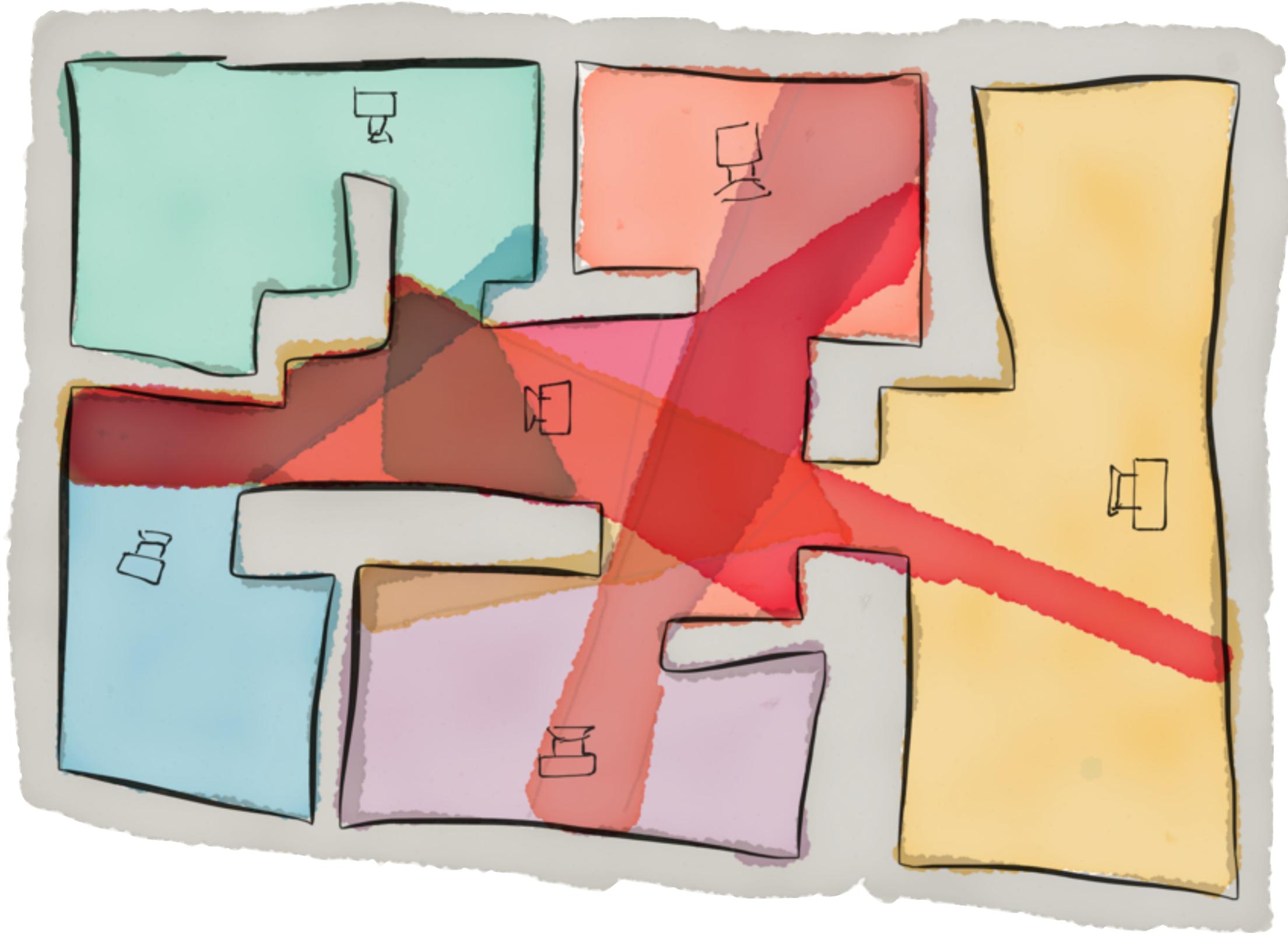


Triangulación de Polígonos: Problema de la Galería de Arte.



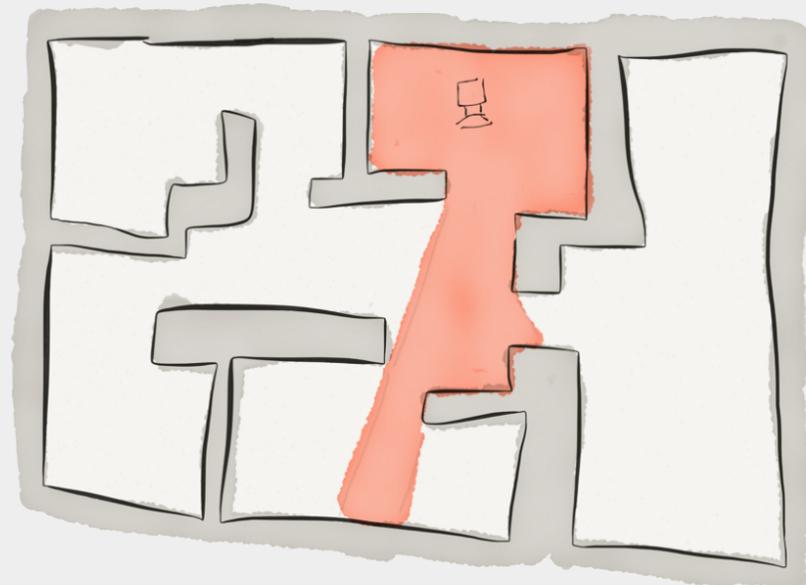
<http://ilevel.biz/wp-content/uploads/2013/07/Ricco-maresca-outsider-art-gallery-1024x576.png>



- ¿Cuántas cámaras necesitamos para vigilar una galería y cómo decidimos dónde ponerlas?

