tanto φ es un difeomorfismo de U a $\mathbb{C}^n$, pero $\mathbb{C}^n$ es difeomorfo a $\mathbb{R}^{2n}$, por lo tanto U es difeomorfo a $\mathbb{R}^{2n}$.

Luego para $U \cap V = U \setminus \{p\}$, ya que U es difeomorfo a $\mathbb{R}^{2n}$ tenemos que $U \setminus \{p\}$ es difeomorfo a $\mathbb{R}^{2n}$ menos un punto. Por el Teorema 2.5.3, $\mathbb{R}^{2n} \setminus \{0\}$ es homotópicamente equivalente a S^{2n-1} . Concluimos que

$$H^k(U \cap V) \cong H^k(S^{2n-1}).$$

Para V tenemos que es homotópicamente equivalente a $\mathbb{C}P^{n-1}$ por el Ejemplo 2.3.21.

En resumen tenemos los siguientes isomorfismos:

$$H^k(U) \cong H^k(\mathbb{R}^{2n}), \quad H^k(U \cap V) \cong H^k(S^{2n-1}), \quad H^k(V) \cong H^k(\mathbb{C}P^{n-1}).$$

- Para el caso $k = 1$, tenemos que $H^0(\mathbb{CP}^n) \cong H^0(U) \cong H^0(V) \cong H^0(U \cap V) \cong \mathbb{R}$, pues todos son conexos y $H^1(U) = H^1(\mathbb{R}^{2n}) = 0$, $H^1(V) = H^1(\mathbb{CP}^n) = 0$ este último por hipótesis de inducción. Así tenemos la sucesión exacta

$$\begin{array}{c}0 \longrightarrow H^0(\mathbb{C}P^n) \cong \mathbb{R} \xrightarrow{i^\#} H^0(U) \oplus H^0(V) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{j^\#} H^0(U \cap V) \cong \mathbb{R} \\ \qquad\qquad\qquad \searrow \delta \\ \hookrightarrow H^1(\mathbb{C}P^n) \xrightarrow{i^\#} H^1(U) \oplus H^1(V) = 0 \xrightarrow{j^\#} \dots\end{array}$$

Ya que es exacta podemos calcular la dimensión de $H^1(\mathbb{C}P^n)$ como sigue:

$$\begin{aligned}\dim(H^1(\mathbb{C}P^n)) &= -\dim(H^0(\mathbb{C}P^n)) + \dim(H^0(U) \oplus H^0(V)) - \dim(H^0(U \cap V)) \\ &= -1 + 2 - 1 = 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto $H^1(\mathbb{C}P^n) = 0$.

- Para $2n - 2 \geq k > 1$ tenemos la sucesión exacta

$$\begin{array}{c} \dots \xrightarrow{j^\#} H^{k-1}(U \cap V) = H^{k-1}(S^{2n-1}) = 0 \xrightarrow{\delta} \dots \\ \left. \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} H^k(\mathbb{C}P^n) \xrightarrow{i^\#} H^k(U) \oplus H^k(V) \cong H^k(\mathbb{R}^{2n}) \oplus H^k(V) \cong H^k(V) \\ \xrightarrow{\quad} H^k(U \cap V) = H^k(S^{2n-1}) = 0 \xrightarrow{\delta} \dots \end{array} \right\} j^\# \end{array}$$

y considerando el caso anterior donde $H^1(\mathbb{C}P^n) = 0 = H^1(V)$ tenemos que para $1 \leq k \leq 2n - 2$, el mapeo $i^\# : H^k(\mathbb{C}P^n) \rightarrow H^k(V)$ es un isomorfismo. Pero tal como definimos $i^\#$ en la Sección 2.4 y particularmente para este caso, $i^\#$ no es más que la inclusión.

$$i^\# : H^k(\mathbb{C}P^n) \rightarrow H^k(\mathbb{C}P^{n-1}), \quad [\omega] \mapsto [\omega|_{\mathbb{C}P^{n-1}}]. \quad (2.7)$$

- Para $k = 2n$ tenemos la sucesión exacta

$$\begin{array}{c} \dots \xrightarrow{j^\#} H^{k-2}(U \cap V) = H^{k-2}(S^{2n-1}) = 0 \xrightarrow{\delta} \dots \\ \left. \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} H^{k-1}(\mathbb{C}P^n) \xrightarrow{i^\#} H^{k-1}(U) \oplus H^{k+1}(V) = 0 \xrightarrow{j^\#} H^{k-1}(U \cap V) \cong H^{k-1}(S^{2n-1}) \cong \mathbb{R} \\ \xrightarrow{\quad} H^k(\mathbb{C}P^n) \xrightarrow{i^\#} H^k(U) \oplus H^k(V) = 0 \xrightarrow{j^\#} \dots \end{array} \right\} \delta \end{array}$$

Y por lo tanto $H^{2n-1}(\mathbb{C}P^n) = 0$ y $H^{2n}(\mathbb{C}P^n) \cong \mathbb{R}$.

Juntando los casos que sabemos por hipótesis de inducción que tenemos gracias al isomorfismo (2.7) tenemos:

$$H^k(\mathbb{C}P^n) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } 0 \leq k \leq 2n \text{ es par,} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad \square$$

2.6. Dualidad de Poincaré

Es posible probar más que sólo cálculos de grupos de cohomología con el teorema de Mayer Vietoris, por ejemplo en [BT82, §5] aparecen los siguientes ejemplos:

- Dimensión finita de la cohomología de De Rham.
- Dualidad de Poincaré.
- Fórmula de Künneth.
- Teorema de Leray-Hirsch.
- Isomorfismo de Thom.

En esta sección solo enunciaremos la dualidad de Poincaré, pero más adelante veremos la Fórmula de Künneth. Cabe destacar que todos estos resultados se establecen en el contexto de variedades suaves, pero con una hipótesis adicional: se requiere que la variedad tenga una cubierta buena, definida de la siguiente manera.

Definición 2.6.1. *Sea M una n -variedad. Decimos que tiene una cubierta buena si existe una cubierta $\{U_\alpha\}$ tal que cualquier intersección de abiertos no vacía es difeomorfa a $\mathbb{R}^n$. Una n -variedad que tiene una cubierta buena finita se dice que es de tipo finito.*

Este tipo de cubierta permite aplicar el argumento de Mayer Vietoris de manera conveniente como veremos más adelante cuando demostremos la fórmula de Künneth. Afortunadamente existe un resultado en geometría diferencial, véase [BT82, §5], que nos asegura esto.

Teorema 2.6.2. *Toda variedad tiene una cubierta buena. Si la variedad es compacta, entonces se puede escoger una cubierta finita.*

Para entender el enunciado de la dualidad de Poincaré es necesario tener presente la siguiente definición:

Definición 2.6.3. *Sean V y W espacios vectoriales. Decimos que una transformación bilineal*

$$\langle -, - \rangle : V \times W \rightarrow \mathbb{R}$$

es no degenerada si

- $\langle v, w \rangle = 0$ para todo $w \in W$ implica $v = 0$.
- $\langle v, w \rangle = 0$ para toda $v \in V$ implica $w = 0$.

o equivalentemente, el mapeo adjunto $v \mapsto \langle v, - \rangle$ define un mapeo inyectivo $V \hookrightarrow W^$ y el mapeo adjunto $w \mapsto \langle -, w \rangle$ define una inyección $W \hookrightarrow V^*$.*

Definición 2.6.4. *Si en la definición del complejo de De Rham usamos solo k -formas suaves con soporte compacto, entonces obtenemos el complejo de De Rham con soporte compacto. La cohomología de este complejo se denota por $H_c^k(M)$.*

La dualidad de Poincaré nos dice lo siguiente, véase [BT82, §5].

Teorema 2.6.5. *(Dualidad de Poincaré). Si M es una variedad orientada de dimensión n y de tipo finito, entonces el mapeo bilineal*

$$\langle -, - \rangle : H^k(M) \times H_c^{n-k}(M) \rightarrow \mathbb{R},$$

$$([\omega], [\nu]) \mapsto \int_M \omega \wedge \nu.$$

es no degenerado.

Consideremos el siguiente lema, que nos dará una forma equivalente a la dualidad de Poincaré.

Lema 2.6.6. *Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita. El producto $\langle -, - \rangle : V \times W \rightarrow \mathbb{R}$ no degenerado implica que el mapeo $v \mapsto \langle v, - \rangle$ define un isomorfismo $V \cong W^*$.*

Demostración:

Por hipótesis los adjuntos $V \hookrightarrow W^*$ y $W \hookrightarrow V^*$ son inyectivos y por lo tanto $\dim V \leq \dim W^*$ y $\dim W \leq \dim V^*$. Además sabemos que la dimensión de un espacio vectorial de dimensión finita es igual a la dimensión de su espacio dual, por lo tanto tenemos:

$$\dim V \leq \dim W^* = \dim W \leq \dim V^* = \dim V.$$

Así $\dim V = \dim W^*$, y se sigue que $v \mapsto \langle v, - \rangle$ es un isomorfismo. □

Cabe aclarar que el lema anterior es un "si y solo si", sin embargo solo haremos uso de la implicación que se mencionó en dicho lema.

Así por el Lema 2.6.6 la dualidad de Poincaré es equivalente a que el mapeo

$$\varphi : H^k(M) \rightarrow H_c^{n-k}(M)^*, \quad [\omega] \mapsto \left([\nu] \mapsto \int_M \omega \wedge \nu \right).$$

es un isomorfismo.

Corolario 2.6.7. *Si M es una variedad orientada compacta de dimensión n , entonces $H^k(M) \cong H^{n-k}(M)$.*

Esto se debe a que si M es una variedad compacta entonces $H^k(M) = H_c^k(M)$ por lo tanto $\left(H_c^{n-k}(M) \right)^* \cong H_c^{n-k}(M) = H^{n-k}(M)$.

2.6.1. Grupos de Cohomología de $\mathbb{C}P^n$ como Álgebra Graduada

Sean $[\omega] \in H^k(M)$ y $[\tau] \in H^l(M)$. Entonces definimos el producto cuña entre grupos de cohomología como

$$[\omega] \wedge [\tau] = [\omega \wedge \tau] \in H^{k+l}(M).$$

Del Teorema 1.4.3, se sigue que esto induce un producto en cohomología que convierte a $H^*(M)$ un $\mathbb{R}$ -álgebra graduada conmutativa. Solo faltaría ver que está bien definido. Para ver que está bien definido, hay que probar dos cosas

- El producto cuña de dos formas cerradas $\omega \wedge \tau$ es una forma cerrada:
Sean $\omega \in H^k(M)$, $\tau \in H^l(M)$ dos formas cerradas, entonces

$$d(\omega \wedge \tau) = d\omega \wedge \tau + (-1)^k \omega \wedge d\tau = 0.$$

Por lo tanto, el producto cuña de dos formas cerradas es cerrada.

- La clase $[\omega \wedge \tau]$ no depende del representante de $[\tau]$ ni del representante de la clase $[\omega]$:
Sea $\tau' = \tau + d\sigma$ otro representante de la clase $[\tau]$, entonces $\omega \wedge \tau' = \omega \wedge \tau + \omega \wedge d\sigma$ y por el punto anterior $\omega \wedge \tau$ es cerrada, solo faltaría ver que $\omega \wedge d\sigma$ sea exacta. Vemos que

$$d(\omega \wedge \sigma) = d\omega \wedge \sigma + (-1)^k \omega \wedge d\sigma = (-1)^k \omega \wedge d\sigma.$$

Por lo tanto $\omega \wedge d\sigma = d((-1)^k(\omega \wedge \sigma))$ es una forma exacta. Análogamente se prueba que el producto cuña no depende del representante de $[\omega]$.

Si M es una variedad de dimensión n , tenemos:

$$H^*(M) = \bigoplus_{k=0}^n H^k(M)$$

Los elementos de $H^*(M)$ satisfacen las propiedades de anillo con la suma y la multiplicación que en este caso es el producto cuña. $H^*(M)$ es comúnmente llamado el anillo de cohomología de M .

Proposición 2.6.8. Como $\mathbb{R}$ -álgebra graduada conmutativa,

$$H^*(\mathbb{C}P^n) \cong \mathbb{R}[x_2] / (x_2^{n+1}).$$

Demostración:

La prueba será por inducción sobre n .

