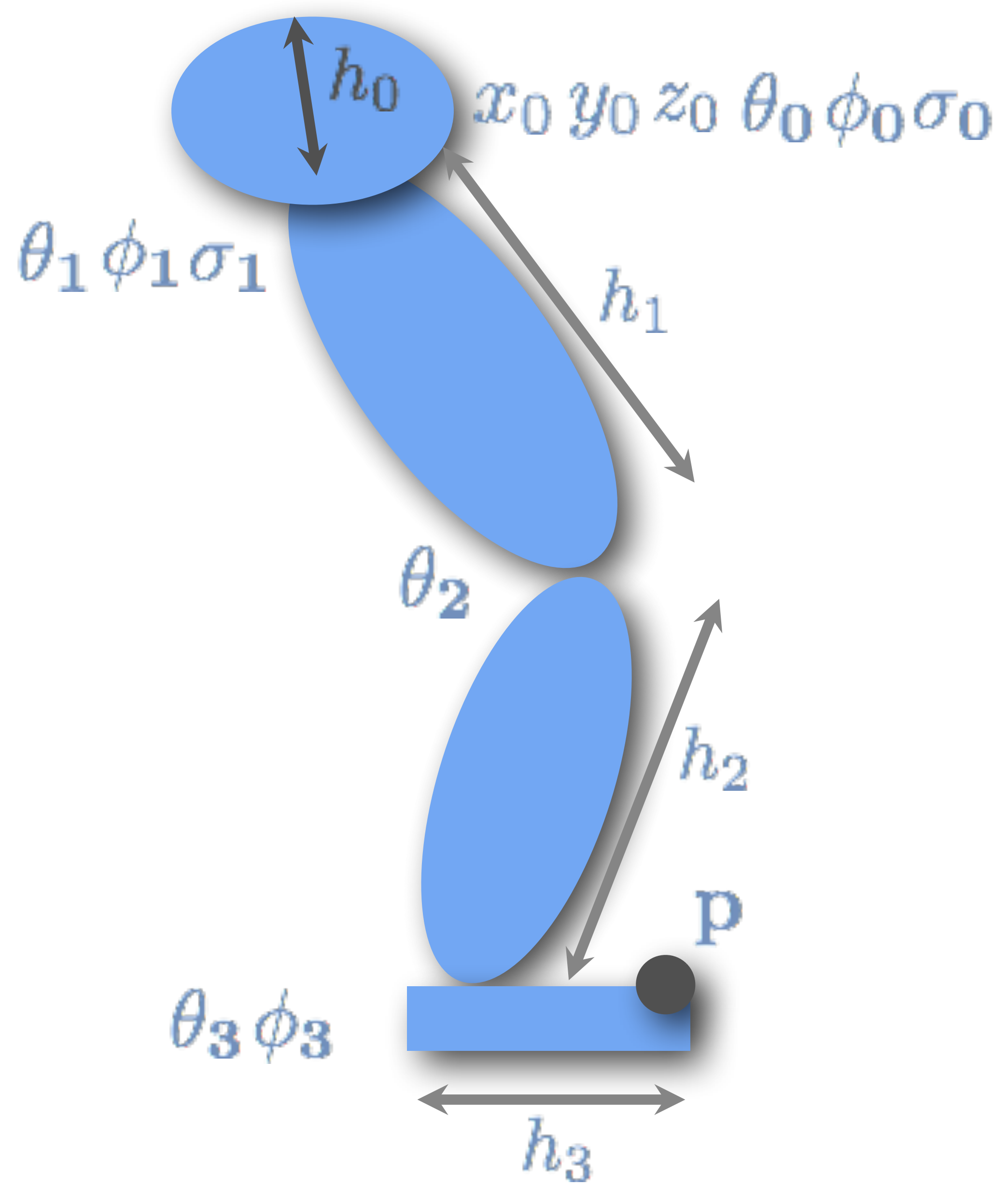
PARAMETRIZACIÓN DE ORIENTACIONES

Computación Gráfica

- La configuración de un cuerpo rígido en 3D se define usualmente con todas sus posibles posiciones y orientaciones de un marco de referencia fijo respecto al mundo.
- Su espacio de configuración se identifica con el grupo SE(3) : grupo Euclideano especial en 3-dimensiones.
- **Orientación:** configuración rotacional instantánea de un objeto.
- Equivalente rotacional de la posición.
- Diferentes representaciones para la orientación.



Una serie de transformaciones a un objeto se pueden aplicar como una serie de multiplicaciones de matrices.

$\mathbf{p}$: posición en coordenadas globales

$\mathbf{x}$: posición en coordenadas locales $(h_3, 0, 0)$

$$\mathbf{p} = \mathbf{T}(x_0, y_0, z_0)\mathbf{R}(\theta_0)\mathbf{R}(\phi_0)\mathbf{R}(\sigma_0)\mathbf{T}(0, h_0, 0)\mathbf{R}(\theta_1)\mathbf{R}(\phi_1)\mathbf{R}(\sigma_1)\mathbf{T}(0, h_1, 0)\mathbf{R}(\theta_2)\mathbf{T}(0, h_2, 0)\mathbf{R}(\theta_3)\mathbf{R}(\phi_3)\mathbf{x}$$

Representación de una orientación arbitraria

- Matrices de transformación SO(3)
- Ángulos de Euler.
- Cuaternios.
- Mapa exponencial.

