

# Cálculo I

## Cuarto examen parcial

### Ejercicios resueltos

Hora de inicio: 8:00. Hora de entrega: 11:00.

1. Derivar las siguientes funciones usando la definición:

(i)  $f(x) = \frac{1}{2x+1}$ .

(ii)  $g(x) = 2x^2 + 1$ .

**Solución.**

(i)  $f(x) = \frac{1}{2x+1}$  y  $f(x+h) = \frac{1}{2(x+h)+1}$  entonces:

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\frac{1}{2(x+h)+1} - \frac{1}{2x+1}}{h} \\ &= \frac{2x+1 - (2x+2h+1)}{(2x+2h+1)(2x+1)h} \\ &= \frac{-2h}{(2x+2h+1)(2x+1)h} \\ &= \frac{-2}{(2x+2h+1)(2x+1)} \end{aligned}$$

y de esta manera obtenemos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2}{(2x+2h+1)(2x+1)} \\ &= \frac{-2}{(2x+1)^2} \end{aligned}$$

- (ii)  $g(x) = 2x^2 + 1$  y  $g(x+h) = 2(x+h)^2 + 1 = 2x^2 + 4xh + 2h^2 + 1$   
entonces:

$$\begin{aligned}\frac{g(x+h) - g(x)}{h} &= \frac{(2x^2 + 4xh + 2h^2 + 1) - (2x^2 + 1)}{h} \\ &= \frac{4xh + 2h^2}{h} \\ &= 4x + h\end{aligned}$$

y de esta manera obtenemos:

$$\begin{aligned}g'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (4x + 2h) \\ &= 4x\end{aligned}$$

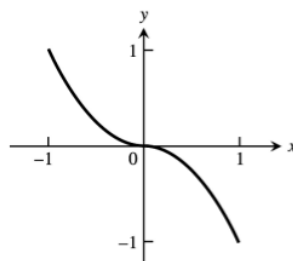
2. a) Hacer un dibujo de la gráfica de la función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } -1 \leq x < 0. \\ -x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

- b) ¿Es  $f$  una función continua en  $x = 0$ .  
c) ¿Es  $f$  una función derivable en  $x = 0$ . Dar razones para su respuesta.

**Solución.**

- a) He aquí su gráfica:



$$f(x) = \begin{cases} x^2, & -1 \leq x < 0 \\ -x^2, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

- b)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow 0^+} -x^2 = 0$  entonces  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ . Como  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$  se sigue que la función es continua en  $x = 0$ .
- c)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x) = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-2x) = 0$  entonces  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0$ . Como el límite existe y es igual a 0, se sigue que  $f$  es derivable en  $x = 0$ .
3. a) Si  $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2x-4}$ , ¿hay algún punto donde la pendiente de la recta tangente a  $f$  sea igual a  $-\frac{3}{2}$ ?
- b) Si  $f(x) = x - \frac{1}{2x}$ , encontrar un punto donde la pendiente de la recta tangente a  $f$  sea igual a  $-\frac{3}{2}$  (si existe).
- c) Si  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 20$ , encontrar un punto donde la pendiente de la recta tangente a  $f$  sea paralela al eje  $x$ .
- d) Si  $f(x) = x^3$ , encontrar las intersecciones con los ejes  $x$  y  $y$  de la recta tangente a  $f$  en el punto  $(-2, -8)$ .
- e) Si  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 20$ , encontrar los puntos donde la recta tangente a  $f$  sea perpendicular a la línea dada por la ecuación  $y = 1 - x/24$ , encontrar los puntos donde la recta tangente sea paralela a la recta  $y = \sqrt{2} - 12x$ .

**Solución.**

- a) Si  $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2x-4}$  entonces  $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{(2x-4)^2}$ . Si la pendiente de

la recta tangente a  $f$  es  $-\frac{3}{2}$  tendremos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} -\frac{3}{2} &= f'(x) \\ -\frac{3}{2} &= \frac{1}{2} - \frac{2}{(2x-4)^2} \\ -2 &= -\frac{2}{(2x-4)^2} \\ 1 &= \frac{1}{(2x-4)^2} \end{aligned}$$

$$(2x-4)^2 = 1$$

$$4x^2 - 16x + 16 = 1$$

$$4x^2 - 16x + 15 = 0$$

$$(2x-5)(2x-3) = 0.$$

Por lo que  $x = \frac{5}{2}$  o  $x = \frac{3}{2}$  y de esta manera  $(\frac{5}{2}, \frac{9}{4})$  y  $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4})$  son los puntos donde la pendiente de la tangente es  $-\frac{3}{2}$ .