Caso $n = 1$. En este caso tenemos que $H^0(\mathbb{C}P^1) = \mathbb{R}$, $H^2(\mathbb{C}P^1) = \mathbb{R}$ y todos los demás grupos de cohomología son cero, por lo tanto no es difícil ver que se cumple.

Caso $n > 1$. En el cálculo de $H^k(\mathbb{C}P^n)$ vimos que la inclusión $\mathbb{C}P^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{C}P^n$ induce un isomorfismo (2.7) en la cohomología de De Rham para grados $< 2n$. Por hipótesis de inducción $H^{2k}(\mathbb{C}P^n)$ es generado por x_2^k para $k < n$, por lo tanto x_2^k son distintos de

cero. Solo falta demostrar que x_2^n es distinto de cero. De la dualidad de Poincaré existe un isomorfismo

$$\varphi : H^{2n-2}(\mathbb{C}P^n) \rightarrow H^2(\mathbb{C}P^n)^*, \quad x_2^{n-1} \mapsto \left(x_2 \mapsto \int_{\mathbb{C}P^n} x_2^{n-1} \wedge x_2 \right).$$

Y como φ es un isomorfismo $\int_{\mathbb{C}P^n} x_2^{n-1} \wedge x_2 = \int_{\mathbb{C}P^n} x_2^n$ no es cero. □

Capítulo 3

Grupos de Lie Salvajes

La vida nos puso a todos en nuestro lugar o en el lugar que a ella le convino y luego nos olvidó, como debe de ser.

Roberto Bolaño

3.1. La Fórmula de Künneth

En esta sección probaremos la fórmula de Künneth para la cohomología de De Rham, la cual establece una relación fundamental entre la cohomología de un producto de variedades con la cohomología de cada variedad. Este resultado aparece en distintos contextos dentro de la topología algebraica.

La prueba estará basada en la que se muestra en [BT82] y siguiendo los pasos que se establecen en [Kup20]. Primero demostraremos el Lema de los cinco, un resultado estándar en álgebra homológica que será de utilidad para demostrar la formula de Künneth.

Lema 3.1.1 (Lema de los cinco). *Sea*

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & \xrightarrow{f_1} & A_2 & \xrightarrow{f_2} & A_3 & \xrightarrow{f_3} & A_4 & \xrightarrow{f_4} & A_5 \\ \downarrow \psi_1 & & \downarrow \psi_2 & & \downarrow \psi_3 & & \downarrow \psi_4 & & \downarrow \psi_5 \\ B_1 & \xrightarrow{g_1} & B_2 & \xrightarrow{g_2} & B_3 & \xrightarrow{g_3} & B_4 & \xrightarrow{g_4} & B_5 \end{array}$$

un diagrama conmutativo con renglones exactos. Si ψ_1, ψ_2, ψ_4 y ψ_5 son isomorfismos, entonces ψ_3 es un isomorfismo.

Demostración:

Primero probaremos que ψ_3 es sobreyectiva. Sea $b_3 \in B_3$. Ya que ψ_4 es sobreyectiva existe $a_4 \in A_4$ tal que

$$\psi_4(a_4) = g_3(b_3). \quad (3.1)$$

Luego, ya que $g_4 \circ \psi_4 = \psi_5 \circ f_4$ debido a que el diagrama conmuta y $\ker g_4 = \operatorname{img}_3$, se sigue que

$$0 = g_4(g_3(b_3)) = g_4(\psi_4(a_4)) = \psi_5(f_4(a_4)). \quad (3.2)$$

Ya que ψ_5 es inyectiva, $\psi_5(f_4(a_4)) = 0$ implica que $f_4(a_4) = 0$ y por exactitud existe un $a_3 \in A_3$ tal que $f_3(a_3) = a_4$. Ahora notemos lo siguiente

$$\begin{aligned} g_3(b_3 - \psi_3(a_3)) &= g_3(b_3) - g_3\psi_3(a_3) \\ &= \psi_4(a_4) - \psi_4f_3(a_3) \\ &= \psi_4(a_4) - \psi_4(a_4) \\ &= 0, \end{aligned}$$

y por lo tanto existe $b_2 \in B_2$ tal que

$$g_2(b_2) = b_3 - \psi_3(a_3),$$

y ya que ψ_2 es suprayectiva existe $a_2 \in A_2$ con $\psi_2(a_2) = b_2$. Entonces

$$\begin{aligned} \psi_3(f_2(a_2) + a_3) &= \psi_3(f_2(a_2)) + \psi_3(a_3) \\ &= g_2(\psi_2(a_2)) + \psi(a_3) \\ &= g_3(b_3) + \psi_3(a_3) \\ &= b - \psi_3(a_3) + \psi_3(a_3) \\ &= b. \end{aligned}$$

Por lo tanto ψ_3 es sobreyectiva.

Ahora vamos a probar que ψ_3 es inyectiva.

Sea $a_3 \in A_3$ tal que $\psi_3(a_3) = 0$, por la conmutatividad del diagrama se sigue que

$$0 = g_3(\psi_3(a_3)) = \psi_4(f_3(a_3)),$$

y ya que ψ_4 es inyectiva $\psi_4(f_3(a_3)) = 0$ implica que $f_3(a_3) = 0$. Por exactitud existe un $a_2 \in A_2$ tal que

$$f_2(a_2) = a_3$$

y por conmutatividad

$$g_2(\psi_2(a_2)) = \psi_3(f_2(a_2)) = \psi_3(a_3) = 0.$$

Por exactitud existe un $b_1 \in B_1$ tal que

$$g_1(b_1) = \psi_2(a_2),$$

y tenemos que

$$g_1(\psi_1(a_1)) = g_1(b_1) = \psi_2(f_1(a_1)) = \psi_2(a_2).$$

Ya que ψ_2 es inyectivo $f_1(a_1) = a_2$, y por la exactitud

$$f_2(a_2) = f_2(f_1(a_1)) = 0.$$

Por lo tanto $f_2(a_2) = a_3 = 0$ y ψ_3 es inyectiva, y se sigue que ψ_3 es un isomorfismo lineal. $\square$

3.1.1. R -Módulos

Antes de definir el álgebra exterior generada por un conjunto, nos conviene adoptar el lenguaje de R -módulos, ya que las construcciones que veremos más adelante se manifiestan de manera natural en este contexto.

Definición 3.1.2. *Dado un anillo R , un R -módulo izquierdo (derecho) consta de un grupo abeliano $(A, +)$ junto con una operación*

$$\begin{array}{l} R \times A \rightarrow A \\ (r, x) \mapsto r \cdot x \end{array} \quad \left(\begin{array}{l} A \times R \rightarrow A \\ (x, r) \mapsto x \cdot r \end{array} \right)$$

tal que para todo $r, s \in R$ y $x, y \in A$ se cumple que:

- $r \cdot (x + y) = r \cdot x + r \cdot y.$ $((x + y) \cdot r = x \cdot r + y \cdot r.)$
- $(r + s) \cdot x = r \cdot x + s \cdot x.$ $(x \cdot (r + s) = x \cdot r + x \cdot s.)$
- $(rs) \cdot x = r \cdot (s \cdot x).$ $((x \cdot r) \cdot s = x \cdot (rs).)$
- Si R tiene unidad 1 , entonces $1 \cdot x = x.$ $(x \cdot 1 = x.)$

Nota 3.1.3. *Para R un campo, todo R -módulo es, en particular, un espacio vectorial.*

Definición 3.1.4. *Sean A y B dos R -módulos izquierdos (derechos). Un homomorfismo de R -módulos de A a B es un mapeo $f : A \rightarrow B$ tal que:*

- $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para $x, y \in A$.
- $f(r \cdot x) = r \cdot f(x)$ ($f(x \cdot r) = f(x) \cdot r$) para $r \in R, x \in A$.

Definición 3.1.5. *Sea R un anillo y X un conjunto. El R -módulo libre izquierdo generado por X , denotado por $R^{(X)}$, se define como el conjunto de todas las funciones*

$$f : X \longrightarrow R$$

que son casi nulas, es decir, aquellas tales que $\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$ es finito.

La suma y el producto por escalares se definen punto a punto:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x),$$

para $f, g \in R^{(X)}$, $\lambda \in R$, $x \in X$. Para cada $x \in X$, se denota por $\delta_x \in R^{(X)}$ la función

$$\delta_x(y) = \begin{cases} 1, & y = x, \\ 0, & y \neq x, \end{cases}$$

y entonces $\{\delta_x : x \in X\}$ forma una base de $R^{(X)}$. Así, cada $f \in R^{(X)}$ puede escribirse de manera única como una combinación lineal finita

$$f = \sum_{x \in X} f(x) \delta_x.$$

Definición 3.1.6. Sea R un anillo y G un grupo abeliano. Supongamos que A es un R -módulo derecho y B un R -módulo izquierdo. Un mapeo R -balanceado de $A \times B$ a G es un mapeo $\varphi : A \times B \rightarrow G$ que satisface, para todo $x, x' \in A, y, y' \in B$ y $r \in R$:

1. $\varphi(x, y + y') = \varphi(x, y) + \varphi(x, y')$.
2. $\varphi(x + x', y) = \varphi(x, y) + \varphi(x', y)$.
3. $\varphi(xr, y) = \varphi(x, ry)$.

Consideremos el grupo abeliano libre F generado por el conjunto $A \times B$. Sea $H \subset F$ el subgrupo generado por los elementos de las siguientes formas:

$$\begin{aligned} (x + x', y) - (x, y) - (x', y), \\ (x, y + y') - (x, y) - (x, y'), \\ (xr, b) - (x, ry), \end{aligned}$$

para todo $x, x' \in A, b, b' \in B, r \in R$. Considere ahora la composición $\varphi = \pi \circ i : A \times B \rightarrow F/H$, donde $\pi : F \rightarrow F/H$ es la proyección canónica y donde $i : A \times B \rightarrow F$ es el monomorfismo natural.

$$\begin{array}{ccc} A \times B & \xrightarrow{\varphi} & F/H \\ \downarrow i & \nearrow \pi & \\ F & & \end{array}$$

φ es un mapeo R -balanceado y escribimos $\varphi(x, y) = x \otimes y$ y al grupo abeliano F/H lo denotamos como $A \otimes_R B$. Se satisface para todo $x, x' \in A, y, y' \in B, r \in R$:

$$\begin{aligned} (x + x') \otimes y &= x \otimes y + x' \otimes y, \\ x \otimes (y + y') &= x \otimes y + x \otimes y', \\ (xr) \otimes y &= x \otimes (ry). \end{aligned}$$

Definición 3.1.7. El grupo abeliano $A \otimes_R B$, tal como lo construimos anteriormente, es el producto tensorial de módulos de A y B sobre R .

El producto tensorial de R -módulos tiene la siguiente propiedad universal: para cualquier grupo abeliano G y cualquier mapeo R -balanceado $f : A \times B \rightarrow G$ existe un único morfismo de grupos abelianos $g : A \otimes_R B \rightarrow G$ tal que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} A \times B & \xrightarrow{\varphi} & A \otimes_R B \\ \downarrow f & \nearrow g & \\ G & & \end{array}$$

Se puede ver una demostración detallada de esta propiedad universal en [Bou74, §3.1].

Sea R un anillo conmutativo y sean A y B dos R -módulos. Entonces el producto tensorial $A \otimes_R B$ admite de manera natural una estructura de R -módulo, dada por

$$r \cdot (x \otimes y) := (rx) \otimes y, \quad r \in R, x \in A, y \in B.$$

Véase [Bou74, §3.5]. De ahora en adelante, cuando hablemos de R -módulos, vamos a suponer que R es un anillo conmutativo. En particular, si V y W son $\mathbb{F}$ -espacios vectoriales, el producto tensorial $V \otimes_{\mathbb{F}} W$ es un $\mathbb{F}$ -espacio vectorial. Al producto tensorial de dos espacios vectoriales los denotaremos por $V \otimes W$. Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita. Vamos a probar que a partir de una base de V y una base de W , se puede construir una base del producto tensorial $V \otimes W$.

Teorema 3.1.8. *Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita, $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V y $\{w_1, \dots, w_m\}$ una base de W . Entonces*

$$\{v_i \otimes w_j : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\},$$

es una base de $V \otimes W$.