Matrices de rotación

- Sea $R \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ una matriz de rotación y sean $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}^3$ sus columnas mutuamente ortonormales:

$$r_i^T r_j = \begin{cases} 0, & \text{if } i \neq j \\ 1, & \text{if } i = j \end{cases}$$

- Las matrices de rotación cumplen:

$$RR^T = R^T R = I$$

$$\det R = \pm 1.$$

- Un marco de referencia de mano derecha se representa con matrices ortogonales con determinante 1.
- El conjunto de todas las matrices de 3x3 que satisfacen estas propiedades se llama SO(3) - special orthogonal.

Murray, R.,Li Z., Sastry S. A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation

Matrices de rotación

- Más generalmente, definimos el espacio de matrices de rotación en $\mathbb{R}^{n\times n}$ por:

$$SO(n) = \{R \in \mathbb{R}^{n\times n} : RR^T = I, \det\, R = \pm 1\}.$$

- Nos interesamos particularmente por el caso **n=3**.

- $SO(3) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ es un grupo bajo la operación de multiplicación de matrices:

1. Si $R_1, R_2 \in SO(3)$, entonces $R_1 R_2 \in SO(3)$ porque: ☞ **cerradura (closure)**

$$R_1 R_2 (R_1 R_2)^T = R_1 R_2 R_2^T R_1^T = R_1 R_1^T = I$$

$$\det(R_1 R_2) = \det(R_1)\det(R_2) = +1.$$

Murray, R.,Li Z., Sastry S. A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation

Matrices de rotación

2. La matriz identidad es el elemento identidad. ☜ **identidad**

3. La inversa de R en SO(3) es R^T en SO(3). ☜ **inversa**

4. La asociatividad del grupo sigue de la asociatividad de la multiplicación de matrices: $(R_1 R_2) R_3 = R_1 (R_2 R_3)$ ☜ **asociatividad**

- Cada configuración de un cuerpo rígido libre de rotar relativo a un marco de referencia fijo, se puede identificar con una única **R en SO(3)**.

- Bajo esta identificación, el grupo de rotación **SO(3)** se llama también **espacio de configuración** del sistema y una trayectoria para este sistema es una curva **R(t) en SO(3)** para **t** entre **[0,T]**.

Murray, R.,Li Z., Sastry S. A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation

Matrices de Rotación

- Sirven también como transformaciones que llevan las coordenadas de un punto de un marco a otro.
- Se pueden combinar las matrices para formar nuevas matrices de rotación usando multiplicación de matrices.
- Dado $R \in SO(3)$ y $v, w \in \mathbb{R}^3$ se mantienen las siguientes propiedades:

$$R(v \times w) = (Rv) \times (Rw)$$

$$R(w)^\wedge R^T = (Rw)^\wedge$$

$$a \times b = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix} \qquad (a)^\wedge = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \qquad a \times b = (a)^\wedge b$$

Murray, R.,Li Z., Sastry S. A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation

Matrices de Rotación

- Las rotaciones son transformaciones de cuerpo rígido:
- R preserva distancia:

$$\|Rq - Rp\| = \|q - p\| \ \ \forall \ \ q, p \in \mathbb{R}^3$$

- R preserva orientación:

$$R(v \times w) = Rv \times Rw \ \ \forall \ \ v, w \in \mathbb{R}^3$$

Murray, R.,Li Z., Sastry S. A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation

Matrices de rotación

- Matrices de transformación de 4x4

$$\begin{matrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a & b & c & t_x \\ e & f & g & t_y \\ i & j & k & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

> Matrices de rotación:

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Matrices de rotación R

- Matrices ortonormales de 3x3 con determinante unitario.
- A pesar de tener 9 números, tienen 6 restricciones:
  - 3 para mantener las columnas de R unitarias,
  - 3 para mantener ortogonalidad entre columnas.
- 9-6 = 3 grados de libertad.
- Ineficientes en cuanto al espacio en memoria utilizado.
- Muchas veces resultan en acumulación de error de punto flotante al hacer componer rotaciones.
- No está claro cómo definir facilmente una función $\rho(R_1, R_2)$ que represente la distancia entre dos matrices de rotación.
- Interpolación de matrices de rotación: ¿rotaciones intermedias?

