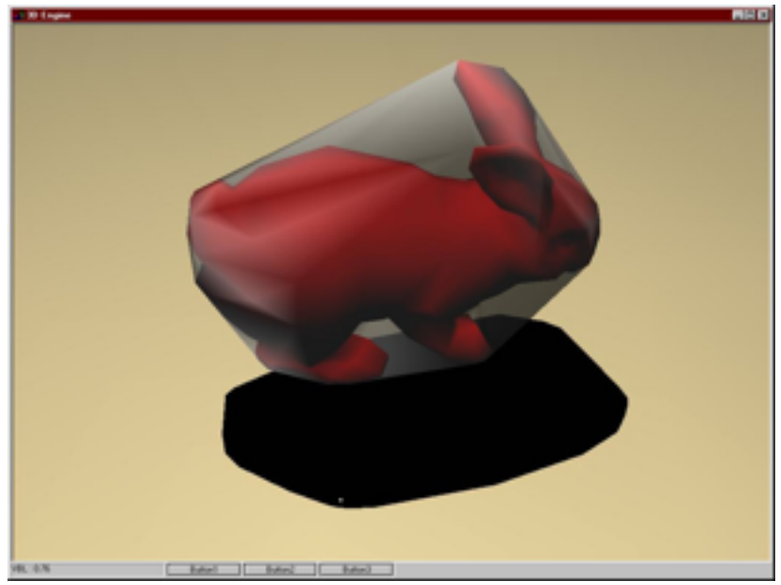
Envolvente Convexo

comp-420

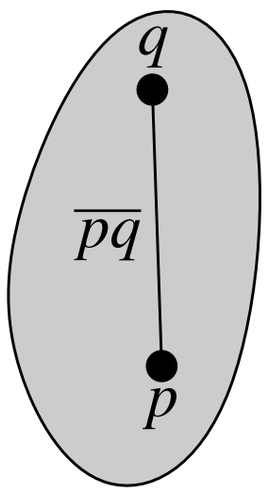
Algunas referencias

- M. de Berg, O. Cheong, M. van Kreveld, M. Overmars. **Computational Geometry Algorithms and Applications**. 3rd. edition. Springer 2008.
- S.L. Devadoss, J.O´Rourke. **Discrete and Computational Geometry**. Princeton University Press. 2011.
- http://www.cs.uu.nl/docs/vakken/ga/slides1.pdf
- http://jeffe.cs.illinois.edu/teaching/compgeom/notes/01-convexhull.pdf
- http://www.tcs.fudan.edu.cn/rudolf/Courses/Algorithms/Alg_ss_07w/Webprojects/Chen_hull/applications.htm

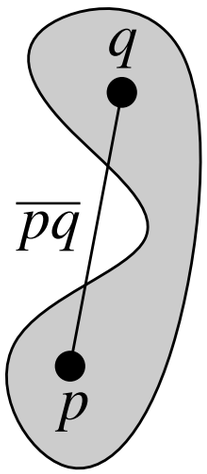
Envolvente convexo



- Uno de los primeros problemas estudiados en la geometría computacional.
- Un conjunto S del plano, se llama convexo si y solo si, para cualquier par de puntos p,q ∈ S, el segmento pq está contenido completamente en S.