Demostración:

Sea $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base para V y $\{w_1, \dots, w_m\}$ una base para W . Vamos a probar que el conjunto

$$\{v_i \otimes w_j : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}, \quad (3.3)$$

genera $V \otimes W$ y es linealmente independiente. Sea $v \otimes w \in V \otimes W$, por hipótesis

$$v = \sum_{i=1}^n a_i v_i, \quad w = \sum_{j=1}^m b_j w_j.$$

Luego,

$$\begin{aligned} v \otimes w &= \left(\sum_{i=1}^n a_i v_i \right) \otimes \left(\sum_{j=1}^m b_j w_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j (v_i \otimes w_j). \end{aligned}$$

Por lo tanto $v \otimes w \in \text{span}\{v_i \otimes w_j : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$. Ya que todo elemento de $V \otimes W$ es combinación lineal finita de elementos de la forma $v \otimes w$ con $v \in V, w \in W$, se concluye que

$$V \otimes W = \text{span}\{v_i \otimes w_j : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}.$$

Ahora vamos a probar que son linealmente independientes. Sea una combinación lineal, de los elementos del conjunto (3.3), igual a cero, es decir,

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{i,j} (v_i \otimes w_j) = 0. \quad (3.4)$$

Se sabe, de álgebra lineal, que existen bases de los espacios duales, $\{\phi_1, \dots, \phi_n\} \subset V^*$ y $\{\psi_1, \dots, \psi_m\} \subset W^*$ tales que

$$\phi_k(v_i) = \delta_i^k, \quad \psi_l(w_j) = \delta_j^l.$$

para $(k, l) \in \{(i, j) : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$. Para k, l fijos, definamos el mapeo

$$f_{k,l} : V \times W \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_{k,l}(v, w) = \phi_k(v) \psi_l(w),$$

que es bilineal y por tanto $\mathbb{R}$ -balanceado. Por la propiedad universal del producto tensorial existe $g_{k,l} : V \otimes W \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$g_{k,l}(v \otimes w) = \phi_k(v) \psi_l(w).$$

Aplicando el funcional lineal $g_{i,j}$ a ambos lados de la igualdad (3.4), obtenemos

$$g_{k,l} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{i,j} (v_i \otimes w_j) \right) = c_{k,l} = 0.$$

Esto se cumple para todo par k, l . Por lo tanto el conjunto (3.3) es linealmente independiente. $\square$

Corolario 3.1.9. Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita. Entonces

$$\dim(V \otimes W) = \dim(V) \dim(W).$$

Además, el producto tensorial distribuye la suma directa. Veamos el caso para espacios vectoriales.

Teorema 3.1.10. Sean $B_1, \dots, B_n$ y A espacios vectoriales de dimensión finita. Entonces existe un isomorfismo lineal

$$\left(\bigoplus_{i=1}^n B_i \right) \otimes A \cong \bigoplus_{i=1}^n (B_i \otimes A).$$

Demostración:

Definimos primero la aplicación bilineal

$$f : \left(\bigoplus_{i=1}^n B_i \right) \times A \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^n (B_i \otimes A),$$

dada por

$$f((b_1, \dots, b_n), a) = (b_1 \otimes a, b_2 \otimes a, \dots, b_n \otimes a).$$

Por la propiedad universal del producto tensorial, existe un único mapeo lineal

$$\Phi : \left(\bigoplus_{i=1}^n B_i \right) \otimes A \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n (B_i \otimes A)$$

tal que

$$\Phi((b_1, \dots, b_n) \otimes a) = (b_1 \otimes a, b_2 \otimes a, \dots, b_n \otimes a). \quad (3.5)$$

Ahora definimos el mapeo

$$\Psi : \bigoplus_{i=1}^n (B_i \otimes A) \rightarrow \left(\bigoplus_{i=1}^n B_i \right) \otimes A,$$

dada por

$$\Psi(b_1 \otimes a_1, b_2 \otimes a_2, \dots, b_n \otimes a_n) = (b_1, 0, \dots, 0) \otimes a_1 + (0, b_2, \dots, 0) \otimes a_2 + \dots + (0, 0, \dots, b_n) \otimes a_n.$$

Esta definición se extiende linealmente. Veamos que Φ y Ψ son inversas entre sí. Por un lado tenemos

$$\begin{aligned} (\Psi \circ \Phi)((b_1, \dots, b_n) \otimes a) &= \Psi(b_1 \otimes a, \dots, b_n \otimes a) \\ &= (b_1, \dots, 0) \otimes a + \dots + (0, \dots, b_n) \otimes a \\ &= (b_1, \dots, b_n) \otimes a. \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} (\Phi \circ \Psi)(b_1 \otimes a_1, \dots, b_n \otimes a_n) &= \Phi((b_1, \dots, 0) \otimes a_1 + \dots + (0, \dots, b_n) \otimes a_n) \\ &= (b_1 \otimes a_1, 0, \dots, 0) + \dots + (0, 0, \dots, b_n \otimes a_n) \\ &= (b_1 \otimes a_1, \dots, b_n \otimes a_n). \end{aligned}$$

Por lo tanto, Φ es un isomorfismo lineal, con inversa Ψ . □

Lema 3.1.11. *Sea A un $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de dimensión finita. Entonces existe un isomorfismo lineal*

$$\mathbb{R} \otimes A \cong A.$$

Demostración:

Consideremos la aplicación bilineal

$$f : \mathbb{R} \times A \longrightarrow A, \quad f(r, a) = ra.$$

Por la propiedad universal del producto tensorial, existe un único mapeo lineal

$$\varphi : \mathbb{R} \otimes A \longrightarrow A$$

tal que

$$\varphi(r \otimes a) = ra. \quad (3.6)$$

Definimos ahora el mapeo lineal

$$\psi : A \longrightarrow \mathbb{R} \otimes A, \quad \psi(a) = 1 \otimes a.$$

Veamos que ϕ y ψ son inversas entre sí. Por un lado tenemos que

$$\begin{aligned} (\psi \circ \phi)(r \otimes a) &= \psi(ra) \\ &= 1 \otimes (ra) \\ &= r \otimes a. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} (\phi \circ \psi)(a) &= \phi(1 \otimes a) \\ &= 1 \cdot a \\ &= a. \end{aligned}$$

Por lo tanto, ϕ es un isomorfismo lineal, con inversa ψ . □

3.1.2. Producto Tensorial de Cocadenas

Sea R un anillo conmutativo. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos complejos de cocadenas de R -módulos, es decir, $\{C^q\}_{q \in \mathbb{Z}}$ y $\{D^l\}_{l \in \mathbb{Z}}$ son familias de R -módulos y las diferenciales

$$d_C^q : C^q \rightarrow C^{q+1}, \quad d_D^l : D^l \rightarrow D^{l+1},$$

son morfismos de R -módulos con $d_C^{q+1} \circ d_C^q = 0$ y $d_D^{l+1} \circ d_D^l = 0$. Definimos el complejo $\mathcal{C} \otimes \mathcal{D}$ como

$$(\mathcal{C} \otimes \mathcal{D})^k := \bigoplus_{q+l=k} C^q \otimes_R D^l.$$

La diferencial $d_{\otimes}^k : (\mathcal{C} \otimes_R \mathcal{D})^k \rightarrow (\mathcal{C} \otimes_R \mathcal{D})^{k+1}$ está generada por

$$d_{\otimes}^k(x \otimes y) = d_C^q(x) \otimes y + (-1)^q x \otimes d_D^l(y),$$

para $x \in C^q, y \in D^l$ tal que $q + l = k$. Veamos que en efecto es una diferencial,

$$\begin{aligned} d_{\otimes}^{k+1}(d_{\otimes}^k(x \otimes y)) &= d_{\otimes}^{k+1}(d_C^q(x) \otimes y + (-1)^q x \otimes d_D^l(y)) \\ &= d_{\otimes}^{k+1}(d_C^q(x) \otimes y) + (-1)^q d_{\otimes}^{k+1}(x \otimes d_D^l(y)). \end{aligned}$$

Y como

$$\begin{aligned} d_{\otimes}^{k+1}(d_C^q(x) \otimes y) &= d_C^{q+1}(d_C^q(x)) \otimes y + (-1)^{q+1} d_C^q(x) \otimes d_D^l(y) \\ &= (-1)^{q+1} d_C^q(x) \otimes d_D^l(y), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} d_{\otimes}^{k+1}(x \otimes d_D^l(y)) &= d_C^q(x) \otimes d_D^{l+1}(y) + (-1)^q x \otimes d_D^{l+1}(d_D^l(y)) \\ &= d_C^q(x) \otimes d_D^l(y). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
d_{\otimes}^{k+1} \left(d_{\otimes}^k (x \otimes y) \right) &= (-1)^{q+1} d_C^q (x) \otimes d_D^l (y) + (-1)^q d_C^q (x) \otimes d_D^l (y) \\
&= \left((-1)^{q+1} + (-1)^q \right) \left(d_C^q (x) \otimes d_D^l (y) \right) \\
&= \left(-(-1)^q + (-1)^q \right) \left(d_C^q (x) \otimes d_D^l (y) \right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Proposición 3.1.12. *El mapeo*

$$\varphi : H^* (\mathcal{C}) \otimes H^* (\mathcal{D}) \rightarrow H^* (\mathcal{C} \otimes \mathcal{D}), \quad [x] \otimes [y] \mapsto [x \otimes y],$$

está bien definido.

Demostración:

Sean $[x] \in H^* (\mathcal{C})$ y $[y] \in H^* (\mathcal{D})$. Primero veamos que $x \otimes y$ es un cociclo en $\mathcal{C} \otimes \mathcal{D}$:

$$\begin{aligned}
d_{\otimes}^k (x \otimes y) &= d_C^q (x) \otimes y + (-1)^q x \otimes d_D^l (y) \\
&= 0 \otimes y + (-1)^q x \otimes 0 \quad \text{ya que } x, y \text{ son cociclos} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

y por lo tanto $x \otimes y$ es un cociclo en $\mathcal{C} \otimes \mathcal{D}$. Ahora vamos a probar que $[x \otimes y]$ no depende de los representantes. Sean

$$\begin{aligned}
x' &= x + d_C^{q-1} (a), \quad a \in C^{q-1}, \\
y' &= y + d_D^{l-1} (b), \quad b \in D^{l-1},
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
x' \otimes y' &= \left(x + d_C^{q-1} (a) \right) \otimes \left(y + d_D^{l-1} (b) \right) \\
&= x \otimes y + x \otimes d_D^{l-1} (b) + d_C^{q-1} (a) \otimes y + d_C^{q-1} (a) \otimes d_D^{l-1} (b). \tag{3.7}
\end{aligned}$$

Si probamos que (3.7) es la suma de $x \otimes y$ con cobordes, tendríamos que $[x' \otimes y'] = [x \otimes y]$, que es lo que probaremos a continuación. Primero veamos que

$$\begin{aligned}
d_{\otimes}^{k-1} (x \otimes b) &= d_C^q (x) \otimes b + (-1)^q x \otimes d_D^{l-1} (b) \\
&= (-1)^q x \otimes d_D^{l-1} (b),
\end{aligned}$$

ya que x es cociclo. Luego,

$$\begin{aligned}
d_{\otimes}^{k-1} (a \otimes y) &= d_C^{q-1} (a) \otimes y + (-1)^{q-1} a \otimes d_D^l (y) \\
&= d_C^{q-1} (a) \otimes y,
\end{aligned}$$

ya que y es cociclo. Por último,

$$\begin{aligned} d_{\otimes}^{k-1} (a \otimes d_D^{l-1} (b)) &= d_C^{q-1} (a) \otimes d_D^{l-1} (b) + (-1)^{q-1} a \otimes d_D^{l+1} (d_D^l (y)) \\ &= d_C^{q-1} (a) \otimes d_D^{l-1} (b), \end{aligned}$$

5 ya que d es una diferencial. Por lo tanto $x \otimes d_D^{l-1} (b)$, $d_C^{q-1} (a) \otimes y$ y $d_C^{q-1} (a) \otimes d_D^{l-1} (b)$ son cobordes, que es lo que queríamos demostrar. $\square$

Sean M, N variedades suaves y de ahora en adelante también vamos a suponer que son compactas, y sean

$$\begin{aligned} \pi_1 : M \times N &\rightarrow M, & (m, n) &\mapsto m, \\ \pi_2 : M \times N &\rightarrow N, & (m, n) &\mapsto n, \end{aligned}$$

las proyecciones. Entonces si $\omega \in \Omega^k(M)$ y $\tau \in \Omega^l(N)$, se tiene que $\pi_1^* \omega \wedge \pi_2^* \tau \in \Omega^{k+l}(M \times N)$.

$$\begin{array}{ccc} \Omega^*(M \times N) & \xleftarrow{\pi_2^*} & \Omega^*(N) \\ \uparrow \pi_1^* & & \\ \Omega^*(M) & & \end{array}$$

Proposición 3.1.13. *El mapeo*

$$\psi : \Omega^*(M) \otimes \Omega^*(N) \rightarrow \Omega^*(M \times N), \quad \omega \otimes \tau \mapsto \pi_1^* \omega \wedge \pi_2^* \tau,$$

es un mapeo de cocadenas.