b) Si  $f(x) = x - \frac{1}{2x}$  entonces  $f'(x) = 1 + \frac{2}{(2x)^2} = 1 + \frac{1}{2x^2}$ . Como la pendiente de la tangente es 3 tenemos que:

$$3 = 1 + \frac{1}{2x^2}$$

$$2 = \frac{1}{2x^2}$$

$$\frac{1}{4} = x^2.$$

Por lo tanto  $x = \pm\frac{1}{2}$  y así  $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$  y  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  son los puntos donde la pendiente de la tangente es 3.

c) Si  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 20$  entonces  $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$ , la tangente es paralela al eje  $x$  cuando  $f'(x) = 0$ , tenemos entonces las siguientes igualdades:

$$6x^2 - 6x - 12 = 0$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x-2)(x+1) = 0.$$

Por lo tanto  $x = 2$  o  $x = -1$  y de esta manera obtenemos que  $(2, 0)$  y  $(-1, 27)$  son puntos en la curva donde la tangente es paralela al eje  $x$ .

d) Si  $f(x) = x^3$  entonces  $f'(x) = 3x^2$  y  $f'(-2) = 12$ . La ecuación de la recta tangente en  $(-2, -8)$  es  $y + 8 = 12(x + 2)$ , es decir  $y = 12x + 16$ ; podemos encontrar las intersecciones en el eje  $x$  resolviendo la ecuación  $0 = 12x + 16$  y obtenemos  $x = -\frac{4}{3}$ ; la intersección en el eje  $y$  es  $y = 12(0) + 16 = 16$ .

e) Si  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 20$ , la derivada de  $f$  es  $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$ . Veamos los dos casos buscados:

(i) La tangente es perpendicular a la línea  $y = 1 - \frac{x}{24}$ , entonces su pendiente será igual a  $-\left(\frac{1}{-\left(\frac{1}{24}\right)}\right) = 24$ , igualamos la derivada a la pendiente buscada:

$$6x^2 - 6x - 12 = 24$$

$$x^2 - x - 2 = 4$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$(x - 3)(x + 2) = 0,$$

de esta manera la solución es  $x = -2$  o  $x = 3$  y  $(-2, 16)$  y  $(3, 11)$  son puntos donde la tangente es perpendicular a  $y = 1 - \frac{x}{24}$ .

(ii) La tangente es paralela a la línea  $y = \sqrt{2} - 12x$  cuando  $f'(x) = 12$ :

$$6x^2 - 6x - 12 = -12$$

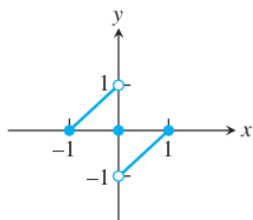
$$x^2 - x = 0$$

$$x(x - 1) = 0,$$

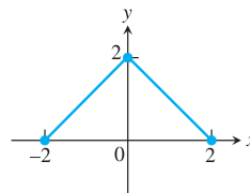
así  $x = 0$  o  $x = 1$  y los puntos donde la tangente es paralela a  $y = \sqrt{2} - 12x$  son  $(0, 20)$  y  $(1, 7)$ .

4. Encontrar los máximos y mínimos de las funciones cuya gráfica se muestra en las figuras.

a) Figura 1.



b) Figura 2.



**Solución.**

a) Mínimo local en  $(-1, 0)$  y máximo local en  $(0, 1)$ , no existen máximo ni mínimo.

b) Mínimo en  $(-2, 0)$  y  $(2, 0)$ , máximo en  $(0, 2)$ .

5. Encontrar las derivadas de las siguientes funciones:

- |   |  |
|---|--|
| (i) $f(x) = x^3 - 3(x^2 + \pi^2)$ .   | (x) $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{2}{\sin x}$ . |
| (ii) $f(x) = x^7 + \sqrt{7}x - \frac{1}{\pi+1}$ .                                   | (xi) $f(x) = \cos^4(1 - 2x)$ .                       |
| (iii) $f(x) = (x + 1)^2(x^2 + 2x)$ .  | (xii) $f(x) = \cot^3\left(\frac{2}{x}\right)$ .      |
| (iv) $f(x) = (2x - 5)(4 - x^{-1})$ .  | (xiii) $f(x) = (\sec x + \tan x)^5$ .                |
| (v) $f(\theta) = (\theta^2 + \sec \theta + 1)^3$ .                                  | (xiv) $f(x) = (\csc^5(1 - x + 3x^2))$ .              |
| (vi) $f(\theta) = \left(-1 - \frac{\cos \theta}{2} - \frac{\theta^2}{2}\right)^2$ . | (xv) $f(x) = \sqrt{2x \sin x}$ .                     |
| (vii) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ .  | (xvi) $f(x) = \sqrt{2x \cos x}$ .                    |
| (viii) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ .  | (xvii) $f(x) = \sin \sqrt{2x}$ .                     |
| (ix) $f(x) = 2 \tan^2 x - \sec^2 x$ .   | (xviii) $f(x) = \sin(x + \sqrt{x+1})$ .              |