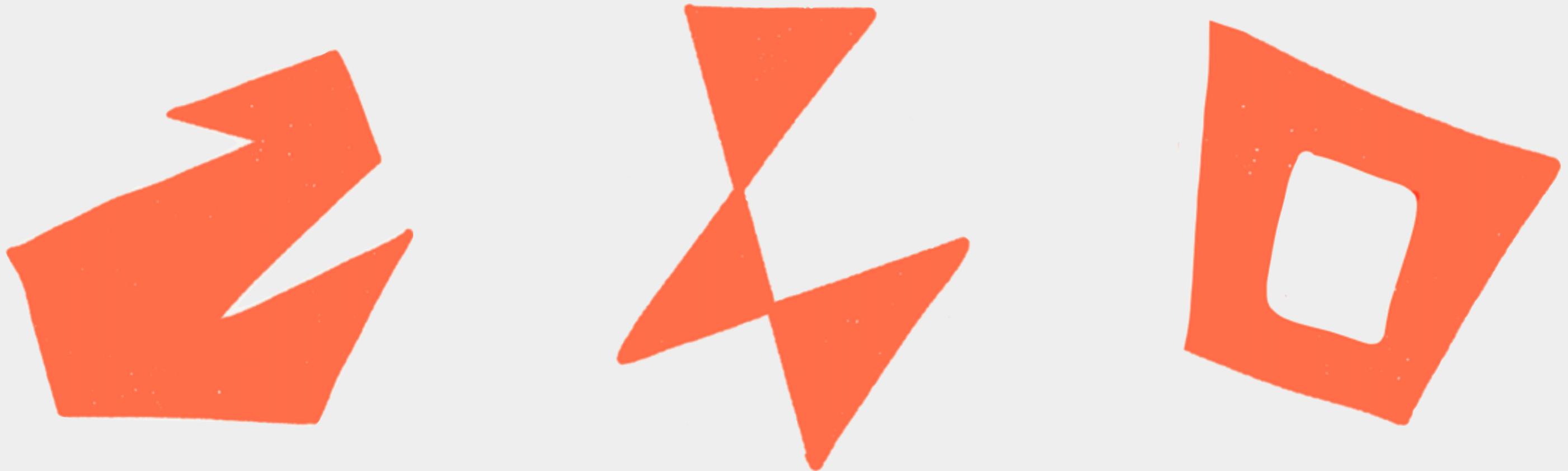
Problema de la Galería de Arte

- ▶ Galería: Región poligonal en \mathbb{R}^2 .
 - ▶ consideramos solamente polígonos simples (no auto-intersecciones, no hoyos).
- ▶ Posición de la cámara:
 - ▶ Punto en el polígono.
 - ▶ No hay restricciones de rango en la cámara.
 - ▶ ¿Cuándo ve una cámara a un punto del polígono?
 - ▶ Cuando el segmento de recta entre la posición de la cámara y el punto del polígono es un segmento abierto completamente contenido en el polígono.



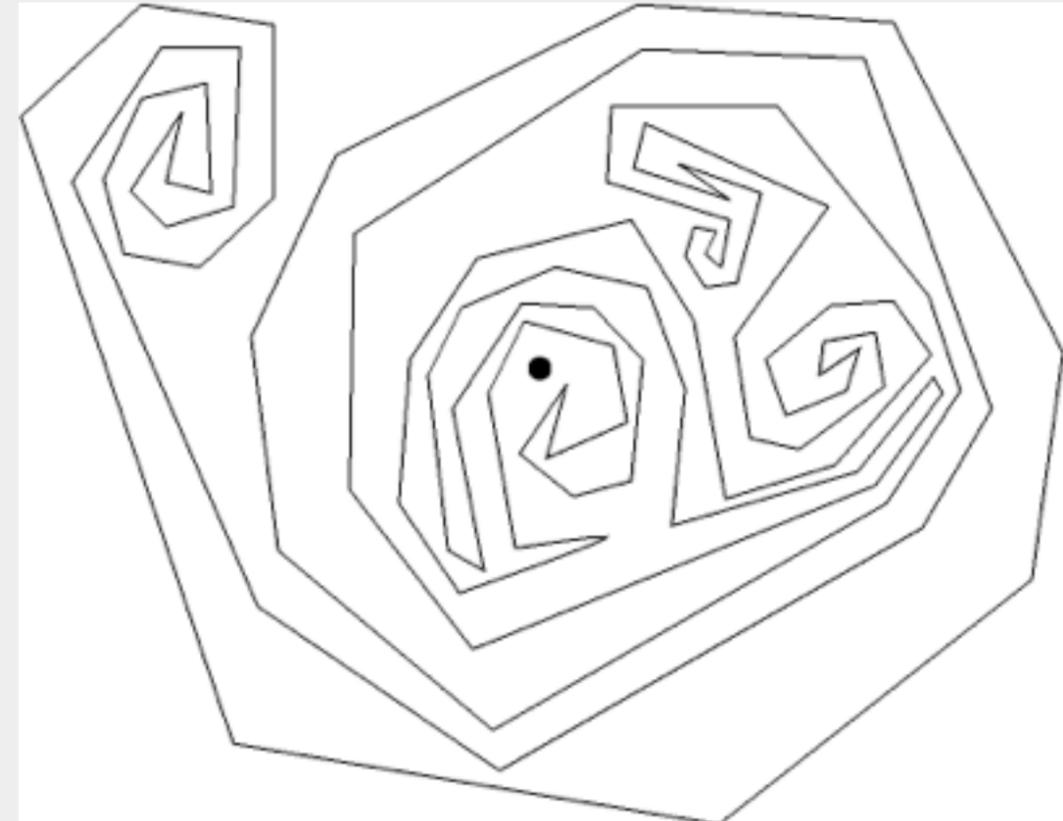
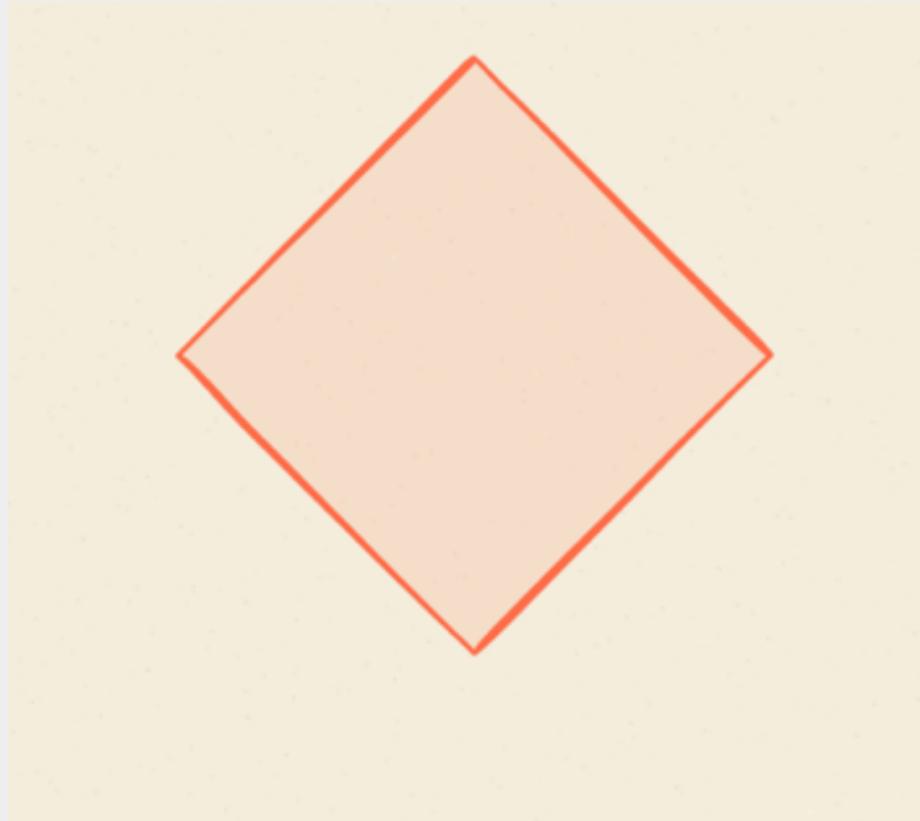
Polígono