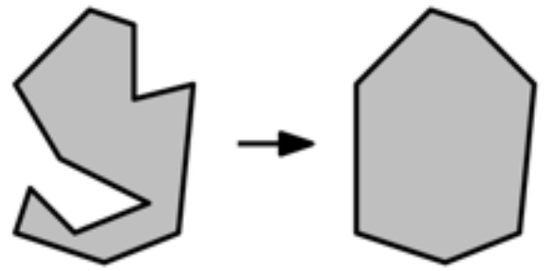


convexo

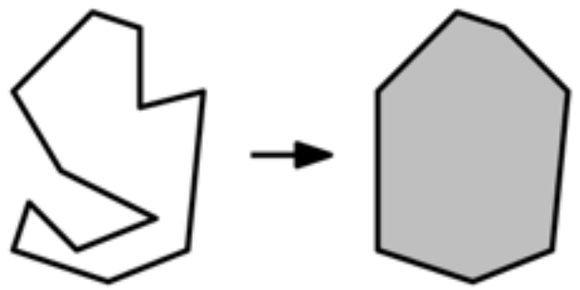


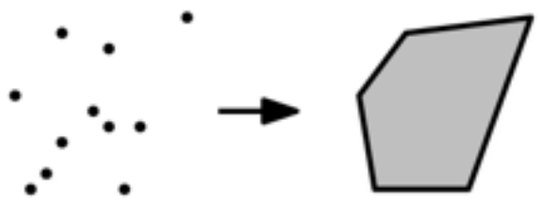
no convexo

Envolvente convexo



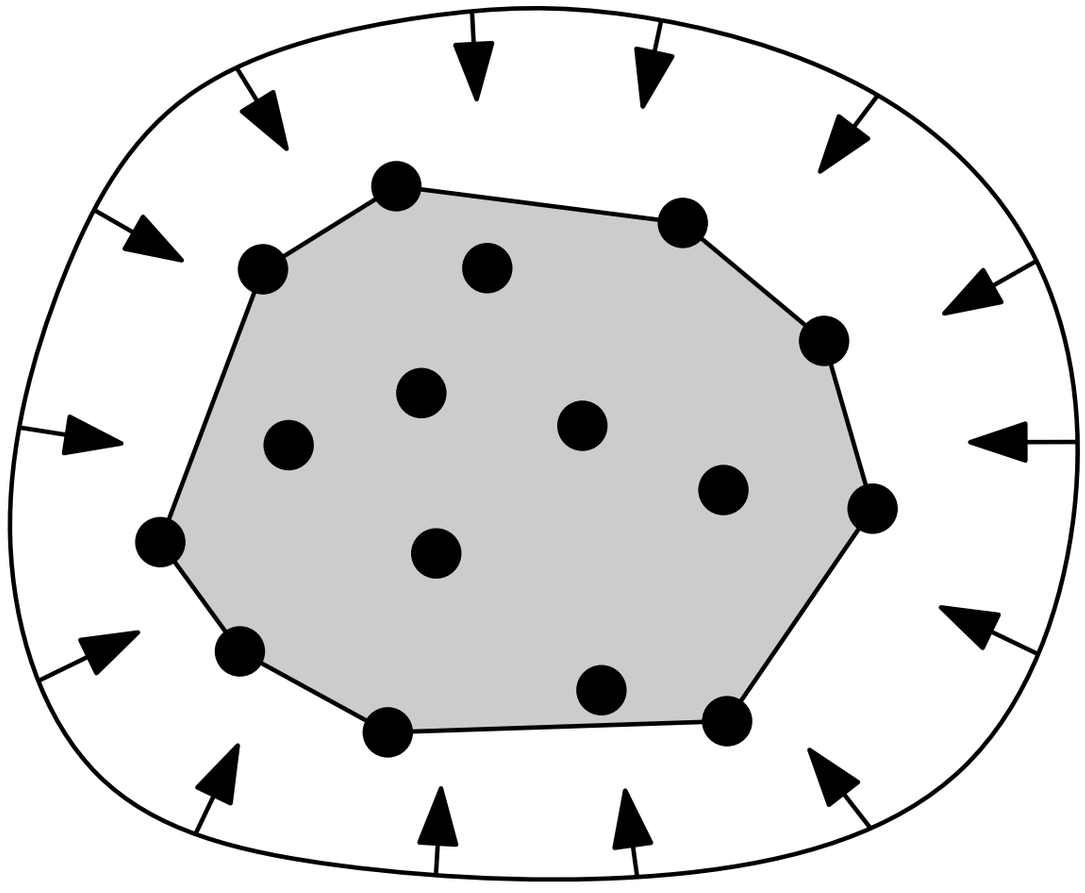
- Para cualquier subconjunto del plano S, su envolvente convexo CH(S) es el conjunto convexo más pequeño que pueda contener a S.





http://www.cs.uu.nl/docs/vakken/ga/slides1.pdf

Envolvente convexo



DEFINICIÓN:

- El envolvente convexo de S, denotado como $CH(S)$, es la intersección de todas las regiones convexas que contienen a S.