**Solución.**

(i)  $f(x) = x^3 - 3(x^2 + \pi^2) \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3(2x + 0) = 3x^2 - 6x$  .

- (ii)  $f(x) = x^7 + \sqrt{7}x - \frac{1}{\pi+1} \Rightarrow f'(x) = 7x^6 + \sqrt{7}$ .
- (iii)  $f(x) = (x+1)^2(x^2+2x) \Rightarrow f'(x) = (x+1)^2(2x+2) + (x^2+2x)(2(x+1)) = 2(x+1)[(x+1)^2 + x(x+2)] = 2(x+1)(2x^2+4x+1) = 4x^3 + 12x^2 + 10x + 2$ .
- (iv)  $f(x) = (2x-5)(4-x^{-1}) \Rightarrow f'(x) = (2x-5)(-1)(4-x)^{-2}(-1) + (4-x)^{-1}(2) = (4-x)^{-2}[(2x-5) + 2(4-x)] = 3(4-x)^{-2}$ .
- (v)  $f(\theta) = (\theta^2 + \sec \theta + 1)^3 \Rightarrow f'(x) = 3(\theta^2 + \sec \theta + 1)^2(2\theta + \sec \theta \tan \theta)$ .
- (vi)  $f(\theta) = (-1 - \frac{\cos \theta}{2} - \frac{\theta^2}{2})^2 \Rightarrow f'(x) = 2(-1 - \frac{\csc \theta}{2} - \frac{\theta^2}{4})(\frac{\csc \theta \cot \theta}{2} - \frac{\theta}{2}) = (-1 - \frac{\csc \theta}{2} - \frac{\theta^2}{4})(\csc \theta \cot \theta - \theta)$ .
- (vii)  $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{(1+\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}(\frac{1}{2\sqrt{x}})}{(1+\sqrt{x})^2} = \frac{(1+\sqrt{x}) - \sqrt{x}}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$ .
- (viii)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}} \Rightarrow f'(x) = \frac{(\sqrt{x-1})(0) - 1(\frac{1}{2\sqrt{x}})}{(\sqrt{x-1})^2} = \frac{-1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x-1})^2}$ .
- (ix)  $f(x) = 2 \tan^2 x - \sec^2 x \Rightarrow f'(x) = (4 \tan x)(\sec^2 x) - (2 \sec x)(\sec x \tan x) = 2 \sec^2 x \tan x$ .
- (x)  $f(x) = \frac{1}{\text{sen}^2 x} - \frac{2}{\text{sen} x} \Rightarrow f'(x) = \csc^2 x - 2 \csc x$ .
- (xi)  $f(x) = \cos^4(1-2x) \Rightarrow f'(x) = 4 \cos^3(1-2x)(-\text{sen}(1-2x))(-2) = 8 \cos^3(1-2x) \text{sen}(1-2x)$ .
- (xii)  $f(x) = \cot^3(\frac{2}{x}) \Rightarrow f'(x) = 3 \cot^2(\frac{2}{x})(-\csc^2(\frac{2}{x}))(-\frac{2}{x^2}) = \frac{6}{x^2} \cot^2(\frac{2}{x}) \csc^2(\frac{2}{x})$ .
- (xiii)  $f(x) = (\sec x + \tan x)^5 \Rightarrow f'(x) = 5(\sec x + \tan x)^4(\sec x \tan x + \sec^2 x) = 5(\sec x)(\sec x + \tan x)^5$ .
- (xiv)  $f(x) = (\csc^5(1-x+3x^2)) \Rightarrow f'(x) = 5 \csc^4(1-x+3x^2)(-\csc(1-x+3x^2) \cot(1-x+3x^2))(-1+6x)$ .
- (xv)  $f(x) = \sqrt{2x \text{sen} x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}(2x \text{sen} x)^{-1/2}(2x \cos x + 2 \text{sen} x) = \frac{x \cos x + \text{sen} x}{\sqrt{2x \text{sen} x}}$ .
- (xvi)  $f(x) = \sqrt{2x \cos x} \Rightarrow f'(x) = (\frac{1}{2})(2x \cos x)^{-1/2}(-2x \text{sen} x + 2 \cos x) = \frac{-x \text{sen} x + \cos x}{\sqrt{2x \cos x}}$ .
- (xvii)  $f(x) = \text{sen} \sqrt{2x} \Rightarrow f'(x) = \cos[(2x)^{1/2}](\frac{1}{2}(2x)^{-1/2}(2)) = \frac{\cos \sqrt{2x}}{\sqrt{2x}}$ .
- (xviii)  $f(x) = \text{sen}(x + \sqrt{x+1}) \Rightarrow f'(x) = \cos(x + \sqrt{x+1})(1 + \frac{1}{2\sqrt{x+1}}) = \frac{2\sqrt{x+1}+1}{2\sqrt{x+1}} \cos(x + \sqrt{x+1})$ .