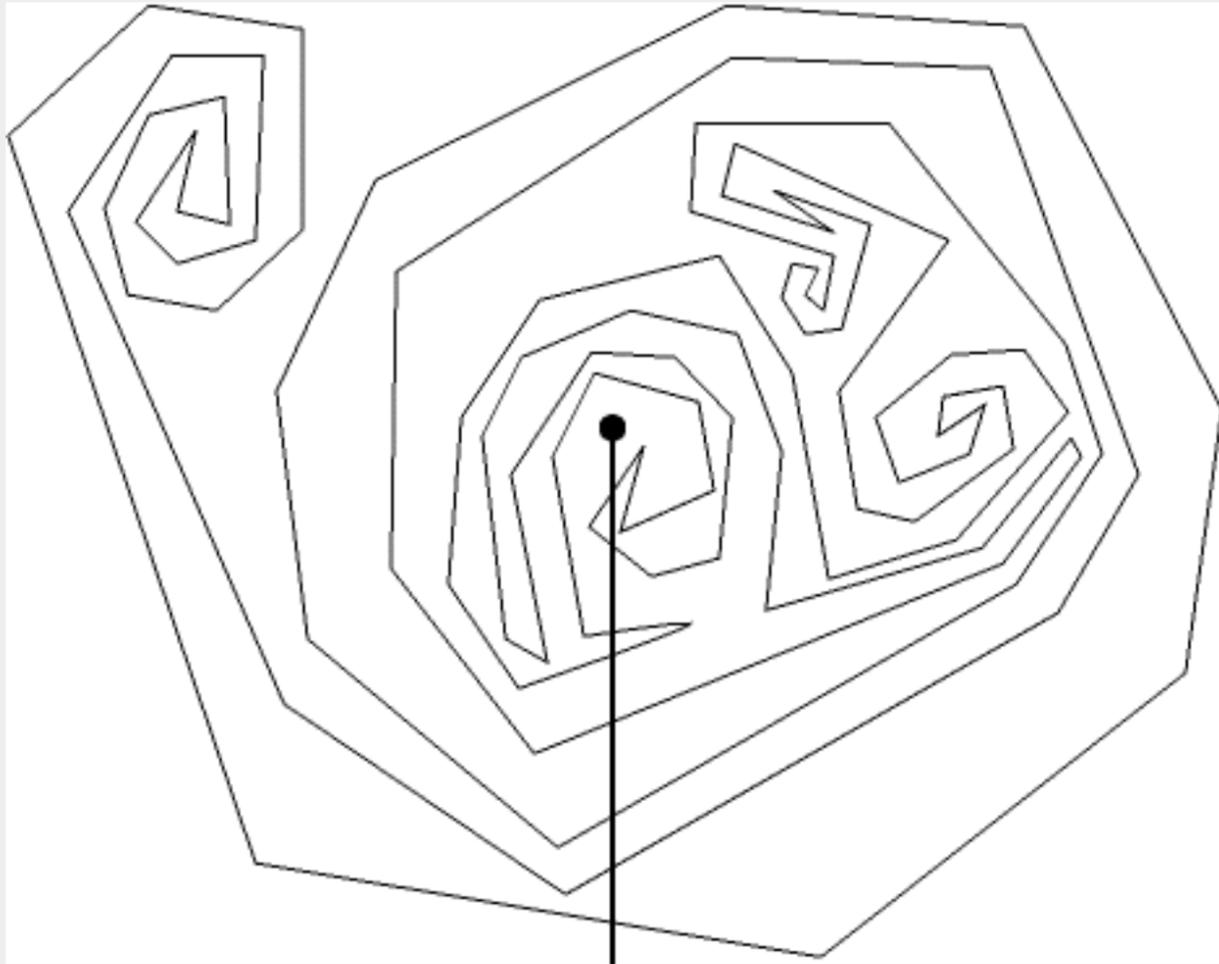
- ▶ Un polígono (simple) P es la región cerrada del plano, acotada por una colección finita de segmentos de recta que forman una curva cerrada que no se auto-interseca.