Matrices de rotación

- una interpolación directa de orientaciones no es aceptable en muchos casos:
  - ir de una orientación de 90 grados en el eje-y a una orientación de -90 grados en el eje y:

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}$$

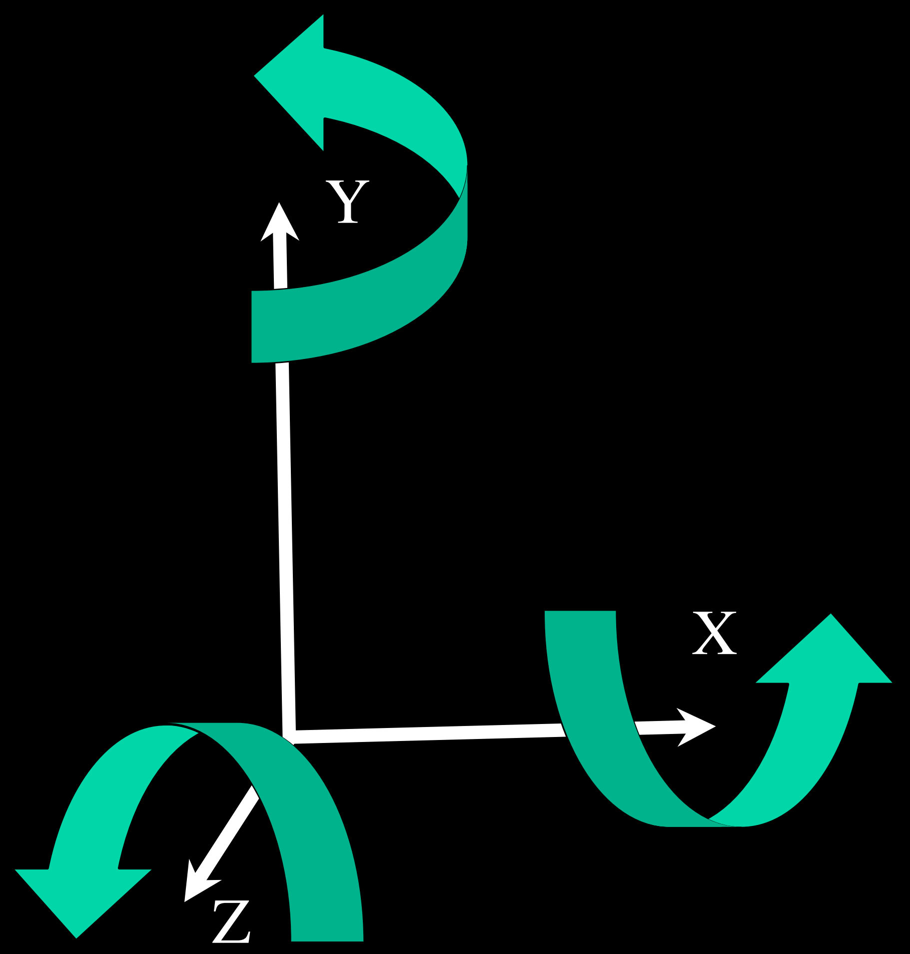
- Representación práctica para componer rotaciones.
- Preservan longitudes (isométricas)
- Ortonormales

Ángulos de Euler

- De acuerdo al Teorema de rotación de Euler, cualquier orientación se puede describir por tres rotaciones sucesivas (θ, φ, η) alrededor de un conjunto de tres ejes (v_1, v_2, v_3).
- Como las rotaciones no conmutan, el orden en que las rotaciones se aplican sobre los ejes es importante.
- Hay al menos 24 convenciones estándar para utilizar los ángulos de Euler, dependiendo de qué ejes se usen y el orden en que se apliquen las rotaciones.
- Notación compacta: 3 ángulos para 3 grados de libertad.
- Estable numéricamente, eficiente computacionalmente, intuitiva.
- Múltiples conjuntos de parámetros que llevan a la misma rotación, llevando a una ambiguedad fundamental.

Ángulos fijos: ejes globales

- Ángulos usados para rotar sobre ejes fijos.
- El orden de las rotaciones está implícito x-y-z.
- Se puede especificar otro orden: x-y-x, con excepción de aquellos con dos rotaciones sobre el mismo eje como: x-x-y.
- La orientación entonces son 3 parámetros, e.g. (10,45,90)
  - > $R_z(90)R_y(45)R_x(10)$