Demostración:

Hay que probar que el siguiente diagrama conmuta,

$$\begin{array}{ccccc} \dots & \xrightarrow{d_{\otimes}^{k-1}} & \bigoplus_{q+l=k} \Omega^q(M) \otimes \Omega^l(N) & \xrightarrow{d_{\otimes}^k} & \bigoplus_{q+l=k+1} \Omega^q(M) \otimes \Omega^l(N) & \xrightarrow{d_{\otimes}^{k+1}} \dots \\ & & \downarrow \psi_k & & \downarrow \psi_{k+1} & \\ \dots & \xrightarrow{d} & \Omega^k(M \times N) & \xrightarrow{d} & \Omega^{k+1}(M \times N) & \xrightarrow{d} \dots \end{array} \quad (3.8)$$

es decir $\psi_{k+1} (d_{\otimes}^k (\omega \otimes \tau)) = d(\psi_k (\omega \otimes \tau))$. Por un lado tenemos

$$\begin{aligned} d(\psi_k (\omega \otimes \tau)) &= d(\pi_1^* \omega \wedge \pi_2^* \tau) \\ &= d\pi_1^* \omega \wedge \pi_2^* \tau + (-1)^q \pi_1^* \omega \wedge d\pi_2^* \tau, \end{aligned} \quad (3.9)$$

y por otro lado

$$\begin{aligned} \psi_{k+1} (d_{\otimes}^k (\omega \otimes \tau)) &= \psi_{k+1} (d\omega \otimes \tau + (-1)^q \omega \otimes d\tau) \\ &= \pi_1^* d\omega \wedge \pi_2^* \tau + (-1)^q \pi_1^* \omega \wedge \pi_2^* d\tau \\ &= d\pi_1^* \omega \wedge \pi_2^* \tau + (-1)^q \pi_1^* \omega \wedge d\pi_2^* \tau. \end{aligned} \quad (3.10)$$

De (3.9) y (3.10) se obtiene que el diagrama (3.8) conmuta. $\square$

Denotemos por $H^*(\Omega^*(M) \otimes \Omega^*(N))$ la cohomología del complejo de cocadenas obtenido al tomar el producto tensorial de los complejos de De Rham de M y N . Por la Proposición 3.1.13, ψ induce un mapeo en cohomología $\psi^\# : H^*(\Omega^*(M) \otimes \Omega^*(N)) \rightarrow H^*(M \times N)$. Por su parte, la Proposición 3.1.12 nos dice que el mapeo $\varphi : H^*(M) \otimes H^*(N) \rightarrow H^*(\Omega^*(M) \otimes \Omega^*(N))$ está bien definido. De ambas proposiciones tenemos que

$$K : H^*(M) \otimes H^*(N) \rightarrow H^*(M \times N), \quad [\omega] \otimes [\tau] \mapsto [\pi_1^* \omega \wedge \pi_2^* \tau],$$

está bien definido. A K se le conoce como el mapeo de Künneth.

A continuación, vamos a probar que si A, B, C y D son espacios vectoriales de dimensión finita y

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

es exacta, entonces

$$D \otimes A \xrightarrow{\text{Id}_D \otimes f} D \otimes B \xrightarrow{\text{Id}_D \otimes g} D \otimes C \longrightarrow 0$$

es exacta, donde

$$(\text{Id}_D \otimes f)(x \otimes y) = (x \otimes f(y)), \quad (\text{Id}_D \otimes g)(x \otimes y) = (x \otimes g(y)).$$

Esta propiedad de preservar la exactitud tiene un nombre: es exacta por la derecha. En realidad este resultado es más general, si A, B, C y D son R -módulos entonces el funtor tensor es exacto por la derecha tal como se prueba en [Hun80, Cap. IV, §5]. Sin embargo, para nuestros propósitos basta con considerar el caso en que todos son espacios vectoriales de dimensión finita.

Teorema 3.1.14. *Sean A, B, C y D espacios vectoriales de dimensión finita y*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta corta. Entonces

$$0 \longrightarrow D \otimes A \xrightarrow{\text{Id}_D \otimes f} D \otimes B \xrightarrow{\text{Id}_D \otimes g} D \otimes C \longrightarrow 0$$

es exacta.

Demostración:

La prueba se dividirá en tres partes

1. Veamos que es exacta en $D \otimes C$.

Por hipótesis g es sobreyectiva, entonces cada generador $d \otimes c$ de $D \otimes C$ es de la forma $d \otimes g(b)$ para algún $b \in B$, tal que

$$d \otimes g(b) = (\text{Id}_D \otimes g)(d \otimes b).$$

Por lo tanto $\text{im}(\text{Id}_D \otimes g)$ contiene a todos los generadores de $D \otimes C$, lo que implica que

$$\text{im}(\text{Id}_D \otimes g) = D \otimes C.$$

2. Veamos que es exacta en $D \otimes A$.

Para ello vamos a probar que $\text{Id}_D \otimes f$ es inyectivo. Como D es un espacio vectorial de dimensión finita, digamos de dimensión n , existe un isomorfismo, para una base fija $\{d_1, \dots, d_n\}$ de D ,

$$F : D \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{R}, \quad a_1 d_1 + \dots + a_n d_n \mapsto (a_1, \dots, a_n).$$

Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} D \otimes A & \xrightarrow{\text{Id}_D \otimes f} & D \otimes B \\ \downarrow F \otimes \text{Id}_A & & \downarrow F \otimes \text{Id}_B \\ (\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{R}) \otimes A & \longrightarrow & (\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{R}) \otimes B \\ \downarrow \Phi_1 & & \downarrow \Phi_2 \\ \bigoplus_{i=1}^n (\mathbb{R} \otimes A) & \longrightarrow & \bigoplus_{i=1}^n (\mathbb{R} \otimes B) \\ \downarrow \varphi_1 \oplus \dots \oplus \varphi_1 & & \downarrow \varphi_2 \oplus \dots \oplus \varphi_2 \\ \bigoplus_{i=1}^n A & \xrightarrow{h} & \bigoplus_{i=1}^n B \end{array}$$

El mapeo Φ_1 (resp. Φ_2) está definido como (3.5) y φ_1 (resp. φ_2) está definido como (3.6). $\varphi_1 \oplus \dots \oplus \varphi_1$ (resp. $\varphi_2 \oplus \dots \oplus \varphi_2$) denota el mapeo definido componente a componente por φ_1 (resp. φ_2). Definimos el mapeo h de manera que el diagrama conmute. Explícitamente, la forma de h puede obtenerse siguiendo las flechas el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccc} d_1 \otimes a_1 + \dots + d_n \otimes a_n & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & d_1 \otimes f(a_1) + \dots + d_n \otimes f(a_n) \\ \uparrow & & \downarrow \\ (1, \dots, 0) \otimes a_1 + \dots + (0, \dots, 1) \otimes a_n & & (1, \dots, 0) \otimes f(a_1) + \dots + (0, \dots, 1) \otimes f(a_n) \\ \uparrow & & \downarrow \\ (1 \otimes a_1, \dots, 1 \otimes a_n) & & (1 \otimes f(a_1), \dots, 1 \otimes f(a_n)) \\ \uparrow & & \downarrow \\ (a_1, \dots, a_n) & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & (f(a_1), \dots, f(a_n)) \end{array}$$

Entonces se tiene que

$$h = f \oplus \dots \oplus f,$$

es decir, h actúa componente a componente aplicando f en cada entrada. Por hipótesis, f es inyectiva. Como la suma directa de aplicaciones inyectivas es nuevamente inyectiva, se concluye que $f \oplus \dots \oplus f$ es inyectiva. Dado que el diagrama conmuta y las flechas verticales son isomorfismo, el mapeo $\text{Id}_D \otimes f$ puede escribirse como composición de isomorfismos con el mapeo h . Como la composición de mapeos inyectivos es inyectivo, se sigue que $\text{Id}_D \otimes f$ es inyectivo.

3. Veamos que es exacta en $D \otimes B$.

Notemos que

$$\begin{aligned}\dim(\ker(\text{Id}_D \otimes g)) &= \dim(D \otimes B) - \dim(\text{im}(\text{Id}_D \otimes g)) \\ &= \dim(D \otimes B) - \dim(D \otimes \text{im}(g)),\end{aligned}$$

ya que del paso 1 tenemos que $\text{im}(\text{Id}_D \otimes g) = D \otimes C = D \otimes \text{im}(g)$. Luego

$$\begin{aligned}\dim(\ker(\text{Id}_D \otimes g)) &= \dim(D)(\dim(B) - \dim(\text{im}(g))) \\ &= \dim(D) \dim(\ker(g)) \\ &= \dim(D) \dim(\text{im}(f)),\end{aligned}$$

la última igualdad se debe a la exactitud en B . Luego

$$\begin{aligned}\dim(\text{im}(\text{Id}_D \otimes f)) &= \dim(D \otimes A) - \dim(\ker(\text{Id}_D \otimes f)) \\ &= \dim(D) \dim(A) \\ &= \dim(D) \dim(\text{im}(f)),\end{aligned}$$

ya que por el inciso 2, $\dim(\ker(\text{Id}_D \otimes f)) = 0$ y por hipótesis $\dim(\ker(f)) = 0$. Así

$$\dim(\text{im}(\text{Id}_D \otimes f)) = \dim(\ker(\text{Id}_D \otimes g)).$$

Ya que ambos son de la misma dimensión, solo faltaría probar que uno de los subespacios está contenido en el otro para poder concluir que son iguales. Vamos a probar que $\text{im}(\text{Id}_D \otimes f) \subset \ker(\text{Id}_D \otimes g)$. Sea $(d, b) \in \text{im}(\text{Id}_D \otimes f)$, entonces existe un $(d, a) \in D \otimes A$ tal que $(\text{Id}_D \otimes f)(d, a) = (d, b)$. Luego

$$\begin{aligned}(\text{Id}_D \otimes g)(d, b) &= (\text{Id}_D \otimes g)((\text{Id}_D \otimes f)(d, a)) \\ &= (\text{Id}_D \otimes g)(d \otimes f(a)) \\ &= d \otimes 0 = 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto, se concluye que

$$\ker(\text{Id}_D \otimes g) = \text{im}(\text{Id}_D \otimes f).$$

□

Este resultado es más fuerte de lo que podría parecer a primera vista, pues preservar la exactitud de sucesiones exactas cortas implica preservar la exactitud de sucesiones exactas largas. En efecto, toda sucesión exacta larga

$$\dots \longrightarrow A^{k-1} \xrightarrow{d^{k-1}} A^k \xrightarrow{d^k} A^{k+1} \longrightarrow \dots \quad (3.11)$$

puede descomponerse en una familia de sucesiones exactas cortas

$$0 \longrightarrow \text{im}(d^{k-1}) \xrightarrow{i} A^k \xrightarrow{d^k} \text{im}(d^k) \longrightarrow 0, \quad (3.12)$$

una para cada índice k , donde i es el mapeo inclusión. En el sentido de que para cada k , la sucesión (3.11) es exacta larga si y solo si la sucesión (3.12) es exacta corta. Veamos esto. Supongamos primero que (3.11) es una sucesión exacta larga. Entonces, para todo k , el mapeo $i : \text{im}(d^{k-1}) \hookrightarrow A^k$ es inyectivo y el mapeo $d^k : A^k \rightarrow \text{im}(d^k)$ es sobreyectivo. Por la exactitud de (3.11) en A^k se tiene

$$\text{im}(i) = \text{im}(d^{k-1}) = \ker(d^k),$$

Por lo tanto la sucesión (3.12) es exacta corta. Recíprocamente, si para todo k la sucesión (3.12) es exacta corta, entonces

$$\text{im}(i) = \text{im}(d^{k-1}) = \ker(d^k),$$

para cada k , lo cual implica que la sucesión (3.11) es exacta en cada término. Por tanto, (3.11) es una sucesión exacta larga. Junto con el Teorema 3.1.14 y observando que el mapeo

$$\text{Id}_D \otimes i : D \otimes \text{im}(d^{k-1}) \longrightarrow D \otimes A^k,$$

es la inclusión natural de $D \otimes \text{im}(d^{k-1})$ en $D \otimes A^k$, se concluye que el producto tensorial preserva la exactitud de sucesiones exactas largas en la categoría de espacios vectoriales de dimensión finita.