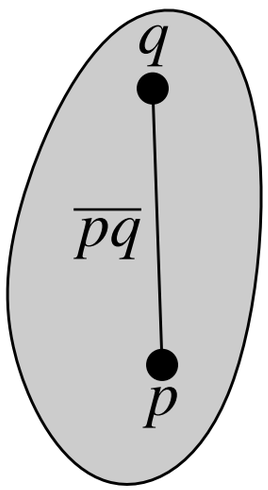
no es útil computacionalmente

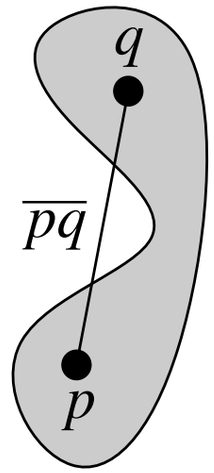
Otra forma de ver CH(S)

- Podemos también definir como el polígono convexo más grande cuyos vértices son puntos en S.

Región convexa

- Región convexa ssi cualquiera dos puntos p y q en la región R son mutuamente visibles.





- El segmento de recta entre p y q está también en R.
- Tratamos de capturar la "visibilidad" de todos los puntos del conjunto S.

TEOREMA:

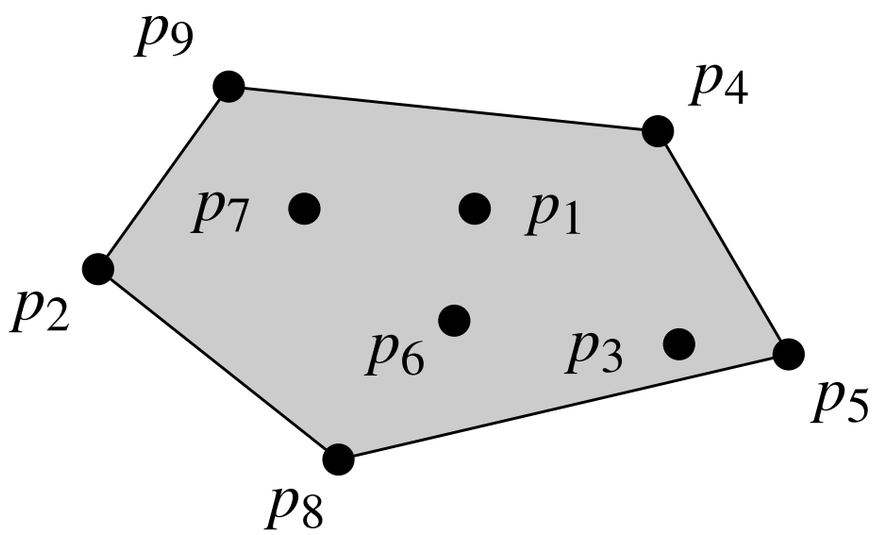
- Para un conjunto de puntos $S = \{p_1, ..., p_n\}$, el envolvente convexo de S es el conjunto de todas las combinaciones convexas de S.

Envolvente convexo

- Dado un conjunto de puntos $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ en el plano, calcular una lista que contenga aquellos puntos de P que sean vértices de $\mathcal{CH}(P)$, en orden de las manecillas del reloj.

- entrada: conjunto de puntos $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, p_8, p_9$.

- salida: representación del envolvente convexo p_4, p_5, p_8, p_2, p_9.



Concretamente …

- Representamos a los puntos de S con sus coordenadas cartesianas, en dos arreglos $X[1...n]$ y $Y[1...n]$.
- $CH(S)$ se puede representar como una lista circular de vértices en orden anti-horario (arbitrariamente).
- Si el punto i es un vértice de $CH(S)$, $next[i]$ es el índice del punto que sigue en $CH(S)$ en sentido antihorario y $pred[i]$, es el índice del punto siguiente en sentido horario.
- No importa qué vértice tomemos como cabeza de la lista.
- Para simplificar supondremos que no hay 3 vértices co-lineales.

