NORMALES

Computación Gráfica

Normales

- Importantes en CG para determinar cómo debe colorearse un punto sobre una superficie.
- Nos importa saber cómo se transforman las normales cuando se transforman las superficies.

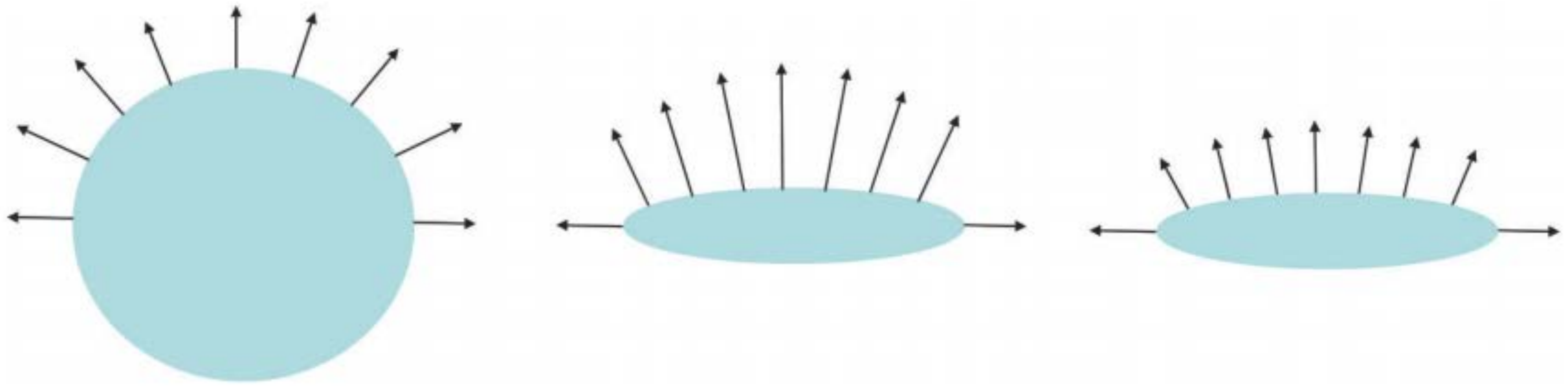


Figure 3.2
Left: Shape in blue with normals shown in black. Middle: Shape is shrunk in the *y* direction and the (unnormalized) normals are stretched in the *y* direction. Right: Normals are renormalized to give correct unit normals of squashed shape.

S.J. Gortler. Foundations of 3D Computer Graphics. MIT Press. 2012.

Normales

- La normal a una superficie suave en un punto es un vector ortogonal al plano tangente a la superficie en ese punto.
- El plano tangente es un plano de vectores que se define sustrayendo (infinitesimalmente) puntos vecinos en la superficie:

$$\vec{n} \cdot (\tilde{p_1} - \tilde{p_0}) = 0$$

- En un marco de referencia ortonormal esto se puede expresar:

$$\begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z & * \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = 0$$

S.J. Gortler. Foundations of 3D Computer Graphics. MIT Press. 2012.

Normales

- Supongamos transformar todos los puntos aplicando una transformación afín A.
- Podemos reescribir:

$$\begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z & * \end{bmatrix} A^{-1} \left(A \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \right) = 0$$

- Sean $\begin{bmatrix} x', & y', & z', & 1 \end{bmatrix}^t = A \begin{bmatrix} x, & y, & z, & 1 \end{bmatrix}^t$ las coordenadas de un punto transformado.
- Sea $\begin{bmatrix} n'_x, & n'_y, & n'_z, & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x, & n_y, & n_z, & 1 \end{bmatrix} A^{-1}$ entonces tenemos:

S.J. Gortler. Foundations of 3D Computer Graphics. MIT Press. 2012.