Teorema de curvas (polígonos) de Jordan

La frontera ∂P de un polígono P particiona el plano en dos partes. En particular, los dos componentes de $\mathbb{R}^2 \setminus \partial P$ son el interior acotado y el exterior no acotado.

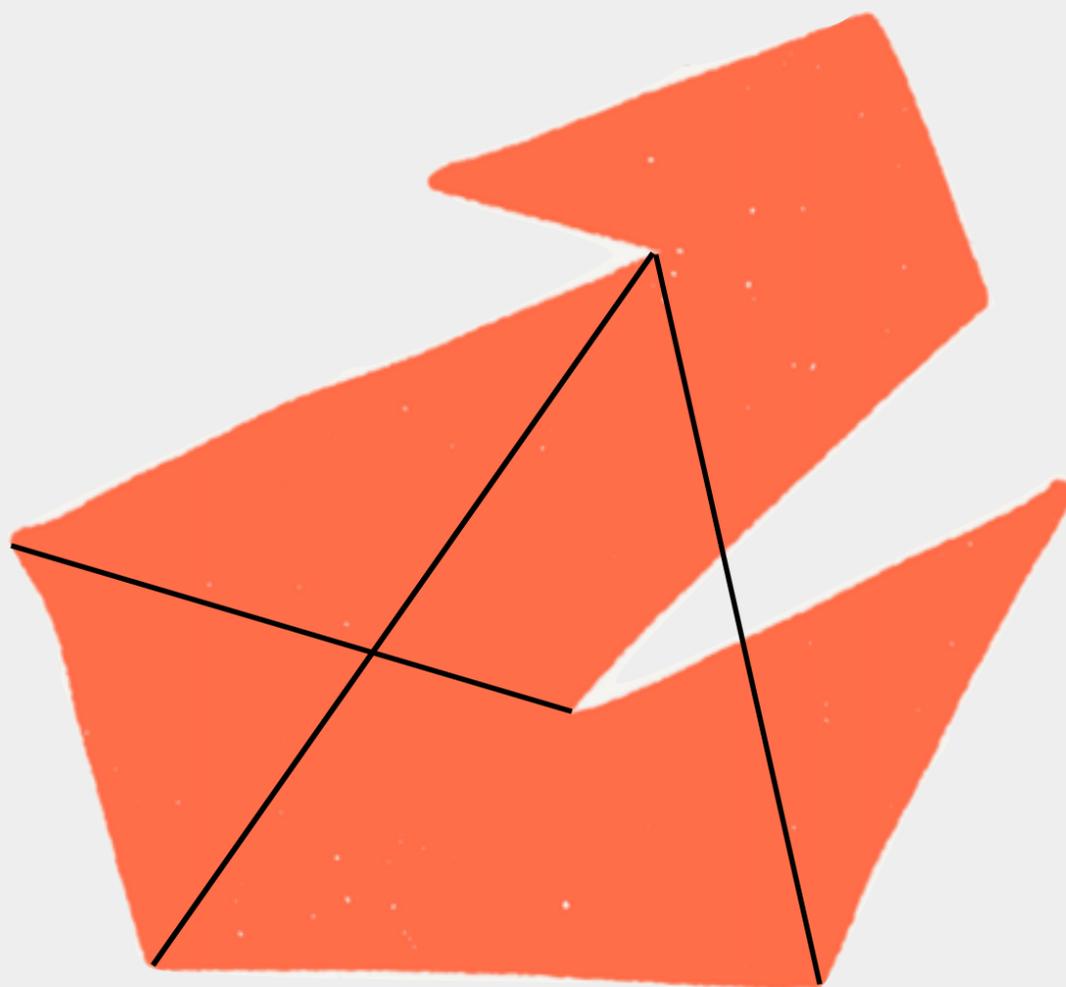




<https://www.ics.uci.edu/~eppstein/161/960307.html>

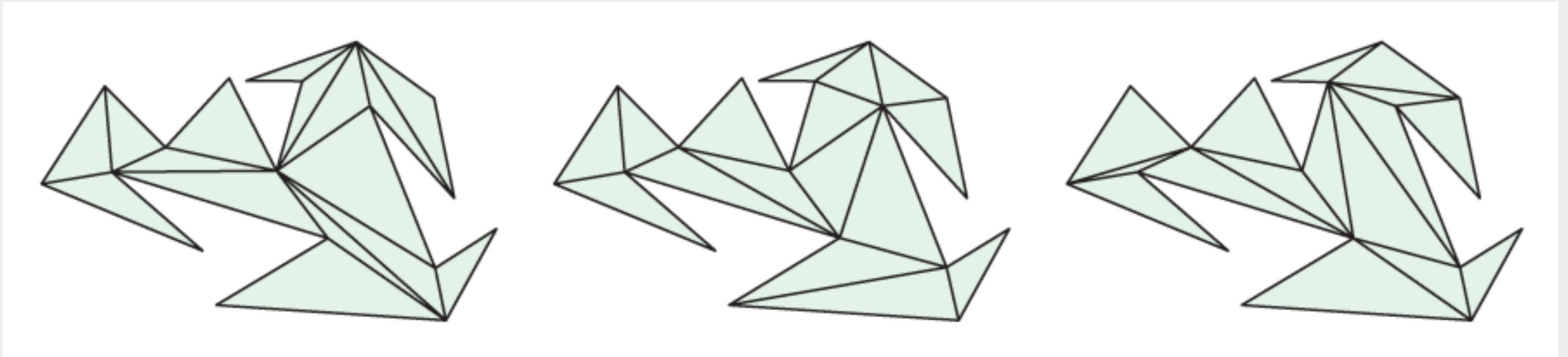
- ▶ Todos los puntos en un segmento de recta que no intersequen a ∂P deben estar en el mismo conjunto.
 - ▶ los conjuntos pares y los conjuntos impares están conectados.
- ▶ Si hay un camino entre puntos de diferentes conjuntos, entonces el camino debe intersecar a ∂P .