6. Encontrar  $y''$  en cada uno de los siguientes ejercicios:

a)  $y = (1 + \frac{1}{x})^3$ .

c)  $y = \frac{1}{4} \cot(3x - 1)$ .

b)  $y = (1 - \sqrt{x})^{-1}$ .

d)  $y = 9 \tan(\frac{x}{3})$ .

**Solución.**

a)  $y = (1 + \frac{1}{x})^3 \Rightarrow y' = 3(1 + \frac{1}{x})^2(-\frac{1}{x^2}) = -\frac{3}{x^2}(1 + \frac{1}{x})^2$  entonces:

$$\begin{aligned} y'' &= \left(-\frac{3}{x^2}\right) \cdot \frac{d}{dx} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 \cdot \frac{3}{x^2} \\ &= \left(-\frac{3}{x^2}\right) \left(2 \left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(-\frac{1}{x^2}\right)\right) + \left(\frac{6}{x^3}\right) \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 \\ &= \frac{6}{x^4} \left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{6}{x^3} \left(1 + \frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{6}{x^3} \left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(\frac{1}{x} + 1 + \frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{6}{x^3} \left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{2}{x}\right) \end{aligned}$$

b)  $y = (1 - \sqrt{x})^{-1} \Rightarrow y' = -(1 - \sqrt{x})^{-2}(-\frac{1}{2}x^{-1/2}) = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{x})^{-2}x^{-1/2}$ ,  
entonces:

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{1}{2} [(1 - \sqrt{x})^{-2} + x^{-1}(1 - \sqrt{x})^{-3}] \\ &= \frac{1}{2}x^{-1}(1 - \sqrt{x})^{-3} \left[-\frac{1}{2}x^{-1/2}(1 - \sqrt{x}) + 1\right] \\ &= \frac{1}{2x}(1 - \sqrt{x})^{-3} \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2} + 1\right) \\ &= \frac{1}{2x}(1 - \sqrt{x})^{-3} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \end{aligned}$$

c)  $y = \frac{1}{9} \cot(3x - 1) \Rightarrow y' = -\frac{1}{9} \csc^2(3x - 1)(3) = -\frac{1}{3} \csc^2(3x - 1)$ ,  
entonces:

$$\begin{aligned} y'' &= \left( -\frac{2}{3} \left( \csc(3x - 1) \cdot \frac{d}{dx} \csc(3x - 1) \right) \right) \\ &= -\frac{2}{3} \csc(3x - 1) (-\csc(3x - 1) \cot(3x - 1) \cdot \frac{d}{dx}(3x - 1)) \\ &= 2 \csc^2(3x - 1) \cot(3x - 1) \end{aligned}$$

d)  $y = 9 \tan\left(\frac{x}{3}\right) \Rightarrow y' = 9(\sec^2\left(\frac{x}{3}\right))\left(\frac{1}{3}\right) = 3 \sec^2\left(\frac{x}{3}\right)$ , entonces:

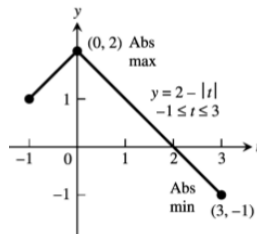
$$\begin{aligned} y'' &= 3 \cdot 2 \left( \sec\left(\frac{x}{3}\right) \tan\left(\frac{x}{3}\right) \right) \left(\frac{1}{3}\right) \\ &= 2 \sec^2\left(\frac{x}{3}\right) \tan\left(\frac{x}{3}\right) \end{aligned}$$

7. Encontrar el máximo y el mínimo de las siguientes funciones:

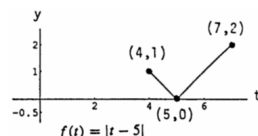
- a)  $f(x) = 2 - |x|$  en  $[-1, 3]$ .
- b)  $f(x) = |x - 5|$  en  $[1, 7]$ .
- c)  $f(x) = -\frac{1}{x}$  en  $[-2, -1]$ .
- d)  $f(x) = x^2 - 1$  en  $[-1, 2]$ .