Normales

$$\begin{bmatrix} n'_x & n'_y & n'_z & * \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} x'_1 \\ y'_1 \\ z'_1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x'_0 \\ y'_0 \\ z'_0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = 0$$

- Vemos que $\begin{bmatrix} n'_x, & n'_y, & n'_z, & * \end{bmatrix}^t$ son coordenadas (a escala) de la normal de la geometría transformada.
- Como no nos importa el valor *, no nos importa la cuarta columna de A^{-1}.
- Como A es una transformación afín, A^{-1} también lo es así que el cuarto renglón de la matriz que queda son ceros y se puede ignorar también.

S.J. Gortler. Foundations of 3D Computer Graphics. MIT Press. 2012.

Normales

- Reescribiendo A como:

$$A = \begin{bmatrix} l & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

- vemos que:

$$\begin{bmatrix} n'_x & n'_y & n'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z \end{bmatrix} l^{-1},$$

- y transponiendo la expresión completa tenemos:

$$\begin{bmatrix} n'_x \\ n'_y \\ n'_z \end{bmatrix} = l^{-t} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix},$$

- donde l^{-t} es la inversa de la transpuesta de la matriz de 3x3.

S.J. Gortler. Foundations of 3D Computer Graphics. MIT Press. 2012.

Normales

- Si I es una matriz de rotación, la matriz es ortonormal y entonces su inversa transpuesta es igual a I.
- En este caso las coordenadas de la normal se comporta igual que las coordenadas de un punto.
- Para otras transformaciones lineales las normales se comportan diferente.
- La parte translacional de A no tiene efecto sobre las normales.

S.J. Gortler. Foundations of 3D Computer Graphics. MIT Press. 2012.

MARCOS DE REFERENCIA

Computación Gráfica

Marcos de referencia

- Además de las coordenadas de un punto y una matriz de tranformación, hay que especificar su marco de referencia.
- Ejemplo.