- ▶ Podemos obtener una descomposición de un polígono P en pedazos más simples por medio de **diagonales**.
- ▶ Una **diagonal** de un polígono, es un segmento de recta que conecta dos vértices de P y que está en el interior de P , sin tocar ∂P excepto en sus puntos extremos.
- ▶ Decimos que dos diagonales **no se cruzan** si no comparten ningún punto interior.



Triangulación de un polígono

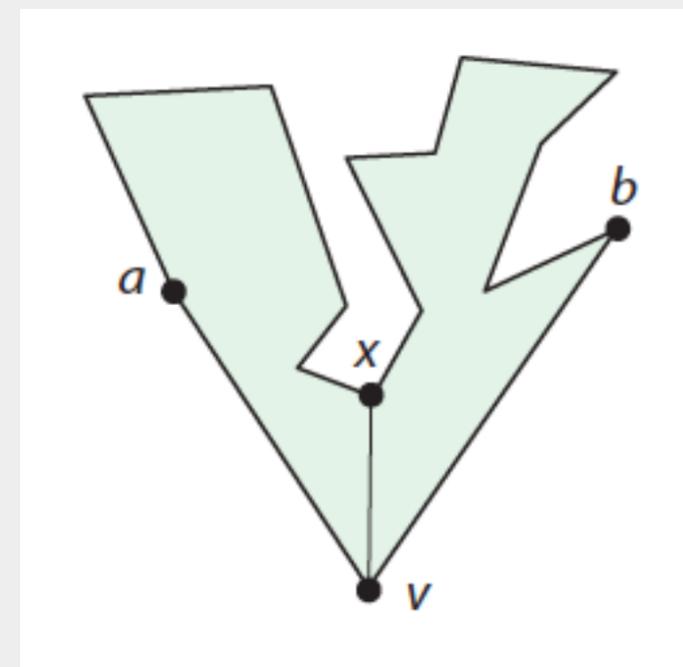
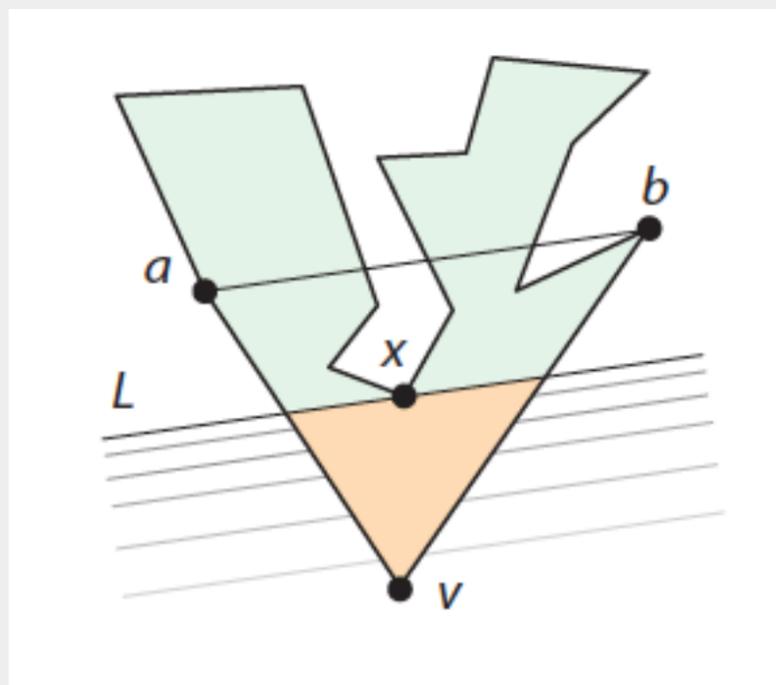
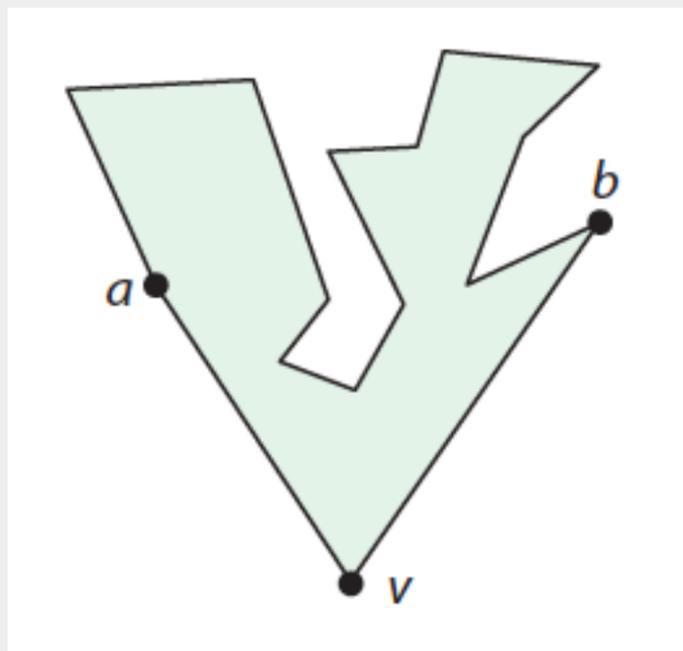
- ▶ Una triangulación de un polígono P es la descomposición de P en triángulos por un conjunto maximal de diagonales sin cruces.