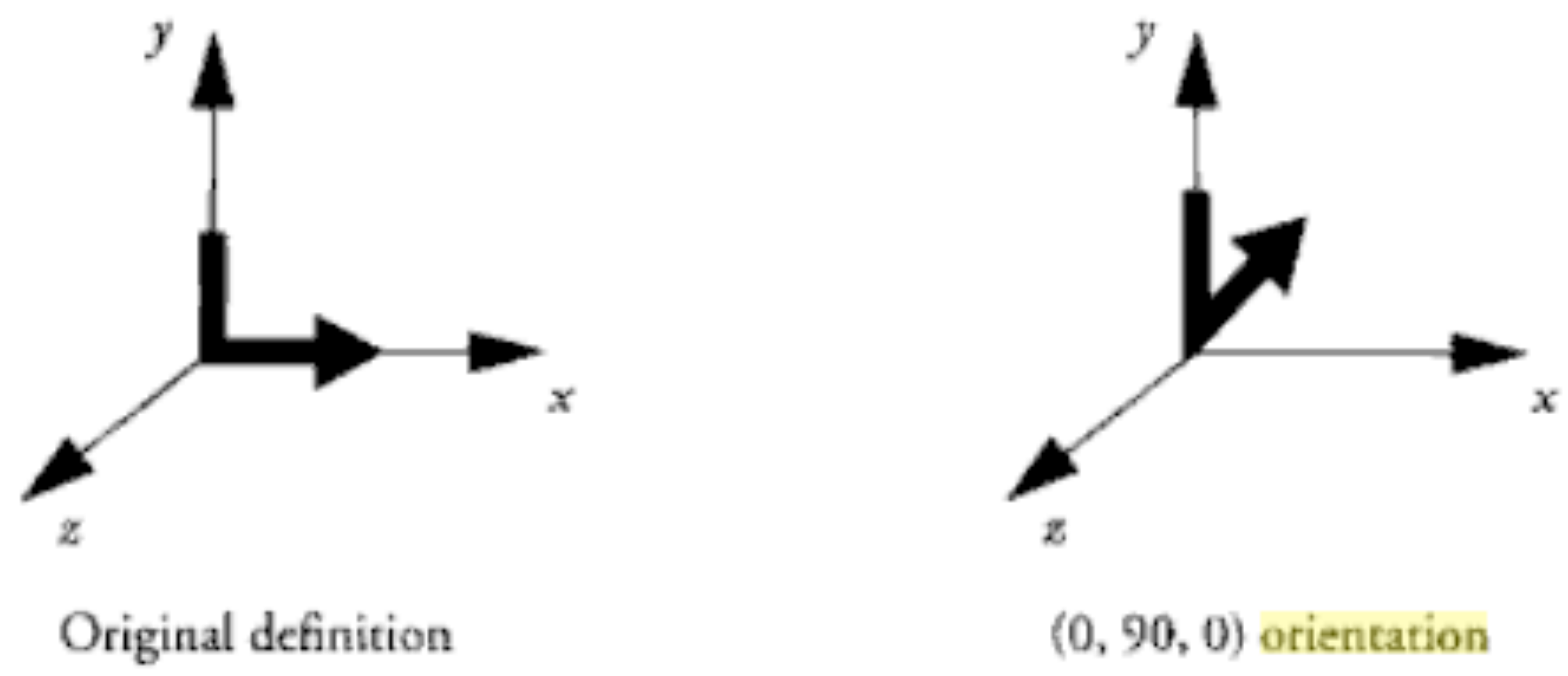
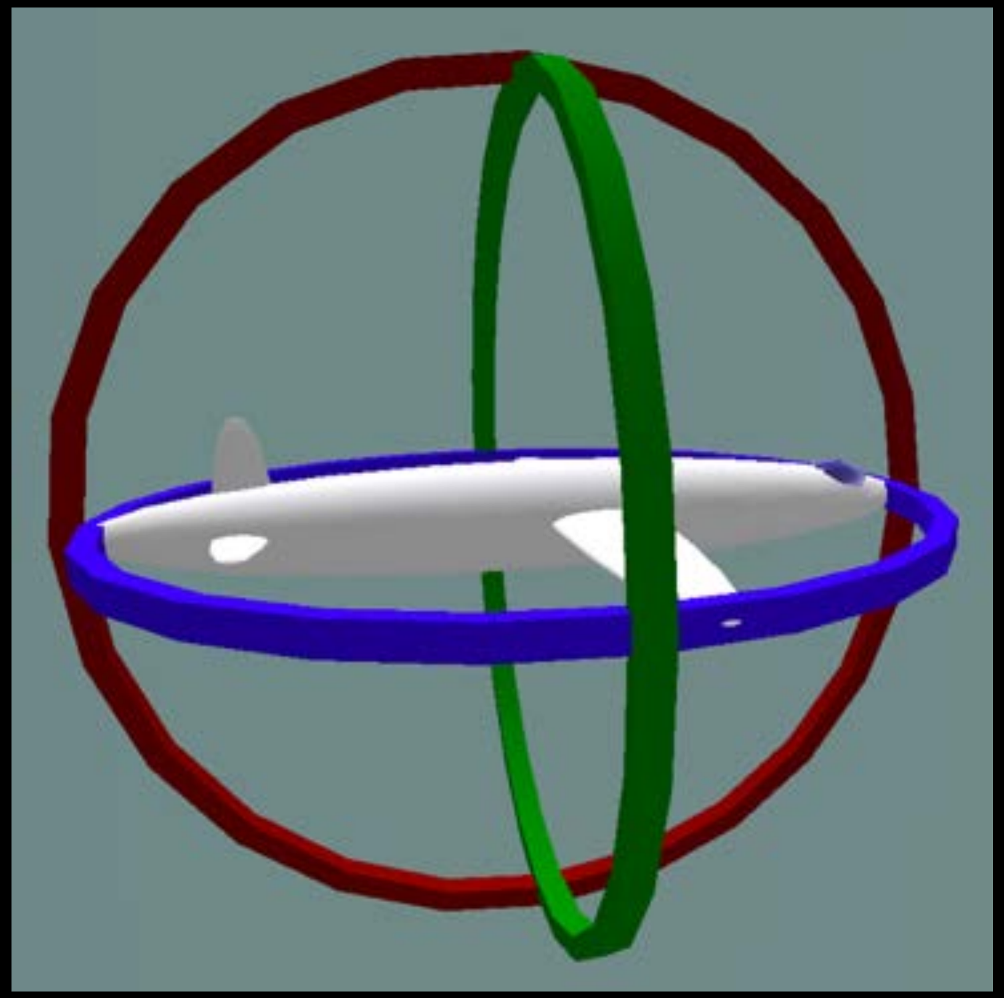
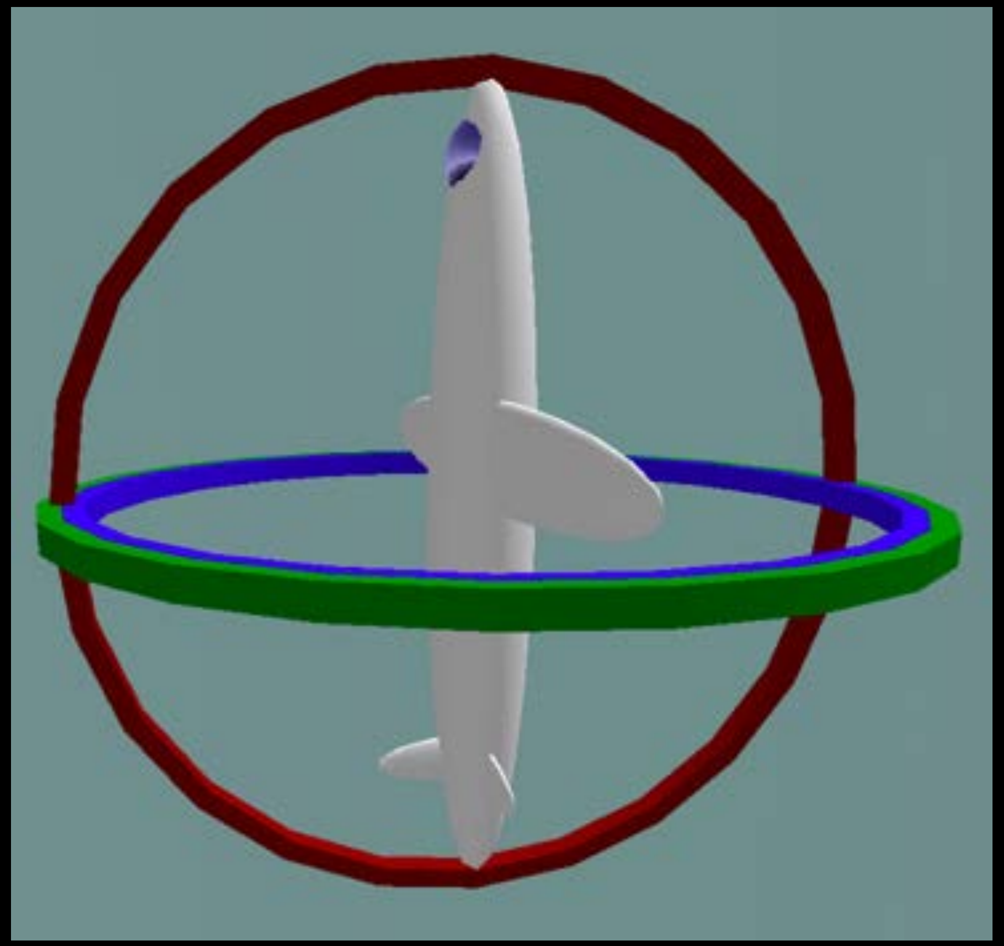