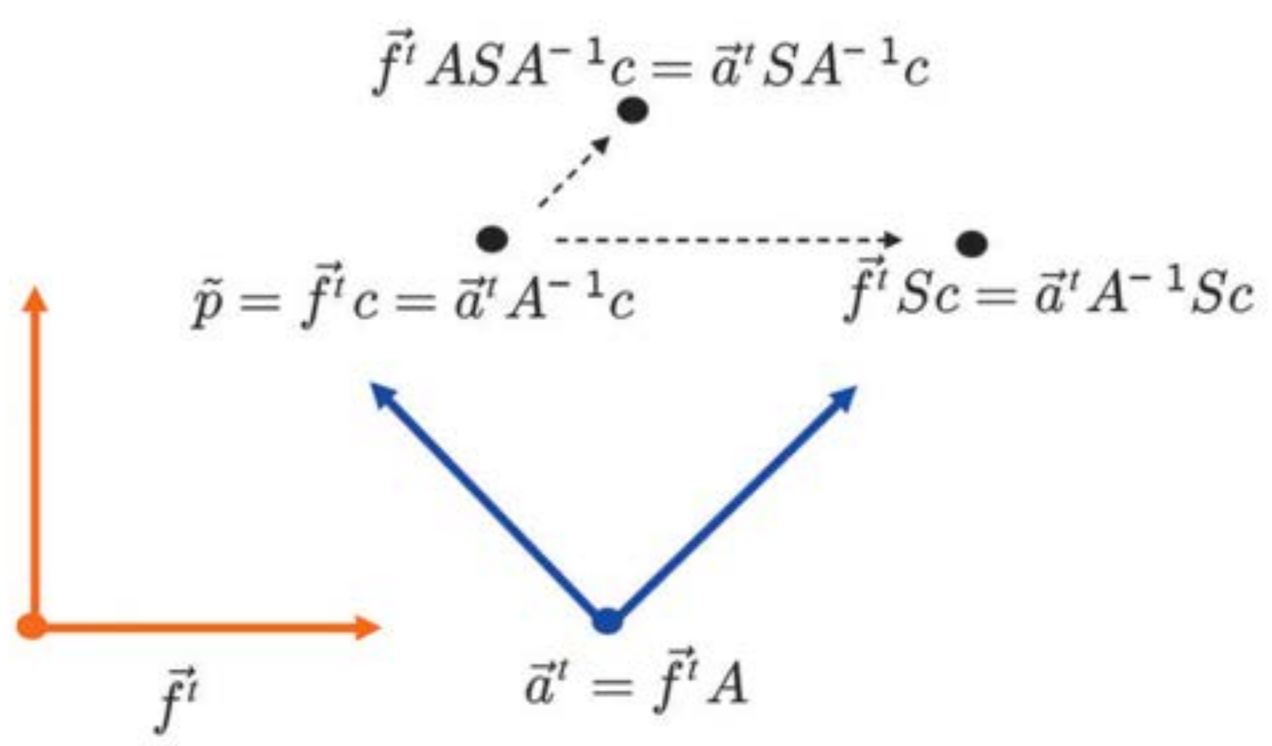


Figure 4.1
The scaling matrix S is used to scale the point $\tilde{p}$ with respect to two different frames. This results in two different answers.

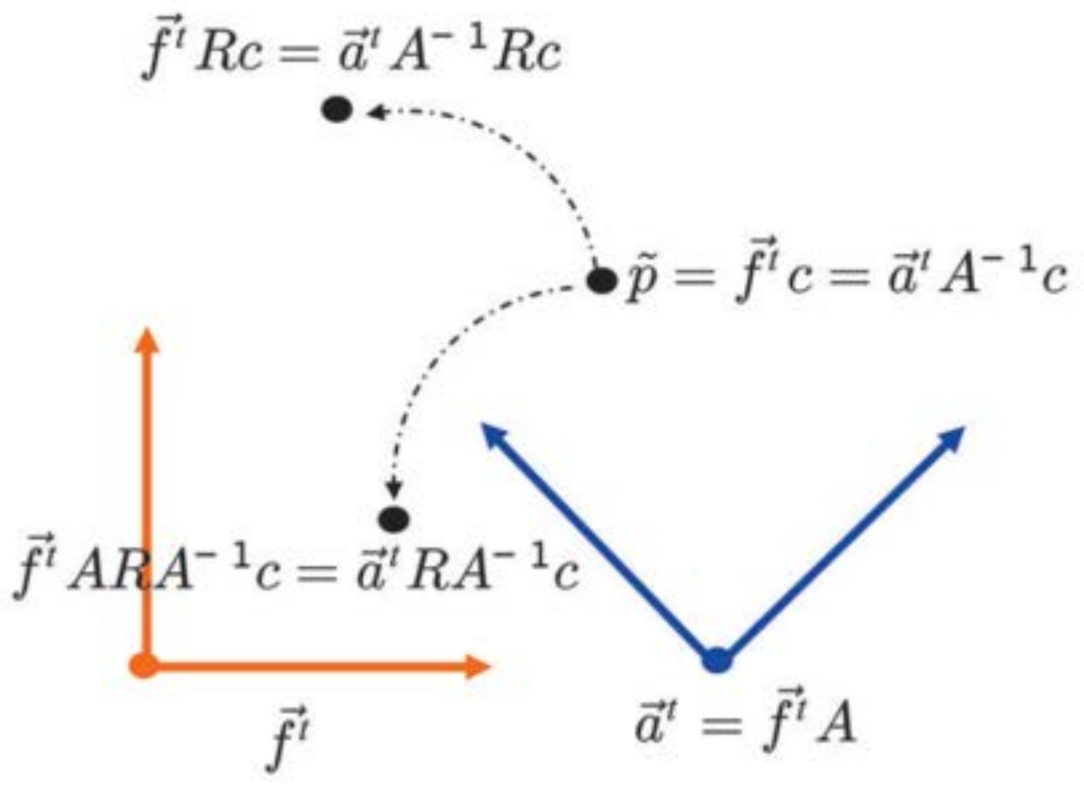


Figure 4.2
The rotation matrix R is used to rotate the point $\tilde{p}$ with respect to two different frames. This results in two different answers.

- El punto es transformado respecto al marco que aparece inmediatamente a la izquierda de la matriz de transformación en la expresión.