**Solución.**

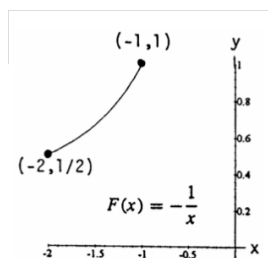
a)  $f(x) = 2 - |x| = 2 - \sqrt{x^2} = 2 - (x^2)^{1/2} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{2}(2x) = -\frac{x}{x^2} = -\frac{x}{|x|}$ , por lo que existe un punto crítico en  $x = 0$ . Tenemos que  $f(-1) = 1$ ,  $f(0) = 2$  y  $f(3) = -1$ , por lo tanto el máximo es 2 en  $x = 0$  y el mínimo es  $-1$  en  $x = 3$ .



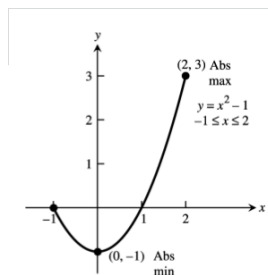
- b)  $f(x) = |x - 5| = \sqrt{(x - 5)^2} = ((x - 5)^2)^{1/2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}((x - 5)^2)^{-1/2}(2(x - 5)) = \frac{x-5}{\sqrt{(x-5)^2}} = \frac{x-5}{|x-5|}$ , por lo que existe un punto crítico en  $x = 5$ . Tenemos que  $f(4) = 1$ ,  $f(5) = 0$  y  $f(7) = 2$ , por lo tanto el máximo es 2 en  $x = 7$  y el mínimo es 0 en  $x = 5$ .



- c)  $f(x) = -\frac{1}{x} = x^{-1} \Rightarrow f'(x) = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ , sin embargo  $x = 0$  no es un punto crítico porque no está en el dominio. Tenemos que  $f(-2) = \frac{1}{2}$  y  $f(-1) = 1$ , por lo tanto el máximo es 1 en  $x = -1$  y el mínimo es  $\frac{1}{2}$  en  $x = -2$ .



- d)  $f(x) = x^2 - 1 \Rightarrow f'(x) = 2x$ , por lo que  $f$  tiene un punto crítico en  $x = 0$ . Tenemos que  $f(-1) = 0$ ,  $f(0) = -1$  y  $f(2) = 3$  por lo que el máximo es 3 en  $x = 2$  y el mínimo es  $-1$  en  $x = 0$ .



8. ¿Para qué valores de  $m$  (si es que hay) se tiene que

$$f(x) = \begin{cases} \text{sen } 2x & x \leq 0 \\ mx & x > 0 \end{cases}$$

a) ¿es continua en  $x = 0$ ?

b) ¿es derivable en  $x = 0$ ?

**Solución.**

a)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \text{sen } 2x = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} mx = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ , independientemente de  $m$ ; entonces para todos los valores de  $m$ , la función es continua porque  $f(0) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

b)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (\text{sen } 2x)' = \lim_{x \rightarrow 0^-} 2 \cos 2x = 2$  y  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (mx)' = \lim_{x \rightarrow 0^+} m = m$ .  $f$  es derivable en  $x = 0$  cuando se cumpla que  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$ , esto sucede cuando  $m = 2$ .

9. Encontrar máximos, mínimos, máximos locales y mínimos locales de cada una de las siguiente funciones en su dominio:

a)  $f(x) = 2x^2 - x^2$  en  $(-\infty, 2]$ .

b)  $f(x) = (x + 1)^2$  en  $(-\infty, 0]$ .

c)  $f(x) = x^2 - 4x + 4$  en  $[1, \infty)$ .

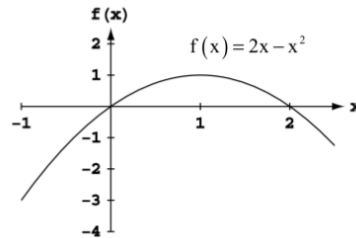
d)  $f(x) = x^3 - 3x^2$  en  $[-3, \infty)$ .

e)  $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$  en  $(-\infty, 0]$ .