Triangulaciones

- ▶ ¿Cuántas triangulaciones diferentes tiene un polígono?
- ▶ ¿Cuántos triángulos hay en cada triangulación de un polígono dado?
- ▶ ¿Es cierto que todo polígono tiene una triangulación?
- ▶ **¿Tiene que tener todo polígono al menos una diagonal?**

Todo polígono con más de tres vértices tiene una diagonal.



Devadoss, O'Rourke. Discrete and Computational Geometry.

- Como podemos descomponer cualquier polígono (con más de 3 vértices) en dos polígonos más pequeños usando una diagonal, por inducción vemos que existe una triangulación.

▶ Todo polígono tiene una triangulación.

Ejercicio:

▶ Probar que toda región poligonal con hoyos poligonales admite una triangulación de su interior.

Número de triángulos en una triangulación.

- ▶ Toda triangulación de un polígono **P** con **n** vértices tiene **n-2** triángulos y **n-3** diagonales.
- ▶ Muchas pruebas y algoritmos de triangulaciones de polígonos requieren de un triángulo particular para iniciar la inducción o la recursión.
- ▶ Triángulos "**oreja**": Tres vértices consecutivos a, b, c forman una oreja de un polígono si ac es una diagonal del polígono. El vértice b se llama punta de la oreja.

- ▶ El número de triangulaciones que tenga un polígono dado P dependerá de la “forma” del polígono.
- ▶ Una medida crucial de la forma son los ángulos internos en sus vértices.
- ▶ Un vértice de P se llama **reflex** si su ángulo es mayor a π .
- ▶ Un vértice de P se llama **convex** si su ángulo es menos o igual a π .
- ▶ Algunas veces distinguiremos a los vértices **flat** cuyo ángulo es exactamente π .
- ▶ Un vértices es **estrictamente convex** si su ángulo es estrictamente menor a π .
- ▶ Un **polígono** P es **convexo** si todos sus vértices son convex.

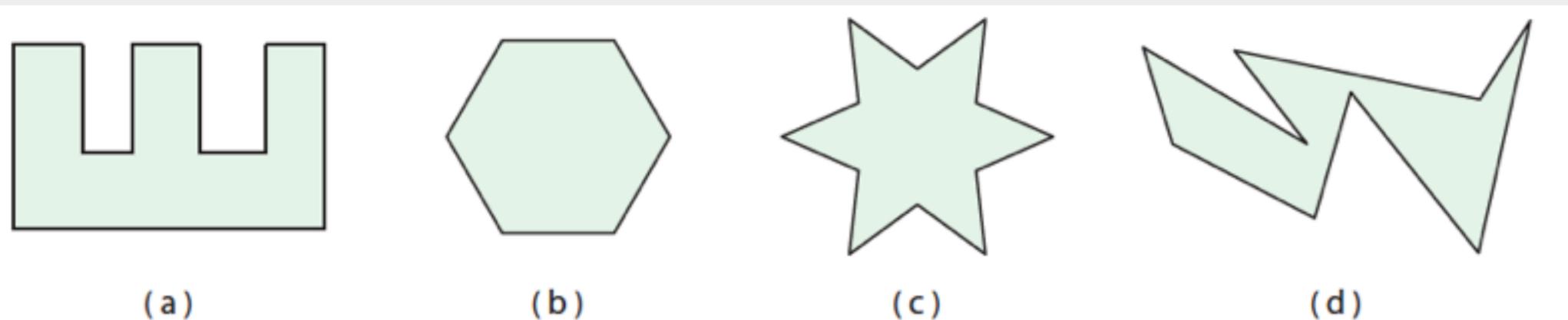


Figure 1.8. Find the number of distinct triangulations for each of the polygons given.

► Existe una diagonal entre cualquiera dos vértices no adyacentes de un polígono P si y solo si, P es un polígono convexo.

► Para un polígono convexo P, donde cada par de vértices no adyacentes determina una diagonal, es posible contar el **número de triangulaciones** de P usando solamente el número de vértices.

► El resultado es el **número de Catalan** (por el matemático belga Eugène Catalan).