Figure 2.16 Fixed angle representation of (0, 90, 0)

Ángulos fijos

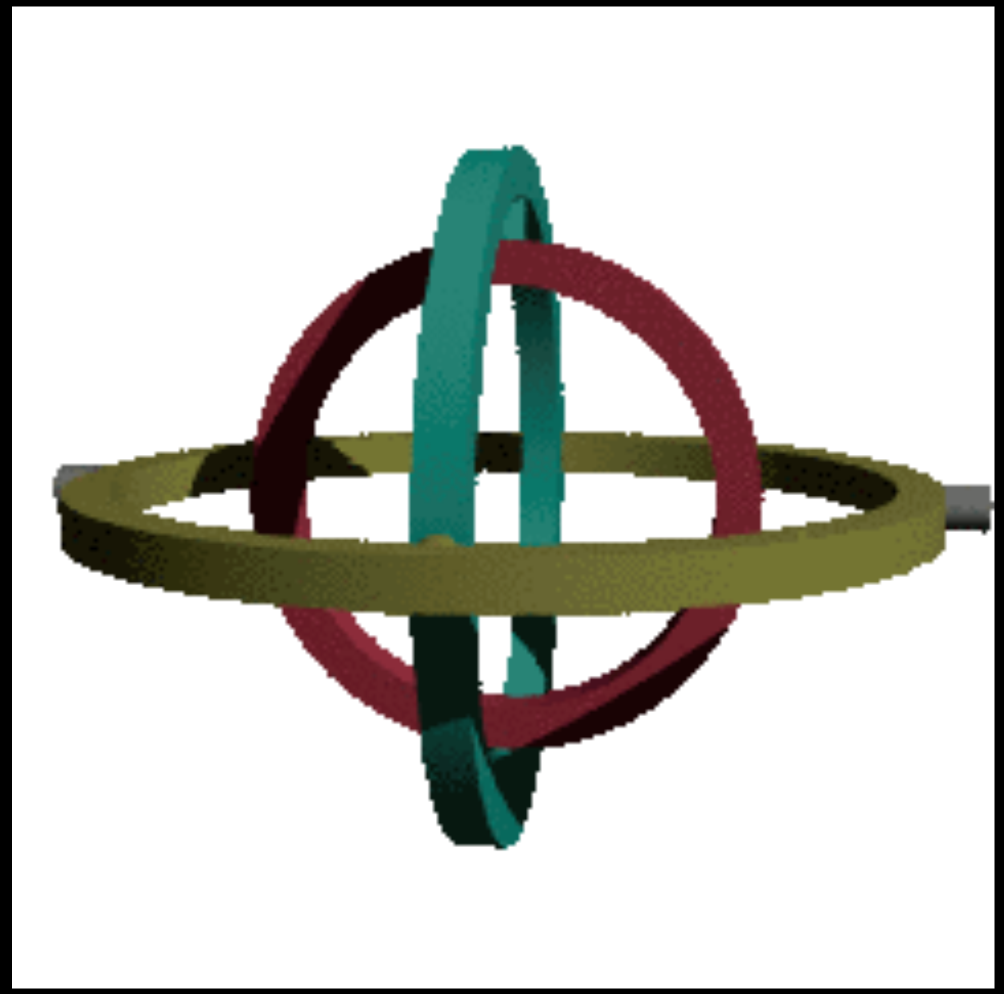
- Problema: dos de los ejes de rotación pueden terminar uno sobre otro cuando el objeto se puede mover libremente en el espacio.