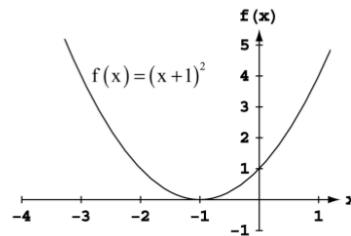
**Solución.**

a)  $f(x) = 2x^2 - x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - 2x = 2(1 - x)$  por lo que existe un punto crítico en  $x = 1$ . La derivada es positiva si  $x < 1$  y negativa si  $1 < x \leq 2$ , entonces  $f(1) = 1$  es un máximo local y

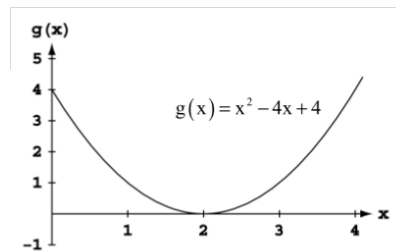
$f(2) = 0$  es un mínimo local. Por lo tanto el máximo es  $f(1) = 1$  y no existe mínimo.



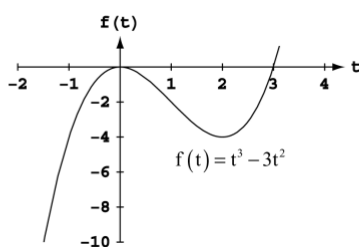
b)  $f(x) = (x + 1)^2 \Rightarrow f'(x) = 2(x + 1)$  por lo que existe un punto crítico en  $x = -1$ . La derivada es negativa si  $x < -1$  y positiva si  $-1 < x < 0$ , entonces  $f(0) = 1$  es un máximo local y  $f(-1) = 0$  es un mínimo local. Por lo tanto, no existe un máximo y el mínimo es  $f(-1) = 0$ .



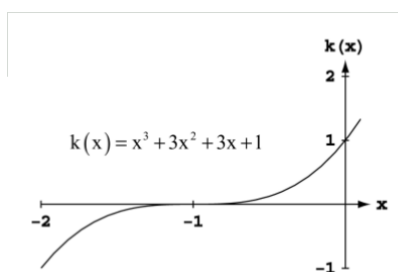
c)  $f(x) = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow f'(x) = 2x - 4 = 2(x - 2)$ ; es decir,  $f$  tiene un punto crítico en  $x = 2$ . La derivada de  $f$  es negativa si  $1 < x < 2$  y positiva si  $2 < x$  por lo que  $f(1) = 1$  es un máximo local y  $f(2) = 0$  es un mínimo local. Por lo tanto no hay máximo y el mínimo es  $f(0) = 2$ .



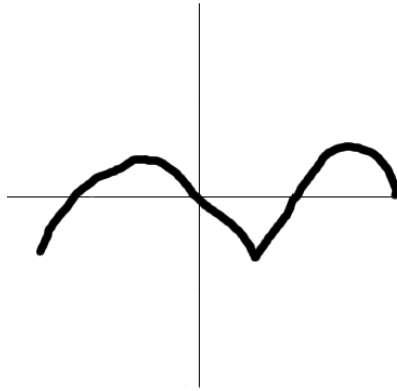
- d)  $f(x) = x^3 - 3x^2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$ , entonces existen puntos críticos en  $x = 0$  y  $x = 2$ . Alrededor de  $x = 0$ ,  $f'(x) > 0$  si  $x < 0$  y  $f'(x) < 0$  si  $0 < x < 2$ ; por otro lado  $f'(x) > 0$  si  $2 < x$ ; entonces  $f(0) = 0$  es un máximo local y  $f(2) = -4$  es un mínimo local, además  $f(-3) = -108$  es un mínimo local. La función tiene el mínimo en  $f(-3) = -108$ , sin embargo la función no tiene máximo.



- e)  $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 6x + 3 = 3(x + 1)^2$ , entonces existe un punto crítico en  $x = -1$ . La derivada de  $f$  es positiva si  $x < -1$  y negativa si  $-1 < x < 0$ , por lo que existe un máximo local en  $f(0) = 1$ . Por lo tanto el máximo es  $f(0) = 1$  y no existe mínimo.



10. Se presenta la gráfica de  $f$  en la siguiente figura, ¿cómo podría ser la gráfica de  $f'$ ?



*Solución.*