S.J. Gortler. Foundations of 3D Computer Graphics. MIT Press. 2012.

"Left-of" rule

$\tilde{p} = \vec{\mathbf{f}}^t \mathbf{c} \Rightarrow \vec{\mathbf{f}}^t S \mathbf{c}$

"$\tilde{p}$ es transformada por S respecto a $\vec{\mathbf{f}}^t$"

$\tilde{p} = \vec{\mathbf{a}}^t A^{-1} \mathbf{c} \Rightarrow \vec{\mathbf{a}}^t S A^{-1} \mathbf{c}$

"$\tilde{p}$ es transformada por S respecto a $\vec{\mathbf{a}}^t$"

$\vec{\mathbf{f}}^t \Rightarrow \vec{\mathbf{f}}^t S$

"$\vec{\mathbf{f}}^t$ es transformada por S respecto a $\vec{\mathbf{f}}^t$"

$\vec{\mathbf{f}}^t = \vec{\mathbf{a}}^t A^{-1} \Rightarrow \vec{\mathbf{a}}^t S A^{-1}$

"$\vec{\mathbf{f}}^t$ es transformada por S respecto a $\vec{\mathbf{a}}^t$"

S.J. Gortler. Foundations of 3D Computer Graphics. MIT Press. 2012.

Transformaciones con un marco de referencia auxiliar

- Transformar un marco por una matriz M respecto a otro marco auxiliar.
- Ej. Especificar la tierra respecto a un marco, luego rotar la tierra alrededor del marco de referencia del sol.
- Fácil de hacer mientras conozcamos la relación entre los marcos.

$$\vec{\mathbf{a}}^t = \vec{\mathbf{f}}^t A$$

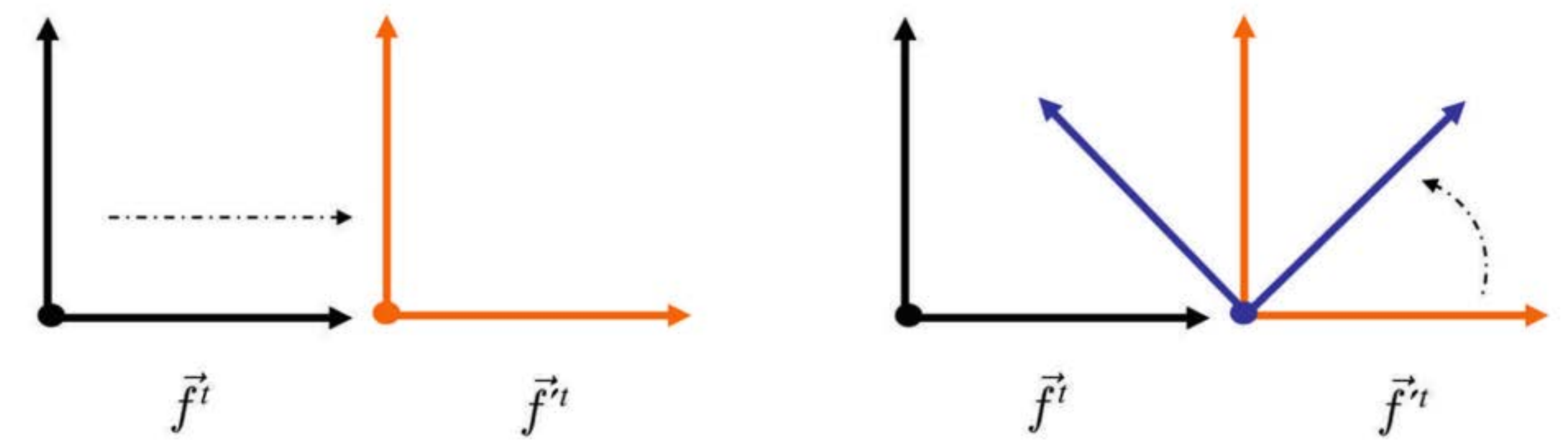
- El marco transformado se puede expresar como:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{f}}^t &= \vec{\mathbf{a}}^t A^{-1} \\ &\Rightarrow \vec{\mathbf{a}}^t M A^{-1} \\ &= \vec{\mathbf{f}}^t A M A^{-1} \end{aligned}$$

S.J. Gortler. Foundations of 3D Computer Graphics. MIT Press. 2012.