Gimbal lock

- Pérdida de un grado de libertad que ocurre cuando los ejes de dos de los tres *gimbals* llegan al mismo lugar y no pueden compensar las rotaciones de uno de los ejes en 3-D.

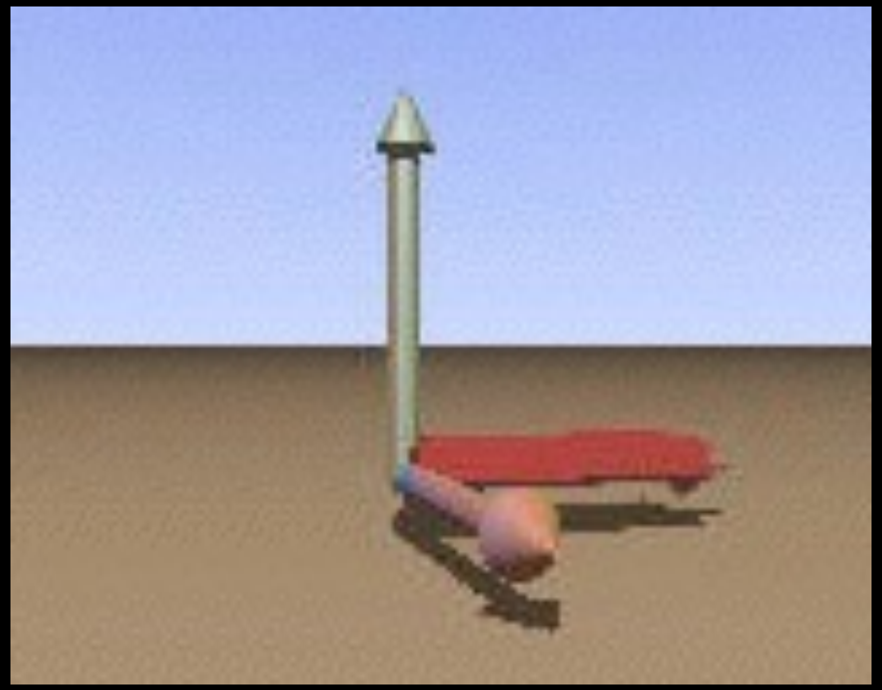


- ¿Qué pasa al interpolar directamente (0,90,0) y (90,45,90)?
  - obtendríamos (45,67.5,45) pero queremos (90,22.5,90).

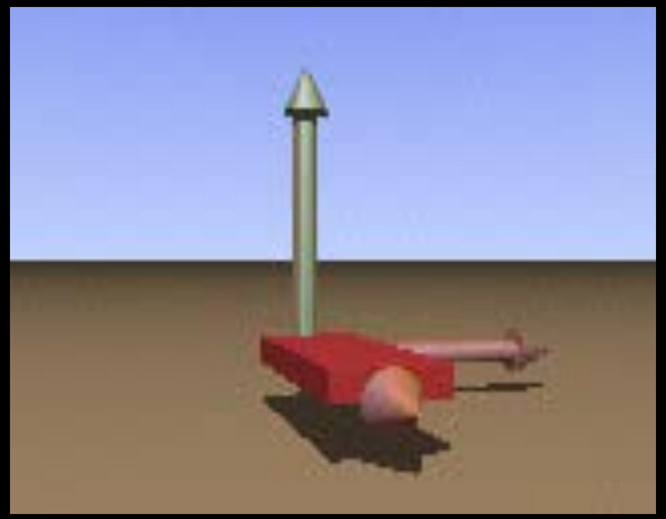
Interpolación con ángulos fijos

(0,90,0) to (90,0,90)