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

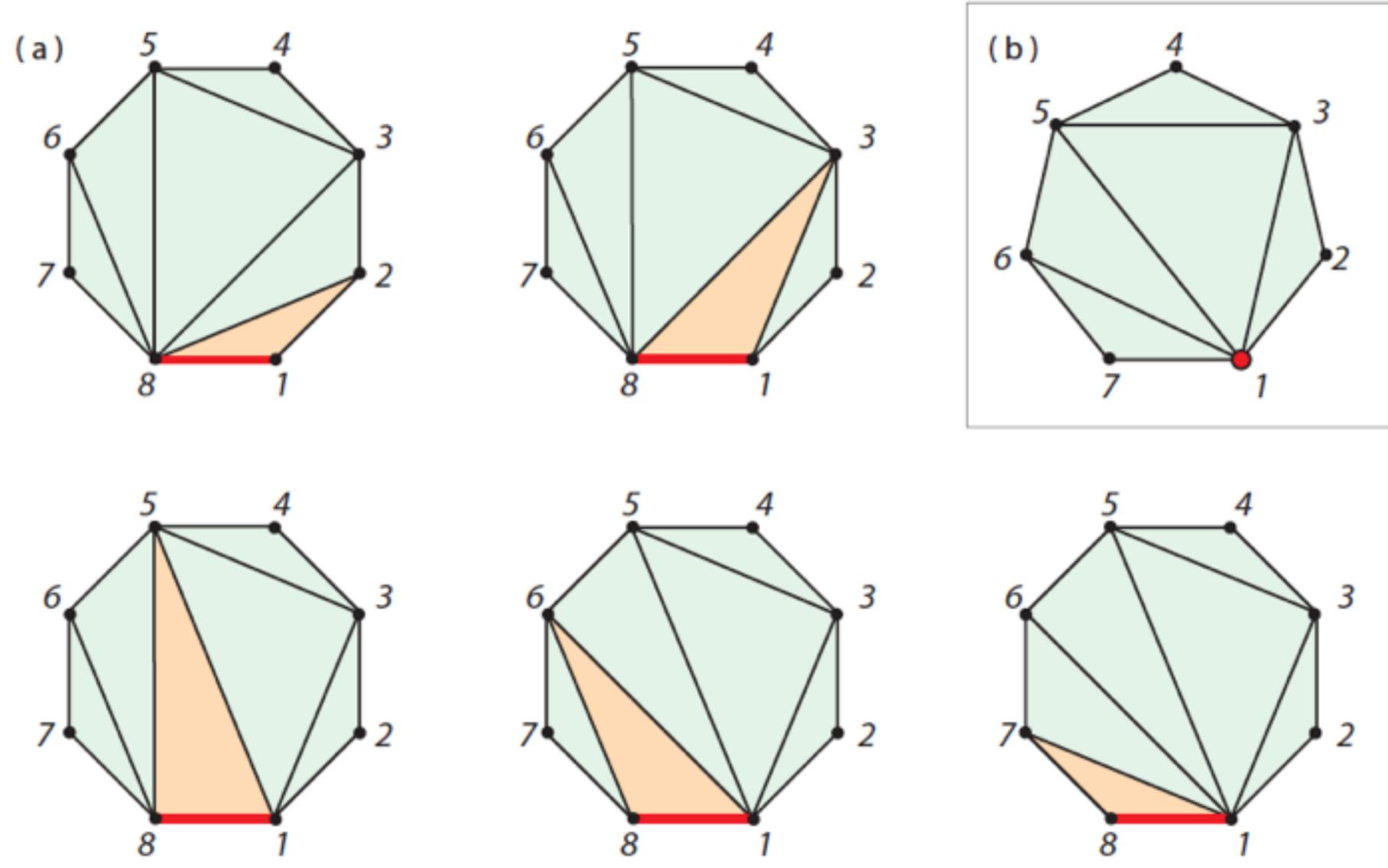
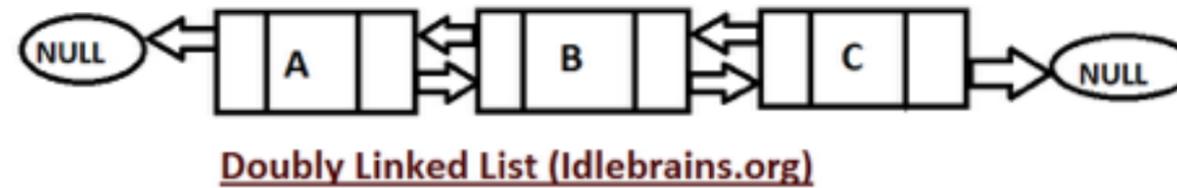


Figure 1.9. The five polygons in (a) all map to the same polygon in (b) under contraction of edge $\{1, 8\}$.

Ear clipping triangulation

- ▶ Una oreja de un polígono es un triángulo formado por tres vértices consecutivos dentro del cual no hay otro vértice del polígono.
- ▶ El segmento de recta entre v_{i-1} e v_{i+1} se llama diagonal.
- ▶ El vértice v_i se llama punta de la oreja.
- ▶ Un triángulo consiste en una sola oreja aunque se puede poner como punta de la oreja cualquiera de los tres vértices.
- ▶ Un polígono de cuatro o más lados siempre tiene al menos dos orejas que no se solapan (probado por *G.H. Meisters, Polygons have ears, Amer. Math. Monthly*). Esto sugiere un algoritmo recursivo para la triangulación.
- ▶ Si podemos encontrar una oreja en un polígono con $n \geq 4$ vértices y removerla, tendremos un polígono de $n-1$ vértices y podemos repetir el proceso.
- ▶ Una implementación inmediata tomaría $O(n^3)$.