Transformaciones Múltiples

- Recordemos que en general la multiplicación de matrices es no-conmutativa.
- Ej. rotación R que rota por θ alrededor del marco de referencia y translación T por una unidad en dirección del primer eje.

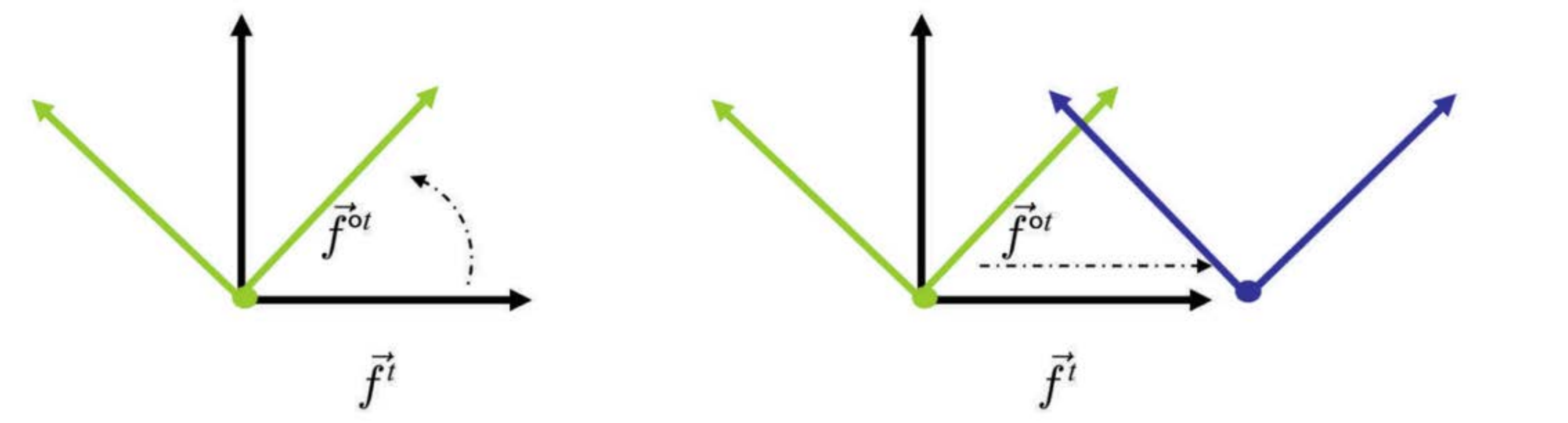


(a) Local translation (a) Local rotation

S.J. Gortler. Foundations of 3D Computer Graphics. MIT Press. 2012.

Transformaciones Múltiples

- Recordemos que en general la multiplicación de matrices es no-conmutativa.
- Ej. rotación R que rota por θ alrededor del marco de referencia y translación T por una unidad en dirección del primer eje.



(c) Global rotation (c) Global translation

S.J. Gortler. Foundations of 3D Computer Graphics. MIT Press. 2012.

Transformaciones Múltiples

- Estas son dos interpretaciones diferentes de las mismas transformaciones compuestas finales.
  - translадar respecto a un primer marco, luego rotar respecto a un marco intermedio.
  - o rotar respecto al primer marco y transladar respecto al mismo marco de referencia (original).
  - Algunas veces nos conviene usar la primera interpretación, otras veces la segunda.
  - Si leemos las transformaciones de izquierda a derecha, cada transformación se habrá hecho respecto a un marco de referencia "local" recién creado.
  - Si leemos las transformaciones de derecha a izquierda, cada transformación se hará respecto al marco de referencia "original".

S.J. Gortler. Foundations of 3D Computer Graphics. MIT Press. 2012.