Sea $\{U, V\}$ una cubierta de N . Por Mayer Vietoris, la sucesión

$$\dots \xrightarrow{\delta} H^q(U \cup V) \xrightarrow{i^\#} H^q(U) \oplus H^q(V) \xrightarrow{j^\#} H^q(U \cap V) \xrightarrow{\delta} \dots$$

es exacta y ya que $H^{l-q}(M) \otimes (-)$ preserva la exactitud si M es compacta, obtenemos que

$$\begin{array}{c} \dots \xrightarrow{\delta_\otimes^{l-q}} H^{l-q}(M) \otimes H^q(U \cup V) \xrightarrow{i_\otimes^{l-q}} H^{l-q}(M) \otimes H^q(U) \oplus H^{l-q}(M) \otimes H^q(V) \\ \left. \vphantom{\dots \xrightarrow{\delta_\otimes^{l-q}}} \right\} j_\otimes^{l-q} \\ \xrightarrow{\hspace{10cm} \delta_\otimes^{l-q} \hspace{10cm}} \dots \end{array}$$

es exacta, donde $\delta_\otimes^{l-q} = \text{Id}_{H^{l-q}(M)} \otimes \delta$, $i_\otimes^{l-q} = \text{Id}_{H^{l-q}(M)} \otimes i^\#$ y $j_\otimes^{l-q} = \text{Id}_{H^{l-q}(M)} \otimes j^\#$. Sumando sobre todos los enteros $q > 0$ obtenemos que

$$\begin{array}{c} \dots \xrightarrow{\widehat{\delta}} \bigoplus_{q=0}^l H^{l-q}(M) \otimes H^q(U \cup V) \xrightarrow{\widehat{i}} \left. \begin{array}{c} \bigoplus_{q=0}^l H^{l-q}(M) \otimes H^q(U) \\ \oplus \bigoplus_{q=0}^l H^{l-q}(M) \otimes H^q(V) \end{array} \right\} \widehat{j} \\ \left. \vphantom{\dots \xrightarrow{\widehat{\delta}}} \right\} \widehat{j} \\ \xrightarrow{\hspace{10cm} \widehat{\delta} \hspace{10cm}} \bigoplus_{q=0}^l H^{l-q}(M) \otimes H^q(U \cap V) \xrightarrow{\hspace{10cm} \widehat{\delta} \hspace{10cm}} \dots \end{array}$$

es una sucesión exacta larga, donde la l -ésima componente de $\hat{\delta}$, $\hat{i}$ y $\hat{j}$ están determinadas por $\delta_{\otimes}^l$, $i_{\otimes}^l$ y $j_{\otimes}^l$ respectivamente. De lo anterior, podemos construir un mapeo de sucesiones exactas largas usando K .

Proposición 3.1.15. *El diagrama*

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \xrightarrow{\hat{\delta}} & \bigoplus_{q+l=k} H^q(M) \otimes H^l(U \cup V) & \xrightarrow{\hat{i}} & \bigoplus_{q+l=k} H^q(M) \otimes H^l(U) \\
 & & \downarrow K & & \downarrow K \\
 \dots & \xrightarrow{\delta} & H^k(M \times (U \cup V)) & \xrightarrow{i^{\#}} & H^k(M \times U) \oplus H^k(M \times V) & \xrightarrow{\hat{j}} & \dots
 \end{array}$$

(3.13)

conmuta.

Demostración:

Sea $[\omega] \otimes [\tau] \in H^k(M) \otimes H^q(U \cup V)$. Entonces

$$\begin{aligned}
 K(\hat{i}([\omega] \otimes [\tau])) &= \psi^{\#}([\omega] \otimes [i^*(\tau)]) \\
 &= K([\omega] \otimes [\tau|_U], [\omega] \otimes [\tau|_V]) \\
 &= ([\pi_1^* \omega \wedge \pi_2^*(\tau|_U)], [\pi_1^* \omega \wedge \pi_2^*(\tau|_V)]),
 \end{aligned}$$

y por otro lado tenemos

$$\begin{aligned}
 i^{\#}(K([\omega] \otimes [\tau])) &= i^{\#}([\pi_1^* \omega \wedge \pi_2^* \tau]) \\
 &= ((\pi_1^* \omega \wedge \pi_2^* \tau)|_{M \times U}, (\pi_1^* \omega \wedge \pi_2^* \tau)|_{M \times V}) \\
 &= ([\omega|_M \wedge \tau|_U], [\omega|_M \wedge \tau|_V]) \\
 &= ([\pi_1^* \omega \wedge \pi_2^*(\tau|_U)], [\pi_1^* \omega \wedge \pi_2^*(\tau|_V)]).
 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$K \circ \hat{i} = i^{\#} \otimes K.$$

Ahora, sea $([\omega] \otimes [\tau], [\omega] \otimes [\theta]) \in H^q(M) \otimes H^l(U) \oplus H^q(M) \otimes H^l(V)$, por un lado tenemos

$$\begin{aligned}
 K(\hat{j}([\omega] \otimes [\tau], [\omega] \otimes [\theta])) &= K([\omega] \otimes (\theta|_{U \cap V} - \tau|_{U \cap V})) \\
 &= [\pi_1^* \omega \wedge \pi_2^*(\theta|_{U \cap V} - \tau|_{U \cap V})] \\
 &= [\omega|_M \wedge (\theta|_{U \cap V} - \tau|_{U \cap V})],
 \end{aligned}$$

y por otro lado

$$\begin{aligned}
j^\# (K([\omega] \otimes [\tau], [\omega] \otimes [\theta])) &= j^\# ([\pi_1^* \omega \wedge \pi_2^* \tau], [\pi_1^* \omega \wedge \pi_2^* \theta]) \\
&= [(\pi_1^* \omega \wedge \pi_2^* \theta)|_{M \times (U \cup V)} - (\pi_1^* \omega \wedge \pi_2^* \tau)|_{M \times (U \cup V)}] \\
&= [\omega|_M \wedge \theta|_{U \cap V} - \omega|_M \wedge \tau|_{U \cap V}] \\
&= [\omega|_M \wedge (\theta|_{U \cap V} - \tau|_{U \cap V})].
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$K \circ \hat{j} = j^\# \circ K.$$

Por último, sea $[\omega] \otimes [\tau] \in H^q(M) \otimes H^l(U \cup V)$, entonces por un lado tenemos

$$\begin{aligned}
K(\hat{\delta}([\omega] \otimes [\tau])) &= K([\omega] \otimes \delta[\tau]) \\
&= [\pi_1^* \omega \wedge \pi_2^* \delta[\tau]]
\end{aligned}$$

y por otro lado

$$\delta(K([\omega] \otimes [\tau])) = \delta[\pi_1^* \omega \wedge \pi_2^* \tau].$$

Si $\{\rho_U, \rho_V\}$ es una partición de la unidad subordinada a $\{U, V\}$ entonces $\{\pi_1^* \rho_U, \pi_2^* \rho_V\}$ forma una partición de la unidad en $(U \cup V) \times N$ subordinada a la cubierta $\{U \times N, V \times N\}$. Ya que el homomorfismo de conexión esta dado como en (2.6), tenemos

$$\delta[\pi_1^* \omega \wedge \pi_2^* \tau] = \begin{cases} [-d(\pi_1^* \rho_V (\pi_1^* \omega \wedge \pi_2^* \tau))] & \text{en } U \times N \\ [d(\pi_1^* \rho_U (\pi_1^* \omega \wedge \pi_2^* \tau))] & \text{en } V \times N. \end{cases}$$

En $(U \times N) \cup (V \times N)$, tenemos

$$\begin{aligned}
\delta[\pi_1^* \omega \wedge \pi_2^* \tau] &= [d((\pi_1^* \rho_U) (\pi_1^* \omega \wedge \pi_2^* \tau))] \\
&= [d(\pi_1^* \rho_U) \wedge (\pi_1^* \omega \wedge \pi_2^* \tau) + (\pi_1^* \rho_U) d(\pi_1^* \omega \wedge \pi_2^* \tau)] \\
&= [\pi_1^* \rho_U (d(\pi_1^* \omega) \wedge \pi_2^* \tau)] \\
&= [d(\pi_1^* \rho_U) \wedge \pi_1^* \omega \wedge \pi_2^* \tau] \\
&= [\pi^* (d^* \omega) \wedge \pi_2^* \tau].
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$K \circ \hat{\delta} = \delta \circ K.$$

□

3.1.3. Demostración de la Fórmula de Künneth

Teorema 3.1.16. Sean M y N variedades suaves compactas de dimensiones n y m , respectivamente. Entonces

$$K : H^*(M) \otimes H^*(N) \rightarrow H^*(M \times N), \quad [\omega] \otimes [\tau] \mapsto [\pi_1^* \omega \wedge \pi_2^* \tau],$$

es un isomorfismo.

La prueba la realizaremos por inducción sobre el número de conjuntos abiertos que tiene una cubierta buena de N . Para el primer caso tenemos que N es difeomorfo a $\mathbb{R}^m$ y ya que el grupo de cohomología es invariante bajo difeomorfismos, basta con suponer que $N = \mathbb{R}^m$. Por el Lema de Poincaré

$$H^q(\mathbb{R}^m) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } q = 0, \\ 0 & \text{si } q \neq 0, \end{cases}$$

por lo tanto el producto tensorial, en cada grado es

$$\bigoplus_{q+l=k} H^q(M) \otimes H^l(\mathbb{R}^m) = H^k(M) \otimes H^0(\mathbb{R}^m),$$

pues para todo $l > 0$ se cumple que $H^l(\mathbb{R}^m) = 0$. Así que en cada grado tenemos $H^k(M) \otimes \mathbb{R}$, que es isomorfo a $H^k(M)$.

Por otro lado, sean

$$F : M \times \mathbb{R}^m \rightarrow M \quad (p, a) \mapsto p,$$

$$G : M \rightarrow M \times \mathbb{R}^m \quad p \mapsto (p, 0)$$

$(F \circ G)(x) = F(x, 0) = x$, por lo tanto $F \circ G = \text{Id}_M$. Por otra parte $(G \circ F)(x, a) = f(x) = (x, 0)$. Sea $h : (M \times \mathbb{R}^m) \times I \rightarrow M \times I$ dada por

$$h((x, a), t) = (x, ta).$$

Entonces $h((x, a), 0) = (x, 0) = G \circ F(x, a)$ y $h((x, a), 1) = (x, a) = \text{Id}_{M \times \mathbb{R}^k}(x, a)$. Además h es continua por componentes, por lo tanto $G \circ F$ es homotópica a $\text{Id}_{M \times \mathbb{R}^k}$. $M \times \mathbb{R}^k$ es homotópicamente equivalente a M , por lo tanto para cada grado

$$H^k(M \times \mathbb{R}^k) = H^k(M).$$

De este y del anterior tenemos dos isomorfismos, digamos

$$f : H^k(M) \rightarrow H^k(M) \otimes H^0(\mathbb{R}^k) \quad \text{y} \quad \pi_1^* : H^k(M) \rightarrow H^k(M \times \mathbb{R}^k). \quad (3.14)$$

Para $H^0(\mathbb{R}^k)$ podemos tomar a $[1]$ como base, así que $K : H^q(M) \otimes H^0(\mathbb{R}^m) \rightarrow H^q(M \times \mathbb{R}^k)$ esta dado por $[\omega] \otimes [1] \mapsto [\pi_1^* \omega]$ teniendo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} [\omega] \otimes [1] & \xrightarrow{\quad} & [\pi_1^* \omega] \\ \uparrow & \nearrow & \\ [\omega] & & \end{array}$$

Ya que por (3.14) los mapeos $[\omega] \mapsto [\omega] \otimes [1]$ y $[\omega] \mapsto [\pi_1^* \omega]$ son isomorfismos, entonces $[\omega] \otimes [1] \mapsto [\pi_1^* \omega]$ es un isomorfismo, que es lo que queríamos probar.