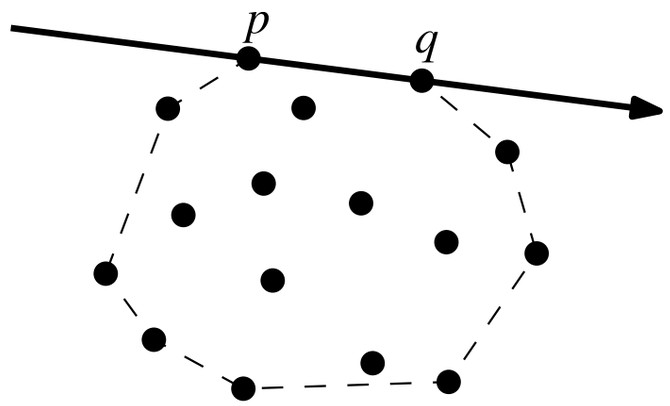
Casos simples

- Cuando n=1, ¿Cómo es CH(s)?
- ¿y cuando n=2?
- ¿y cuando n=3?

- El test CCW o CW juega el mismo papel en el algoritmo de CH que una comparación en los algoritmos de ordenamiento (sorting).

Envolvente convexo (convex hull)

- El algoritmo para calcular $\mathcal{CH}(P)$ se basa en su estructura de aristas:
- Los puntos extremos p y q de cada arista son puntos de P.
- Si esta arista está dirigida de tal forma que $\mathcal{CH}(P)$ esté a la derecha, entonces todos los puntos de P deben estar a la derecha de esta linea.
- El argumento inverso es también cierto, si todos los puntos de $P\backslash\{p, q\}$ está a la derecha de la línea dirigida entre p y q, entonces $\overline{pq}$ es una arista de $\mathcal{CH}(P)$.



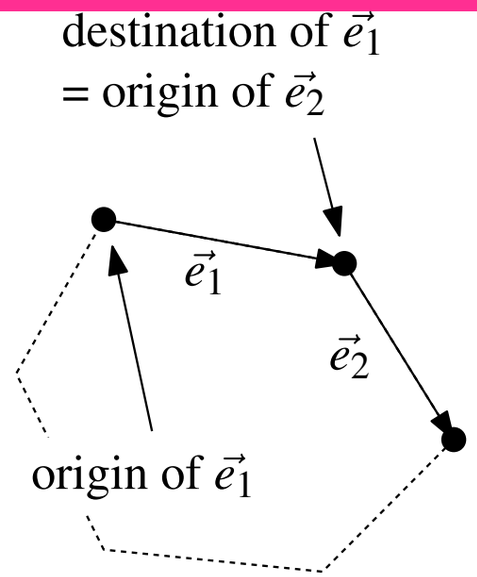
Algoritmo

Algorithm SLOWCONVEXHULL(P)
Input. A set P of points in the plane.
Output. A list $\mathcal{L}$ containing the vertices of $\mathcal{CH}(P)$ in clockwise order.
1. $E \leftarrow \emptyset$.
2. **for** all ordered pairs $(p,q) \in P \times P$ with p not equal to q
3. **do** *valid* $\leftarrow$ **true**
4. **for** all points $r \in P$ not equal to p or q
5. **do if** r lies to the left of the directed line from p to q
6. **then** *valid* $\leftarrow$ **false**.
7. **if** *valid* **then** Add the directed edge $\overrightarrow{pq}$ to E.
8. From the set E of edges construct a list $\mathcal{L}$ of vertices of $\mathcal{CH}(P)$, sorted in clockwise order.

Envolvente convexo (convex hull)

- ¿Cómo se puede verificar que los puntos estén a la derecha o a la izquierda de una línea dirigida?
- en los algoritmos de geometría computacional suponemos esta operación como una de tiempo de ejecución constante.
- ¿Cómo se puede construir una lista, a partir de las aristas, ordenada en el orden de las manecillas del reloj?
- Las aristas en *E* son dirigidas, por lo que tenemos un origen y un destino.
- Como las aristas están dirigidas de tal forma que los otros puntos estén a su derecha, el vértice destino viene después del origen cuando están ordenados en sentido de las manecillas del reloj.