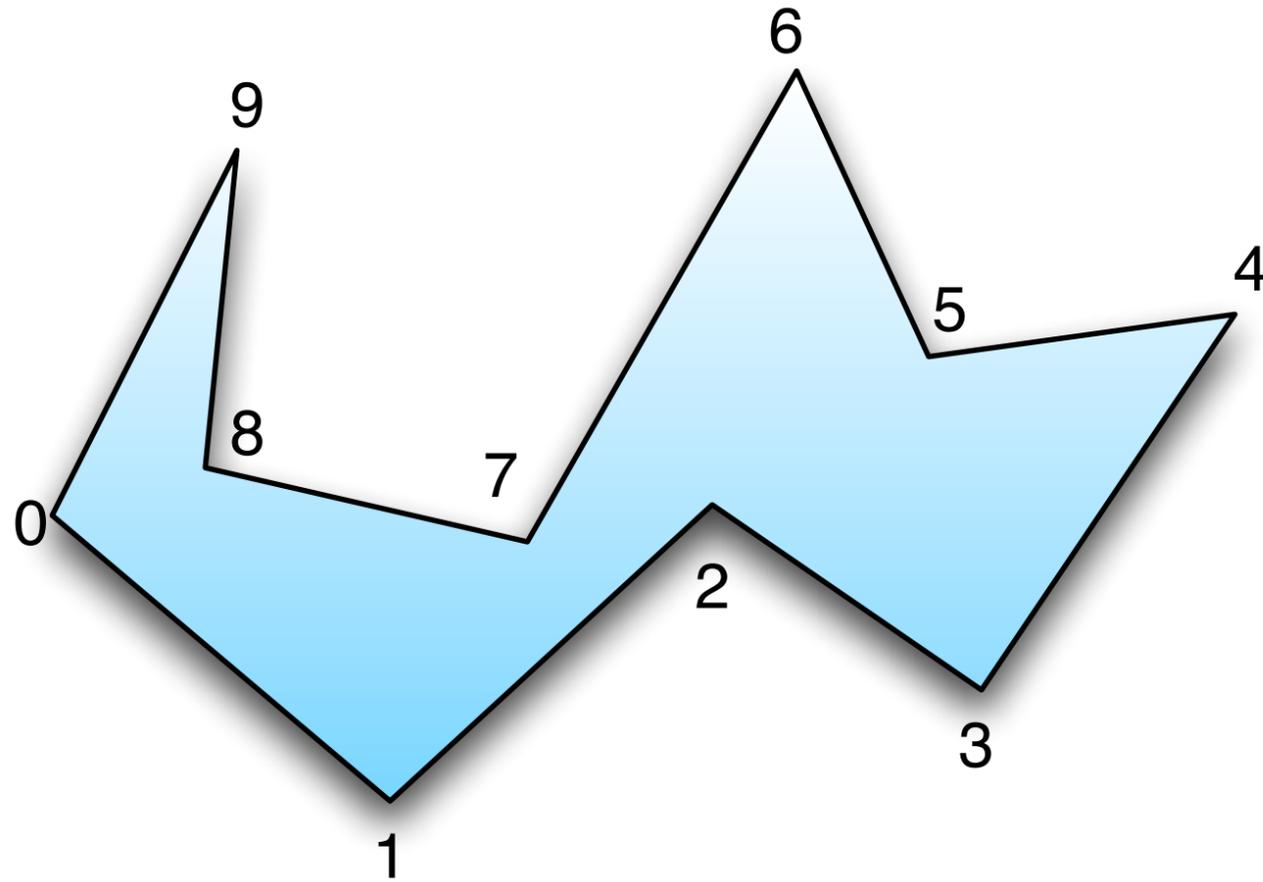
Ear clipping triangulation



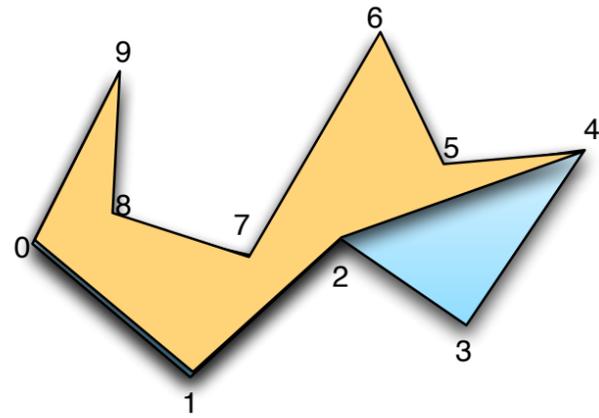
- ▶ Almacenar el polígono como una lista doblemente ligada de manera a poder eliminar rápidamente las puntas de las orejas:
 - construir la lista toma $O(n)$.
- ▶ Iterar sobre los vértices para encontrar orejas.
 - para cada vértice v_i y su triángulo correspondiente (v_{i-1}, v_i, v_{i+1}) (el indexado es módulo n por lo que $v_n = v_0$ y $v_{-1} = v_{n-1}$) probar todos los otros vértices para ver si hay alguno dentro del triángulo.
 - Si no hay ninguno dentro del triángulo es una oreja, si hay al menos uno no lo es.

- ▶ Una vez construida la lista inicial de vertices reflex y orejas, se eliminan las orejas una a una.
- ▶ si v_i es una oreja que se elimina, la configuración de la arista en los vertices adyacentes puede cambiar. Si el vertice adyacente es...
 - convexo es fácil convencerse que va a seguir siendo convexo.
 - oreja, no se queda oreja necesariamente después de eliminar a v_i .
 - reflex, es posible que se vuelva convexo o posiblemente oreja después de eliminar a v_i .
- ▶ Después de eliminar a v_i , si un vértice adyacente es convexo, probar si es una oreja iterando sobre los vértices reflex y probando si están contenidos en el triángulo de ese vertex. Hay $O(n)$ orejas, hay que verificar $O(n)$ veces por oreja. El proceso total de eliminación de orejas toma $O(n^2)$.

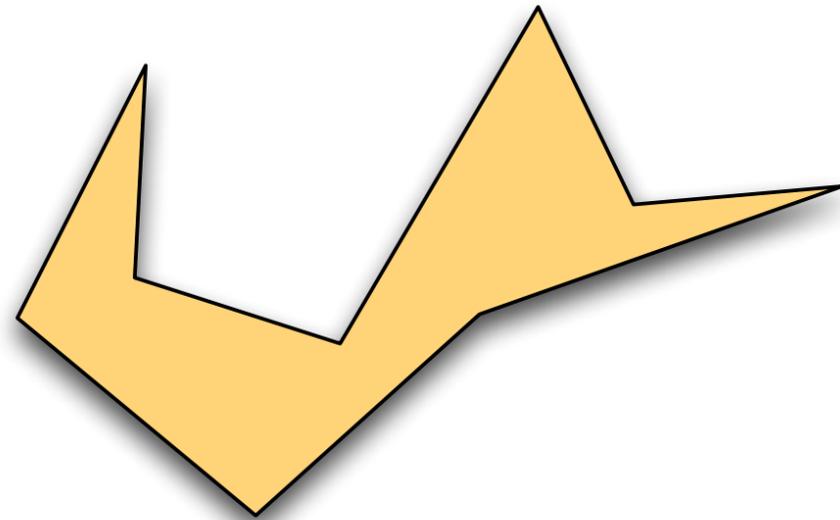
Ejemplo



- ▶ Vertices convex $C = \{ 0, 1, 3, 4, 6, 9 \}$
- ▶ Vertices reflex $R = \{ 2, 5, 7, 8 \}$
- ▶ Vertices oreja $E = \{ 3, 4, 6, 9 \}$



- ▶ Vertices convex $C = \{ 0, 1, 3, 4, 6, 9 \}$
- ▶ Vertices reflex $R = \{ 2, 5, 7, 8 \}$
- ▶ Vertices oreja $E = \{ 3, 4, 6, 9 \}$



- ▶ Eliminar oreja 3 :
- ▶ Primer triángulo en la triangulación $T_0 = \langle 2, 3, 4 \rangle$.