Supongamos que el isomorfismo se cumple para una variedad con una cubierta buena de j elementos donde $j > 1$. Sea N una variedad con una cubierta buena $\{U_1, \dots, U_j, U_{j+1}\}$. Cabe señalar que ya que N es compacto, por el Teorema 2.6.2 tiene una cubierta finita. Sea $U = \bigcup_{i=1}^j U_i$ y $V = U_{j+1}$ entonces U y V tienen una cubierta buena con j o menos elementos, entonces por hipotesis de inducción para esos casos se cumple el isomorfismo. Luego $U \cap V$ es vacío o difeomorfo a $\mathbb{R}^m$ y por lo tanto el isomorfismo se cumple pues es el caso 1.

Entonces el diagrama conmutativo (3.13) consta de renglones exactos donde tienes cuatro isomorfismos, por el Lema de los cinco se cumple para el caso $U \cup V = N$:

$$\begin{array}{ccccccc}
& \bigoplus_{q+l=k-1} H^q(M) \otimes H^l(V) & & & \bigoplus_{q+l=k-1} H^q(M) \otimes H^l(U \cap V) & & \\
\cdots \longrightarrow & \bigoplus_{q+l=k-1} \bigoplus_{q+l=k-1} H^q(M) \otimes H^l(U) & \longrightarrow & & & & \\
& \downarrow & & & \downarrow & & \\
\cdots \longrightarrow & H^{k-1}(M \times U) \oplus H^{k-1}(M \times V) & \longrightarrow & & H^{k-1}(M \times (U \cap V)) & \longrightarrow & \\
& \downarrow & & & \downarrow & & \\
& \bigoplus_{q+l=k} H^q(M) \otimes H^l(U \cup V) & \longrightarrow & & \bigoplus_{q+l=k} \bigoplus_{q+l=k} H^q(M) \otimes H^l(U) & & \\
& \downarrow & & & \downarrow & & \\
& \longrightarrow H^k(M \times (U \cup V)) & \longrightarrow & & H^k(M \times U) \oplus H^k(M \times V) & \longrightarrow & \\
& \downarrow & & & \downarrow & & \\
& \bigoplus_{q+l=k} H^q(M) \otimes H^l(U \cap V) & \longrightarrow & & \cdots & & \\
& \downarrow & & & \downarrow & & \\
& \longrightarrow H^k(M \times (U \cap V)) & \longrightarrow & & \cdots & &
\end{array}$$

Por lo tanto

$$K : H^q(M) \otimes H^l(U \cup V) \rightarrow H^k(M \times (U \cup V))$$

es un isomorfismo, que es lo que queriamos demostrar. $\square$

3.2. Anillo de Cohomología del Producto de Esferas

3.2.1. Álgebra Exterior Generada por un Conjunto

Es cierto que en la Subsección 1.3.1 definimos el álgebra exterior para un espacio vectorial V . Sin embargo, más adelante tendremos que definir el álgebra exterior sobre un conjunto, es por eso que es necesario dar una definición más general.

Definición 3.2.1. Dado un anillo conmutativo R , un álgebra sobre R (o una R -álgebra) es un conjunto A con una estructura definida por lo siguiente:

1. Una estructura de R -módulo sobre A .
2. Un mapeo R -bilineal de $A \times A$ en A .

Definición 3.2.2. Dadas dos álgebras A, A' sobre un anillo conmutativo R , un homomorfismo de álgebras de A en A' es un mapeo $f : A \rightarrow A'$ tal que

1. f es un homomorfismo de R -módulos.
2. $f(xy) = f(x)f(y)$ para todo $x \in A$ y $y \in A$.

Definición 3.2.3. Un isomorfismo de R -álgebras es un homomorfismo biyectivo de R -álgebras.

Definición 3.2.4. Sea Δ un monoide conmutativo. Un anillo R se dice graduado de tipo Δ si su grupo aditivo admite una descomposición en suma directa de la forma

$$R = \bigoplus_{\lambda \in \Delta} R_{\lambda},$$

tal que la familia de subgrupos $(R_{\lambda})_{\lambda \in \Delta}$ es compatible con la estructura de anillo de R , es decir,

$$R_{\lambda}R_{\mu} \subset R_{\lambda+\mu} \quad \text{para todo } \lambda, \mu \in \Delta.$$

Definición 3.2.5. Sea Δ un monoide conmutativo, R un anillo graduado de tipo Δ y A una R -álgebra. Una graduación $(A_{\lambda})_{\lambda \in \Delta}$ de tipo Δ en el grupo aditivo A se dice compatible con la estructura de R -álgebra en A si es compatible con la estructura de R -módulo y de anillo en A . En otras palabras, si para $\lambda, \mu \in \Delta$,

$$R_{\lambda}A_{\mu} \subset A_{\lambda+\mu},$$

$$A_{\lambda}A_{\mu} \subset A_{\lambda+\mu}.$$

La R -álgebra A , con esta graduación, es llamada álgebra graduada de tipo Δ sobre el anillo graduado R .

Definición 3.2.6. Para cada R -módulo A , el álgebra tensorial sobre A , denotado por $T(A)$ es la R -álgebra $\mathbb{Z}$ -graduada con el n -ésimo componente graduado dado por el n -ésima potencia tensorial de A :

$$T^n(A) = \underbrace{A \otimes \cdots \otimes A}_{n \text{ veces}} \quad n = 1, 2, \dots$$

y $T^0(A) := R$. Esto es,

$$T(A) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} T^n(A).$$

La multiplicación de $T(A)$ se define como sigue. Para $k, l \geq 0$, el producto de un elemento homogéneo $a \in T^k(A)$ con un elemento homogéneo $b \in T^l(A)$ está dado por

$$m(a, b) := a \otimes b \in T^{k+l}(A),$$

donde identificamos canónicamente $T^k(A) \otimes T^l(A) \cong T^{k+l}(A)$. Este producto se extiende por bilinealidad a una aplicación

$$m : T(A) \times T(A) \longrightarrow T(A),$$

lo que dota a $T(A)$ de estructura de R -álgebra $\mathbb{Z}$ -graduada.

Definición 3.2.7. Sea R un anillo conmutativo y A un R -módulo. El álgebra exterior de A , denotada por $\Lambda(A)$, es el álgebra sobre R dada por el cociente del álgebra tensorial $T(A)$ por el ideal bilateral generado por los elementos $x \otimes x$, donde $x \in A$.

$$\Lambda(A) := T(A) / \langle x \otimes x : x \in A \rangle$$

Si $X = \{x_1, x_3, \dots, x_{2n-1}\}$ entonces vamos a denotar como $\Lambda(x_1, x_3, \dots, x_{2n-1})$ al álgebra exterior del R -módulo $R^{(X)}$ tal como está descrito en la Definición 3.2.7, es decir,

$$\Lambda(x_1, x_3, \dots, x_{2n-1}) := \Lambda(R^{(X)}) = T(R^{(X)}) / \langle x \otimes x : x \in R^{(X)} \rangle.$$

En nuestro caso, de ahora en adelante supondremos que $R = \mathbb{R}$. Usando la fórmula de Künneth podemos demostrar fácilmente el siguiente teorema

Teorema 3.2.8. Existe un isomorfismo de espacios vectoriales graduados

$$H^*(S^1 \times S^3 \times \dots \times S^{2l-1}) \cong \Lambda(x_1) \otimes \Lambda(x_3) \otimes \dots \otimes \Lambda(x_{2l-1}),$$

donde $\deg(x_{2i-1}) = 2i - 1$.

Demostración:

$$\begin{aligned} H^*(S^1 \times S^3 \times \dots \times S^{2l-1}) &\cong H^*(S^1) \otimes H^*(S^3) \otimes \dots \otimes H^*(S^{2l-1}). \\ &\cong \Lambda(x_1) \otimes \Lambda(x_3) \otimes \dots \otimes \Lambda(x_{2l-1}). \end{aligned} \quad \square$$

Sean V y W espacios vectoriales sobre un campo $\mathbb{F}$, y sean $\Lambda(V), \Lambda(W)$ las álgebras exteriores asociadas a V y W respectivamente. Dada una transformación lineal

$$\varphi : V \rightarrow W,$$

veamos que existe un único homomorfismo de álgebras exteriores

$$\varphi_\wedge : \Lambda(V) \rightarrow \Lambda(W),$$

tal que $\varphi_{\wedge}(1) = 1$ y cuya restricción a V coincide con φ . Consideremos la inclusión canónica

$$i : W \hookrightarrow \Lambda(W), \quad x \mapsto x.$$

Definamos la aplicación $\psi = i \circ \varphi : V \rightarrow \Lambda(W)$

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\psi} & \Lambda(W) \\ \varphi \downarrow & \nearrow i & \\ W & & \end{array}$$

Entonces, para todo $x \in V$ se cumple que

$$\psi(x) \wedge \psi(x) = \varphi(x) \wedge \varphi(x) = 0,$$

pues el producto cuña es alternante.

Recordemos que $\Lambda(V)$ satisface la siguiente propiedad universal: Si A es un álgebra asociativa sobre $\mathbb{F}$ y $f : V \rightarrow A$ es una transformación lineal tal que $f(x)f(x) = 0$ para todo $x \in V$, entonces existe un único homomorfismo de álgebras

$$\hat{f} : \Lambda(V) \rightarrow A$$

tal que $\hat{f}$ restringido a V coincide con f . Aplicando esta propiedad universal al caso en donde $f = \psi$ y $A = \Lambda(W)$, se concluye que existe un único homomorfismo de álgebras

$$\varphi_{\wedge} : \Lambda(V) \rightarrow \Lambda(W)$$

tal que $\varphi_{\wedge}(1) = 1$ y la restricción de $\varphi_{\wedge}$ a V coincide con φ .

Lema 3.2.9. Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita, entonces existe un isomorfismo de álgebras

$$\Lambda(V) \otimes \Lambda(W) \cong \Lambda(V \oplus W).$$

Demostración:

Sean

$$i_1 : V \hookrightarrow V \oplus W \quad \text{y} \quad i_2 : W \hookrightarrow V \oplus W$$

los mapeos inclusión. Podemos extender a los homomorfismos

$$(i_1)_{\wedge} : \Lambda(V) \rightarrow \Lambda(V \oplus W),$$

$$(i_2)_{\wedge} : \Lambda(W) \rightarrow \Lambda(V \oplus W).$$

Entonces definamos

$$\varphi : \Lambda(V) \otimes \Lambda(W) \rightarrow \Lambda(V \oplus W), \quad v \otimes w \mapsto (i_1)_{\wedge}(v) \wedge (i_2)_{\wedge}(w).$$

Vamos a probar que φ preserva la multiplicación. Sean $(a \otimes b), (a' \otimes b') \in \Lambda(V) \otimes \Lambda(W)$,

$$\begin{aligned}\varphi((a \otimes b) \wedge (a' \otimes b')) &= \varphi((-1)^{\deg(b)\deg(a)} (a \wedge a') \otimes (b \wedge b')) \\ &= (-1)^{\deg(b)\deg(a)} (i_1)_\wedge (a \wedge a') \wedge (i_2)_\wedge (b \wedge b') \\ &= (-1)^{\deg(b)\deg(a)} (i_1)_\wedge (a) \wedge (i_1)_\wedge (a') \wedge (i_2)_\wedge (b) \wedge (i_2)_\wedge (b').\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}\varphi(a \otimes b) \wedge \varphi(a' \otimes b') &= ((i_1)_\wedge a \wedge (i_2)_\wedge b) \wedge ((i_1)_\wedge a' \wedge (i_2)_\wedge b') \\ &= (i_1)_\wedge a \wedge (i_2)_\wedge b \wedge (i_1)_\wedge a' \wedge (i_2)_\wedge b'.\end{aligned}$$

Y ya que $(i_2)_\wedge b \wedge (i_1)_\wedge a' = (-1)^{\deg(b)\deg(a)} (i_1)_\wedge a' \wedge (i_2)_\wedge b$, se sigue que

$$\varphi(a \otimes b) \wedge \varphi(a' \otimes b') = (-1)^{\deg(b)\deg(a)} (i_1)_\wedge a \wedge (i_1)_\wedge a' \wedge (i_2)_\wedge b \wedge (i_2)_\wedge b'.$$