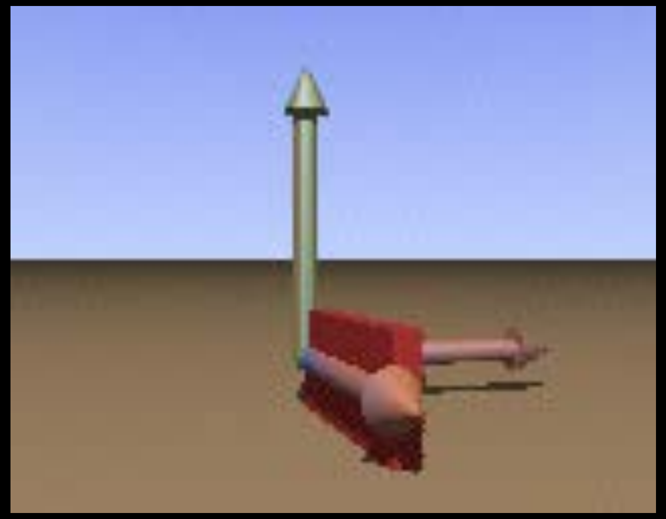
(0,0,0)

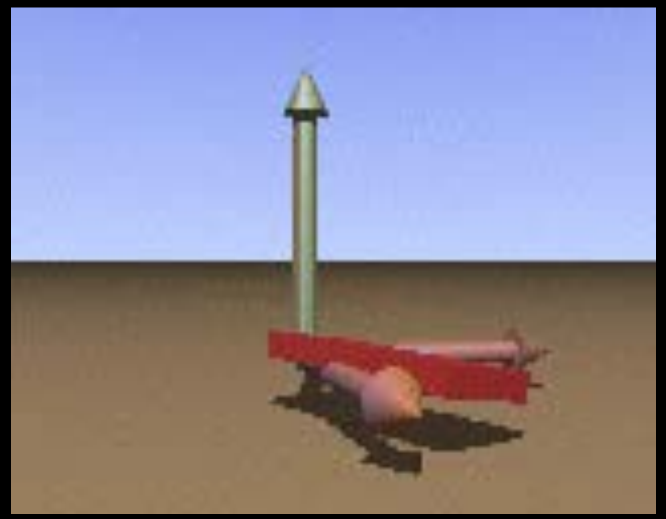


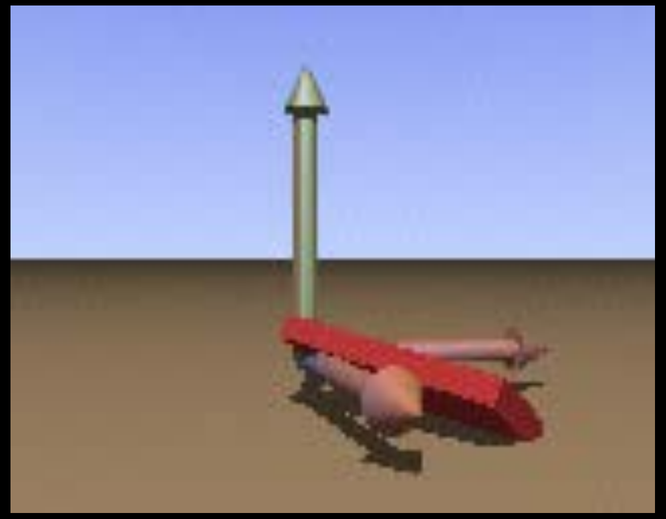
(0,90,0)

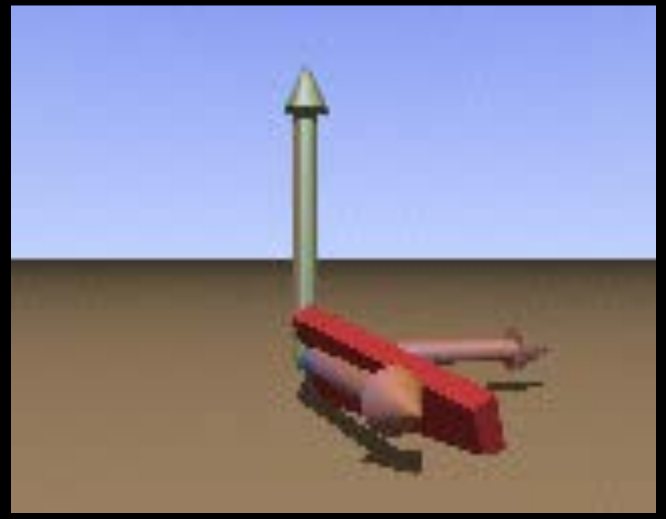


(90,0,90)