Marcos de referencia en CG

- Marco del mundo (world frame): $\vec{\mathbf{w}}^t$
- de mano derecha,
- no lo vamos a alterar.
- describimos otros marcos respecto al marco del mundo.
- si expresamos un vector de coordenadas respecto a este marco, les llamamos coordenadas del mundo (world coordinates).

S.J. Gortler. Foundations of 3D Computer Graphics. MIT Press. 2012.

Object Frame

- Asociamos uno a cada objeto de la escena.
- vector de coordenadas de objeto.
- Para transformar un objeto transformamos su marco de referencia de objeto.
- La relación entre el marco del objeto y el marco del mundo se puede escribir con una transformación afín (matriz 4x4) O.

$$\vec{\mathbf{o}}^t = \vec{\mathbf{w}}^t O$$

- Para mover un objeto en la escena cambiamos entonces la matriz O.

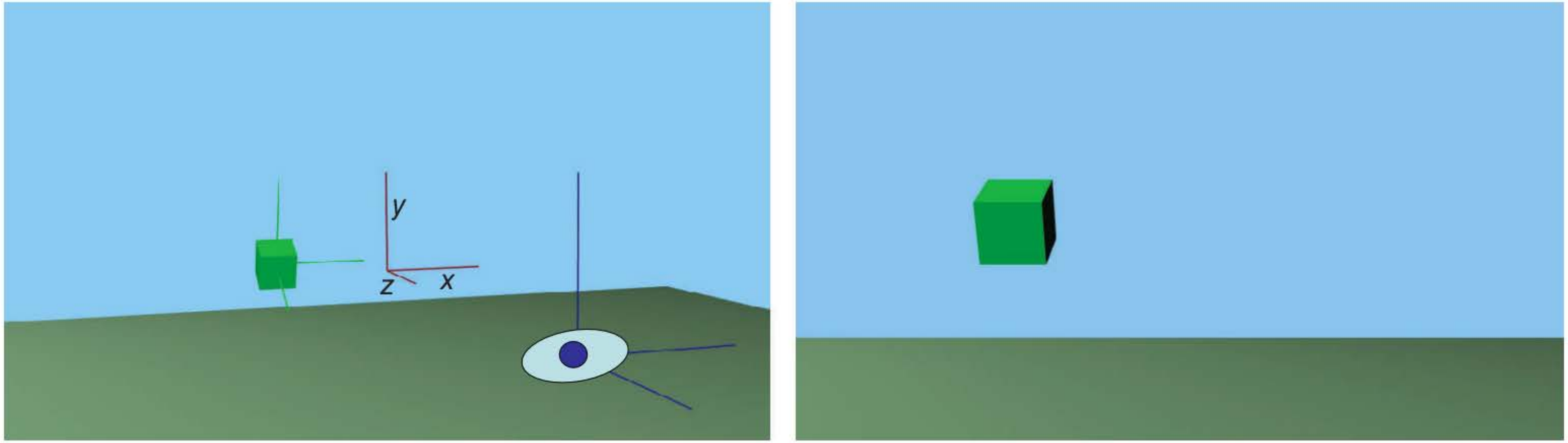
S.J. Gortler. Foundations of 3D Computer Graphics. MIT Press. 2012.

Camera Frame

- En el mundo real, queremos crear una imagen 2D de un ambiente 3D.
- Para esto ponemos una cámara en la escena.
- La posición de cada objeto en la imagen se basa en su relación 3D con la cámara (sus coordenadas respecto una base apropiada).
- Definimos un marco de referencia $\mathbf{e}^t$ llamado "eye frame".
- Se interpreta un ojo viendo hacia su eje z negativo para hacer una foto.
- El marco de la cámara se relaciona con una matriz de transformación 4x4 E.

S.J. Gortler. Foundations of 3D Computer Graphics. MIT Press. 2012.

Marcos de Referencia



(a) The frames

(b) The eye's view

Figure 5.1
The world frame is in red, the object frame is in green, and the eye frame is in blue. The eye is looking down its negative z axis toward the object.