Para verificar que φ es un isomorfismo vamos a mostrar que tiene una inversa. Sea $\eta : V \otimes W \rightarrow \Lambda(V) \oplus \Lambda(W)$ dada por

$$\eta(z) = \pi_1(z) \otimes 1 + 1 \otimes \pi_2 z, \quad z \in V \oplus W,$$

donde $\pi_1 : V \oplus W \rightarrow V, \pi_2 : V \oplus W \rightarrow W$ son las proyecciones respectivas. Luego veamos que

$$\begin{aligned}\eta(z) \wedge \eta(z) &= (\pi_1 z \otimes 1 + 1 \otimes \pi_2 z) \wedge (\pi_1 z \otimes 1 + 1 \otimes \pi_2 z) \\ &= (\pi_1 z \wedge \pi_1 z) \otimes 1 + \pi_1 z \otimes \pi_2 z - \pi_1 z \otimes \pi_2 z + 1 \otimes (\pi_2 z \wedge \pi_2 z) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Usamos de nuevo la propiedad universal para construir un homomorfismo

$$h : \Lambda(V \oplus W) \rightarrow \Lambda(V) \otimes \Lambda(W).$$

Comprobemos ahora que efectivamente es su inversa.

$$\begin{aligned}h(f(x \otimes 1)) &= h((i_1)_\wedge x \wedge (i_2)_\wedge 1) \\ &= h(i_1 x) \\ &= \eta(i_1 x) \\ &= x \otimes 1.\end{aligned}$$

Análogamente $h(f(1 \otimes y)) = 1 \otimes y$. Sea $z \in V \otimes W$. Entonces

$$\begin{aligned}f(h(z)) &= f(\pi_1 z \otimes 1 + 1 \otimes \pi_2 z) \\ &= i_1 \pi_1 z + i_2 + \pi_2 z \\ &= z.\end{aligned}$$

Ya que los vectores $x \otimes 1$ y $1 \otimes y$ con el escalar 1 generan el álgebra $\Lambda(V) \otimes \Lambda(W)$ y el vector $x \oplus y$ junto con el escalar 1 generan $\Lambda(V \oplus W)$ se sigue

$$h \circ f = \text{Id}_{\Lambda(V) \otimes \Lambda(W)}, \quad f \circ h = \text{Id}_{\Lambda(V \oplus W)}.$$

□

3.2.2. Producto Tensorial de Álgebras Exteriores

Teorema 3.2.10. Sean A, B dos R -álgebras conmutativas graduadas sobre un anillo conmutativo R . Entonces, el R -módulo $A \otimes_R B$ admite una estructura natural de R -álgebra conmutativa graduada con la graduación

$$(A \otimes_R B)_n = \bigoplus_{p+q=n} A_p \otimes_R B_q,$$

y la multiplicación dada para elementos homogéneos $a \in A_p, b \in B_q, c \in A_r, d \in B_s$ como

$$(a \otimes b)(c \otimes d) = (-1)^{qr} (ac) \otimes (bd),$$

con unidad $1_{A \otimes_R B} = 1_A \otimes 1_B$.

Demostración:

Veamos primero que la multiplicación es bilineal. Sean $x, x', x'' \in A, y, y', y'' \in B$ y $\lambda \in R$.

$$\begin{aligned} (\alpha(x \otimes y) + \beta(x' \otimes y'))(x'' \otimes y'') &= (\alpha x \otimes y + x' \otimes \beta y')(x'' \otimes y'') \\ &= (\alpha x \otimes y)(x'' \otimes y'') + (x' \otimes \beta y')(x'' \otimes y'') \\ &= (-1)^{\deg(y)\deg(x'')} \alpha x x'' \otimes y y'' \\ &\quad + (-1)^{\deg(\beta y')\deg(x'')} x' x'' \otimes \beta y' y'' \\ &= \alpha(x \otimes y)(x'' \otimes y'') + \beta(x' \otimes y')(x'' \otimes y''). \end{aligned}$$

y análogamente para la linealidad por el segundo factor.

Ahora verifiquemos la asociatividad. Sean $a \in A_p, b \in B_q, a' \in A_r, b' \in B_s, a'' \in A_t, b'' \in B_u$, por un lado tenemos

$$\begin{aligned} ((a \otimes b)(a' \otimes b'))(a'' \otimes b'') &= (-1)^{qr} (aa') \otimes (bb')(a'' \otimes b'') \\ &= (-1)^{qr+(q+s)t} (aa'a'') \otimes (bb'b''), \end{aligned}$$

y por otro lado tenemos

$$\begin{aligned} (a \otimes b)((a' \otimes b')(a'' \otimes b'')) &= (a \otimes b)((-1)^{st} (a'a'') \otimes (b'b'')) \\ &= (-1)^{st+q(r+t)} (aa'a'') \otimes (bb'b''). \end{aligned}$$

Ya que $qr + (q + s)t = qr + qt + st = st + q(r + t)$ se sigue que

$$((a \otimes b)(a' \otimes b'))(a'' \otimes b'') = (a \otimes b)((a' \otimes b')(a'' \otimes b'')).$$

Verifiquemos la existencia de la unidad. Ya que $1_A \in A$ y $1_B \in B$ se sigue que $1_A \otimes 1_B \in A \otimes_R B$ y además

$$(1_A \otimes 1_B)(a \otimes b) = (-1)^{(0)(\deg(a))} (1_A a) \otimes (1_B b) = a \otimes b$$

y

$$(a \otimes b)(1_A \otimes 1_B) = (-1)^{(\deg(b))(0)} (a1_A) \otimes (b1_B) = a \otimes b.$$

Veamos que $A \otimes_R B$ es conmutativa graduada. Sean $a \otimes b \in A_p \otimes B_q$ y $a' \otimes b' \in A_r \otimes B_s$. Entonces tal como definimos la multiplicación tenemos

$$(a \otimes b)(a' \otimes b') = (-1)^{qr} (aa') \otimes (bb'), \quad (3.15)$$

$$(a' \otimes b')(a \otimes b) = (-1)^{sp} (a'a) \otimes (b'b). \quad (3.16)$$

y ya que A y B son conmutativas graduadas se cumple

$$aa' = (-1)^{pr} a'a, \quad bb' = (-1)^{qs} b'b.$$

Así que

$$\begin{aligned} (a \otimes b)(a' \otimes b') &= (-1)^{qr} (aa') \otimes (bb') \\ &= (-1)^{qr+pr+qs} (a'a) \otimes (b'b) \\ &= (-1)^{qr+pr+qs-sp+sp} (a'a) \otimes (b'b) \\ &= (-1)^{qr+pr+qs-sp} (a' \otimes b')(a \otimes b), \end{aligned}$$

y ya que la paridad de sp y $-sp$ son las mismas,

$$\begin{aligned} (a \otimes b)(a' \otimes b') &= (-1)^{qr+pr+qs+sp} (a' \otimes b')(a \otimes b) \\ &= (-1)^{(p+q)(r+s)} (a' \otimes b')(a \otimes b), \end{aligned}$$

por lo tanto $A \otimes_R B$ es graduado conmutativo.

La multiplicación es compatible con la graduación. Veamos, si $x \otimes y \in (A \otimes_R B)_n$ y $(x' \otimes y') \in (A \otimes_R B)_k$, es decir, $\deg(x) + \deg(y) = n$ y $\deg(x') + \deg(y') = k$, entonces

$$(x \otimes y)(x' \otimes y') = (-1)^{\deg(y)\deg(x')} (xx') \otimes (yy').$$

Como $xx' \in A_{\deg(x)+\deg(x')}$ y $yy' \in B_{\deg(y)+\deg(y')}$ entonces

$$(xx') \otimes (yy') \in A_{\deg(x)+\deg(x')} \otimes_R B_{\deg(y)+\deg(y')} \subset (A \otimes_R B)_{n+k}. \quad \square$$

Teorema 3.2.11. *Sean n y l grados impares, entonces existe un isomorfismo de álgebras*

$$\Lambda(x_n) \otimes \Lambda(x_l) \cong \Lambda(x_n, x_l).$$

Demostración:

Del Teorema 3.2.10 tenemos que $\Lambda(x_n) \otimes \Lambda(x_l)$ es un álgebra conmutativa graduada. Si nos olvidamos de la graduación obtenemos que es un álgebra anticonmutativa, i.e., $xy = -yx$ para todo $x, y \in \Lambda(x_n) \otimes \Lambda(x_l)$.

Notemos que $\Lambda(x_n) \otimes \Lambda(x_l)$ tiene como bases al conjunto $\{1 \otimes 1, x_n \otimes 1, 1 \otimes x_l, x_n \otimes x_l\}$ mientras que $\Lambda(x_n, x_l)$ tiene como bases al conjunto $\{1, x_n, x_l, x_n \wedge x_l\}$. Definamos $\phi : \Lambda(x_n) \otimes \Lambda(x_l) \rightarrow \Lambda(x_n, x_l)$ por medio de las bases

$$1 \otimes 1 \mapsto 1, \quad x_n \otimes 1 \mapsto x_n, \quad 1 \otimes x_l \mapsto x_l, \quad x_n \otimes x_l \mapsto x_n \wedge x_l,$$

y extendemos por linealidad. Claramente $\phi^{-1} : \Lambda(x_n, x_l) \rightarrow \Lambda(x_n) \otimes \Lambda(x_l)$ esta dado por medio de las bases

$$\begin{aligned} 1 &\mapsto 1 \otimes 1, & x_n &\mapsto x_n \otimes 1, \\ x_l &\mapsto 1 \otimes x_l, & x_n \wedge x_l &\mapsto x_n \otimes x_l. \end{aligned}$$

Por lo tanto ϕ es un isomorfismo de espacios vectoriales. Veamos que los productos se preservan. Sean $a, a' \in \Lambda(x_n)$ y $b, b' \in \Lambda(x_l)$. Calculamos

$$\begin{aligned} \phi((a \otimes b) \cdot (a' \otimes b')) &= \phi((-1)^{ln}(aa') \otimes (bb')) \\ &= (-1)^{ln}(aa') \wedge (bb') \\ &= (-1)^{ln}a \wedge a' \wedge b \wedge b' \\ &= a \wedge b \wedge a' \wedge b' \\ &= (a \wedge b) \wedge (a' \wedge b') \\ &= \phi(a \otimes b) \wedge \phi(a' \otimes b'). \end{aligned} \quad \square$$

El isomorfismo anterior se puede extender fácilmente para k elementos.

Teorema 3.2.12. *Sean $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$ generadores de grados impares. Entonces existe un isomorfismo de álgebras*

$$\Lambda(x_{i_1}) \otimes \Lambda(x_{i_2}) \otimes \dots \otimes \Lambda(x_{i_k}) \cong \Lambda(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}).$$

Demostración:

La prueba la realizaremos por inducción sobre k .

Caso $k = 1$. Trivial.

Caso $k = 2$. Teorema 3.2.11.

Caso $k > 2$. Por hipótesis de inducción, la afirmación se cumple para $k - 1$, esto es

$$\Lambda(x_{i_1}) \otimes \Lambda(x_{i_2}) \otimes \dots \otimes \Lambda(x_{i_{k-1}}) \cong \Lambda(x_{i_1}, \dots, x_{i_{k-1}}).$$

Por otro lado, del caso $k = 2$ tenemos el siguiente isomorfismo de álgebras:

$$\Lambda(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{k-1}}) \otimes \Lambda(x_{i_k}) \cong \Lambda(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{k-1}}, x_{i_k}).$$

Por transitividad del isomorfismo de álgebras

$$\Lambda(x_{i_1}) \otimes \Lambda(x_{i_2}) \otimes \dots \otimes \Lambda(x_{i_k}) \cong \Lambda(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}). \quad \square$$

3.3. Cohomología de De Rham para Grupos de Lie Compactos y Conexos

Definición 3.3.1. Un grupo de Lie es una variedad suave G tal que la operación multiplicación

$$\mu : G \times G \rightarrow G, \quad \mu(a, b) = ab,$$

y su inversa

$$i : G \rightarrow G, \quad i(a) = a^{-1},$$

son suaves.

Definición 3.3.2. Un mapeo $F : H \rightarrow G$ entre dos grupos de Lie H y G es un homomorfismo de grupos de Lie si es un mapeo suave y un homomorfismo de grupos.

Definición 3.3.3. El grupo unitario $U(n)$, es el grupo de matrices complejas unitarias de $n \times n$, es decir,

$$AA^* = I, \quad A \in M_{n \times n}(\mathbb{C}).$$

Teorema 3.3.4. El grupo unitario $U(n)$ es un grupo de Lie.