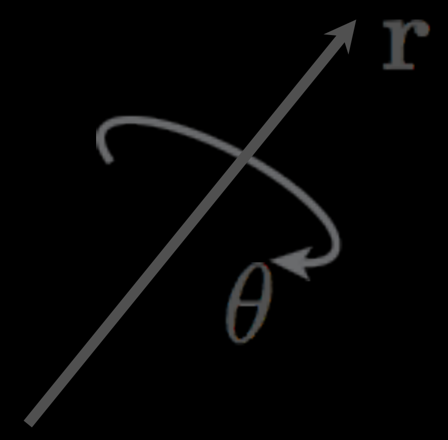
Ángulos de Euler

- Se usan en gran cantidad de aplicaciones pero a veces requieren de decisiones arbitrarias.
- No se interpolan de manera consistente (lo que no es siempre malo).
- Pueden sufrir del *Gimbal lock* y problemas relacionados.
- No hay forma fácil de concatenar rotaciones.
- La conversión a y de matrices de rotación requiere varias operaciones trigonométricas.
- Es una representación compacta (requiere solamente 3 números).

Cuaternios

- 4 parámetros de números reales [w,x,y,z] o, de manera equivalente [w,v] que consiste en un escalar w, y un vector 3-dimensional **v**.
- Representación alternativa del axis-angle que contiene la misma información en forma distinta.
- Puede interpolarse y concatenarse en la misma representación.
- Siguen teniendo 3 DOF por la restriccion de magnitud unitaria.

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{escalar} \\ \text{vector} \end{array}$$



$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2)\mathbf{r} \end{bmatrix}$$

Cuaternios

- Extiende el concepto de rotación en 3D a 4D.
- Evita el problema del *gimbal lock* y permite la implementación de rotaciones suaves y continuas.
- Se considera como la adición de un ángulo de rotación a las coordenadas esféricas: longitud, latitud y ángulos de rotación.
- Un cuaternión se define usando cuatro valores de punto flotante [x,y,z,w]. Éstos se calculan de la combinación de tres coordenadas del eje de rotación y el ángulo de rotación.
- Los cuaterniones son una extensión de los números reales, similar a la de los números complejos. Mientras que los números complejos son una extensión de los reales por la adición de la unidad imaginaria i, tal que $i^2 = -1$, los cuaterniones son una extensión generada de manera análoga añadiendo las unidades imaginarias: i, j y k a los números reales y tal que $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$.

Cuaternios

- Representación vectorial:
  - > Se pueden expresar como el conjunto $.\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$
  - > Entonces un cuaternión es un número de la forma *a* + *bi* + *cj* + *dk*, donde *a*, *b*, *c*, y *d* son números reales unívocamente determinados por cada cuaternión.
- Representación matricial:

$$Q = \begin{pmatrix} X & Y & Z & W \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1-2Y^2-2Z^2 & 2XY-2ZW & 2XZ+2YW \\ 2XY+2ZW & 1-2X^2-2Z^2 & 2YZ-2XW \\ 2XZ-2YW & 2YZ+2XW & 1-2X^2-2Y^2 \end{bmatrix}$$

Operaciones básicas con cuaternios

- **Suma:**

$$[s_1, v_1] + [s_2, v_2] = [s_1 + s_2, v_1 + v_2]$$

- **Multiplicación:**
  - no conmutativa: $q_1 \cdot q_2 \neq q_2 \cdot q_1$
  - asociativa: $(q_1 \cdot q_2) \cdot q_3 = q_1 \cdot (q_2 \cdot q_3)$

$$[s_1, v_1] \cdot [s_2, v_2] = [s_1 \cdot s_2 - v_1 \bullet v_2, s_1 \cdot v_2 + s_2 \cdot v_1 + v_1 \times v_2]$$

multiplicación escalar

producto punto

producto vectorial

Operaciones básicas con cuaterniones

- La identidad multiplicativa es el cuaternión: $[1,(0,0,0)]$

$$[s,v]\cdot[1,(0,0,0)]=[s,v]$$

- Inversión:

$$[s,v]^{-1}=q^{-1}=\left(\frac{1}{||q||}\right)^2\cdot[s,-v]$$

$$||q||=\sqrt{s^2+x^2+y^2+z^2}$$

- La multiplicación de un cuarternión por su inverso nos da un cuaternión unitario $[1,(0,0,0)]$

Rotación de vectores usando cuaterniones

- Para rotar un vector v, utilizando cuaterniones representamos el vector como $[0,v]$ y la rotación con el cuaternión q, entonces:

$$v' = Rot(v) = q \cdot v \cdot q^{-1}$$

- Una serie de rotaciones se pueden compilar en una representación única multiplicando cuaterniones. Consideremos la rotación representada por un cuaternión p seguida por la rotación representada por el cuaternión q en un vector v:

$$\begin{aligned} Rot_q(Rot_p(v)) &= q \cdot (p \cdot v \cdot p^{-1}) \cdot q^{-1} \\ &= ((qp) \cdot v \cdot (qp)^{-1}) \\ &= Rot_{qp}(v) \end{aligned}$$

Rotación de vectores usando cuaterniones

- El inverso de un cuaternión representa la rotación alrededor de mismo eje, con el mismo ángulo pero en dirección contraria:

$$Rot^{-1}(Rot(v)) = q^{-1} \cdot (q \cdot v \cdot q^{-1}) \cdot q = v$$