Demostración:

Veamos primero que es una variedad suave. Sea

$$f : M_{n \times n}(\mathbb{C}) \rightarrow \text{Her}_{n \times n}(\mathbb{C}) \quad A \mapsto AA^*$$

donde $\text{Her}_{n \times n}(\mathbb{C})$ denota las matrices hermitianas con coeficientes en $\mathbb{C}$ y tamaño $n \times n$. Ya que $M_{n \times n}(\mathbb{C})$ se puede ver como una variedad encajada en $\mathbb{R}^{2n^2}$, podemos calcular $df_A(M)$ por medio de un límite

$$\begin{aligned} df_A(M) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(A + hM) - f(A)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(A + hM)(A + hM)^* - AA^*}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{AA^* + hMA^* + hAM^* + h^2MM^* - AA^*}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} MA^* + AM^* + hMM^* \\ &= MA^* + AM^*. \end{aligned}$$

Sea $B \in \text{Her}_{n \times n}(\mathbb{C})$ y $M = \frac{1}{2}AB$, entonces

$$df_A(M) = \frac{1}{2}B^*A^*A + \frac{1}{2}A^*AB = \frac{1}{2}B^* + \frac{1}{2}B = B,$$

por lo tanto df_A es sobreyectiva. Por el Teorema del valor regular, $f^{-1}(I) = U(n)$ es una subvariedad de $M_{n \times n}(\mathbb{C})$.

A continuación veamos que es un grupo con la operación usual de multiplicación de matrices. Si $A, B \in U(n)$, entonces

$$(AB)(AB)^* = ABB^*A^* = AIA^* = AA^* = I,$$

por lo tanto $AB \in U(n)$. Sabemos que se cumple la asociatividad para multiplicación de matrices

$$A(BC) = (AB)C.$$

Además $I \in U(n)$ pues $II^* = II = I$ y I es el elemento neutro del grupo. Si $A \in U(n)$, entonces $A^* \in U(n)$ ya que

$$A^*(A^*)^* = A^*A = I$$

y luego es fácil ver que la inversa de A es precisamente A^* que también está en $U(n)$. $\square$

Lema 3.3.5. $U(n)$ es compacto.

Demostración:

El grupo unitario $U(n)$ es un subconjunto del grupo de matrices complejas $M_n(\mathbb{C})$ que se puede identificar de manera natural con $\mathbb{C}^{n^2}$. Por lo que basta con probar que es cerrado y acotado.

Veamos primero que es acotado. Sea $A \in U(n)$ entonces

$$\begin{aligned} \|A\| &= \sqrt{\text{tr}(A^*A)} \\ &= \sqrt{\text{tr}(I)} \\ &= \sqrt{n}. \end{aligned}$$

Ya que n es fijo, $U(n)$ es acotado. Ahora veamos que es cerrado. Sea

$$f : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{C}), \quad A \mapsto AA^*.$$

f es continua. Además $U(n) = f^{-1}(I)$. Por lo tanto $U(n)$ es cerrado. $\square$

Lema 3.3.6. $U(n)$ es conexo.

Demostración:

Sea $A \in U(n)$. Por el Teorema espectral para operadores unitarios, existe una matriz unitaria $P \in U(n)$ tal que

$$A = PD(1)P^{-1},$$

donde $D(t) = \text{diag}(e^{it\theta_1}, \dots, e^{it\theta_n})$. Notemos que $D(t)(D(t))^* = I$. Por lo tanto $D(t) \in U(n)$. Definamos el camino

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow U(n), \quad t \mapsto PD(t)P^{-1}.$$

Es claro que

$$\gamma(0) = PIP^{-1} = I \quad \text{y} \quad \gamma(1) = PD(1)P^{-1} = A.$$

El mapeo $t \mapsto e^{it\theta_k}$ es continuo y la multiplicación de matrices es continua, por lo tanto γ es continua. Entonces $U(n)$ es conexo por caminos y por lo tanto conexo. $\square$

Un resultado fundamental que destaca la importancia de los grupos de Lie y su relación con este trabajo es el teorema que demostró Heinz Hopf en [Hop41] en donde nos dice la forma del anillo de cohomología $H^*(G)$ de un grupo de Lie compacto y conexo, como lo es $U(n)$, sobre un campo $\mathbb{F}$ de característica cero, como lo es $\mathbb{R}$. Debido a que en este trabajo está enfocado para la cohomología de De Rham lo enunciaremos de una manera distinta, tal como se enuncia en [KP17].

Teorema 3.3.7. *Sea G un grupo de Lie simple, compacto y conexo. Entonces $H^*(G)$ es isomorfa a un álgebra exterior*

$$H^*(G) \cong \Lambda(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}),$$

donde los generadores x_{i_j} tienen grado impar.

Para $U(n)$ tenemos

$$H^*(U(n)) \cong \Lambda(x_1, x_3, \dots, x_{2n-1})$$

y usando el Teorema 3.2.12 y el Teorema 3.2.8 obtenemos que

$$H^*(S^1 \times S^3 \times \dots \times S^{2n-1}) \cong H^*(U(n)).$$

Lista de notación

$\sqcup$	Unión disjunta, página 14
$(df)_p$	Diferencial de un mapeo de variedades f en p , página 11
(U_α, ϕ_α)	Carta, página 3
∂M	Frontera de la variedad M , página 31
$\phi_{\alpha\beta}$	Mapeo de transición entre las cartas (U_α, ϕ_α) y (U_β, ϕ_β) , página 3
$\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$	Atlas, página 3
$\varphi_\wedge$	Homomorfismo de álgebras exteriores inducido por φ , página 100
$\wedge$	Producto cuña, página 21
Id_M	Mapeo identidad en M , página 4
$\binom{k}{l}$	Coeficiente binomial, página 21
$\mathbb{C}^n$	Plano complejo de dimensión n , página 5
$\mathbb{C}P^n$	Espacio proyectivo complejo de dimensión n , página 5
δ_j^i	Delta de Kronecker, página 18
δ	Homomorfismo de conexión, página 66
$\mathbb{F}$	Campo arbitrario, página 24
$\left. \frac{d}{dt} \right _{t=t_0} \omega_t$	Derivada de una familia de k -formas con respecto a t en t_0 , página 60
$\text{Her}_{n \times n}(\mathbb{C})$	Matrices hermitianas de $n \times n$ entradas, página 106
$\int_U \omega$	Integral de la forma ω en U , página 33
$\int_a^b f(x) dx$	Integral de f evaluada en $[a, b]$, página 49
$\Lambda^k(V)$	k -ésima potencia exterior de V , página 21
$\Lambda^k(T^*M)$	k -ésima potencia exterior, página 22

$[z_1 : z_2]$	Coordenadas homogéneas en el espacio proyectivo, página 5
$\mathcal{H}^n$	Semiespacio superior cerrado, página 30
$\mathcal{L}_X \omega$	Derivada de Lie de la forma ω respecto al campo vectorial X , página 61
$\text{im}(f)$	Imagen de f , página 54
$\ker(f)$	Kernel de f , página 54
$\oint$	Integral de línea, página 49
$\Omega^*(M)$	Álgebra de formas, página 25
$\Omega^k(M)$	Espacio de k -formas, página 23
$\otimes$	Producto tensorial, página 19
$\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right _p$	Derivada parcial con respecto a x_i en p , página 10
$\text{Proy}_{\mathbb{R}^n}(x)$	Proyección sobre la primeras n coordenadas, página 59
$\mathbb{R}^n$	Espacio euclidiano de dimensión n , página 3
$\{\rho_\alpha\}$	Partición suave de la unidad, página 39
$\sim$	Relación de equivalencia, página 9
$\text{supp}(f)$	Soporte de f , página 34
$\mathcal{T}$	Topología, página 15
$\text{Alt}(T)$	Forma alternante de T , página 19
$\deg(x)$	Grado de x , página 25
$\dim(V)$	Dimensión del espacio vectorial V , página 21
$\text{Hom}(V, W)$	Espacio de transformaciones lineales $V \rightarrow W$, página 21
cte_c	Mapeo constante c , página 10
$\text{sgn}(\pi)$	Signo de la permutación π , página 19
$\theta_t(q)$	Flujo θ evaluado en (t, q) , página 60
$B(q, r)$	Bola abierta con centro q y radio r , página 37
$B^k(M)$	k -formas exactas en M , página 54
C^n	Clase de funciones n veces continuamente diferenciables, página 3

$C_p^\infty(M)$	Gérmenes de mapeos suaves en $p \in M$, página 9
$d\omega$	Derivada exterior de la forma ω , página 44
E_p	Fibra de un haz vectorial E en p , página 17
$F \simeq G$	Relación de homotopía entre F y G , página 59
$F^*\omega$	Pullback de una forma suave ω por F , página 29
$F^\#$	Mapeo en cohomología inducido por F , página 56
$f^{(k)}(x)$	k -ésima derivada de f en x , página 34
$H^k(M)$	k -ésimo grupo de cohomología de M , página 54
I	Multiíndice $(i_1, \dots, i_l)$, página 21
$J(\psi)$	Matriz Jacobiana de ψ , página 33
$Mor(A, B)$	Morfismos de A a B , página 57
$r_1, \dots, r_n$	Coordenadas de $\mathbb{R}^n$, página 10
S^n	Esfera de dimensión n , página 6
S_k	Grupo simétrico de k elementos, página 19
T^*M	Haz cotangente de M , página 22
T_p^*M	Espacio cotangente de M en p , página 21
T_pM	Espacio tangente a M en p , página 9
TM	Haz tangente, página 14
$U(n)$	Grupo unitario, página 106
$X \lrcorner \omega$	Multiplicación interior de ω respecto al campo vectorial X , página 61
$Z^k(M)$	Conjunto de k -formas cerradas en M , página 53

Bibliografía

- [Apo69] Tom M. Apostol. *Calculus. Vol. II: Multi-variable calculus and linear algebra, with applications to differential equations and probability*. Blaisdell Publishing Co. [Ginn and Co.], Waltham, Mass.-Toronto, Ont.-London, second edition, 1969.
- [Bou74] Nicolas Bourbaki. *Elements of mathematics. Algebra, Part I: Chapters 1-3*. Hermann, Paris; Addison-Wesley Publishing Co., Reading, MA, 1974. Translated from the French.
- [BT82] Raoul Bott and Loring W. Tu. *Differential forms in algebraic topology*, volume 82 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.
- [EM45] Samuel Eilenberg and Saunders MacLane. General theory of natural equivalences. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 58:231–294, 1945.
- [Gau28] Carl Friedrich Gauss. Disquisitiones generales circa superficies curvas. *Commentationes Societatis Regiae Scientiarum Gottingensis Recentiores*, 6:99–146, 1828.
- [Gre78] Werner Greub. *Multilinear algebra*. Universitext. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, second edition, 1978.
- [Hop41] Heinz Hopf. Über die Topologie der Gruppen-Mannigfaltigkeiten und ihre Verallgemeinerungen. *Ann. of Math. (2)*, 42:22–52, 1941.
- [Hun80] Thomas W. Hungerford. *Algebra*, volume 73 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1980. Reprint of the 1974 original.
- [KP17] Corentin Kilque and Paolo Papi. De rham cohomology of a compact connected lie group. *Summer Intership, Sapienza Università Di Roma and école normale supérieure*, 2017.
- [Kup20] Alexander Kupers. Lectures on differential topology. Lecture notes, University of Toronto, dec 2020. Disponible en <https://www.utsc.utoronto.ca/people/kupers/wp-content/uploads/sites/50/2020/12/diffop-2020.pdf>.
- [Lee13] John M. Lee. *Introduction to smooth manifolds*, volume 218 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, second edition, 2013.

- [MTM91] Jerrold E Marsden, Anthony J Tromba, and Manuel López Mateos. *Cálculo vectorial*, volume 1. Addison-Wesley Iberoamericana México, 1991.
- [Mun00] James R. Munkres. *Topology*. Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, second edition, 2000.
- [Rie54] Bernhard Riemann. Über die hypothesen, welche der geometrie zu grunde liegen. *Physikalische Blätter*, 10(7):296–306, 1954.
- [Tu11] Loring W. Tu. *An Introduction to Manifolds*. Universitext. Springer, New York, second edition, 2011.
- [Veb62] Oswald Veblen. A set of axioms for differential geometry. In *Differential Geometry*, pages 93–103. Elsevier, 1962.