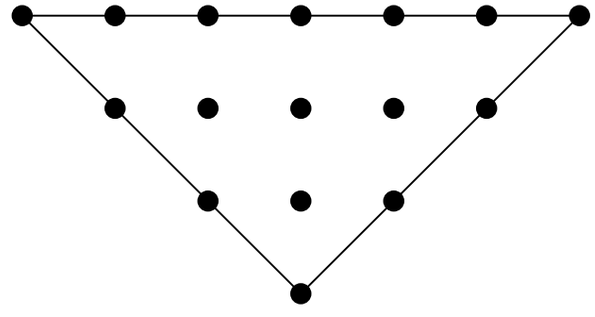
Envolvente convexo (convex hull)

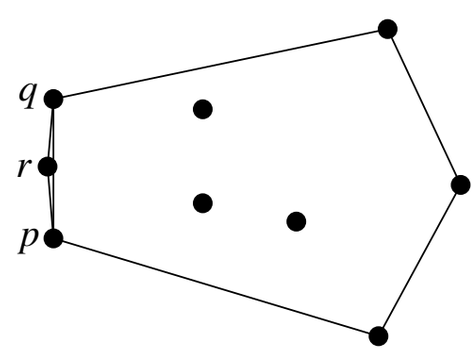


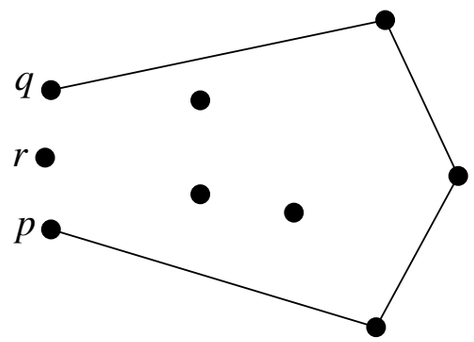
- Una implementación simple del procedimiento de la línea 8 toma $O(n^2)$ pero se puede mejorar a $O(n \lg n)$.
- El resto del algoritmo domina el tiempo total de ejecución.
- Verificamos $n^2 - n$ pares de puntos. Para cada par miramos $n - 2$ puntos para encontrar los que están del lado derecho. Esto hace en total $O(n^3)$.
- La operación de la línea 8 toma $O(n^2)$ por lo que la complejidad total del algoritmo es $O(n^3)$.

Envolvente convexo (convex hull)

- Algunos detalles sobre este algoritmo:
- verificar co-linearidad en los puntos que no están a la derecha.
- errores de punto flotante que no permitan determinar de manera correcta la configuración de los puntos en el plano.
- en este caso habrá problemas al tratar de reconstruir la representación del convex hull.

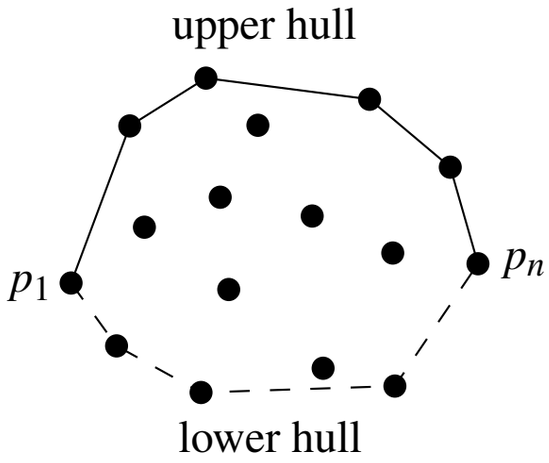


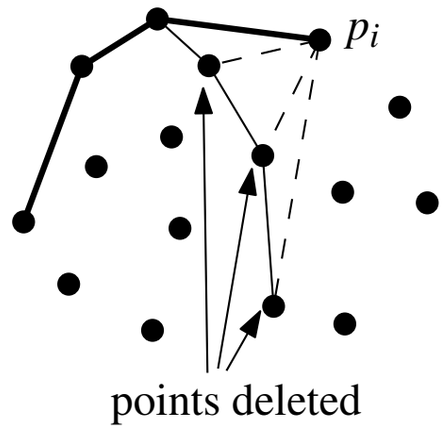




Envolvente convexo (convex hull)

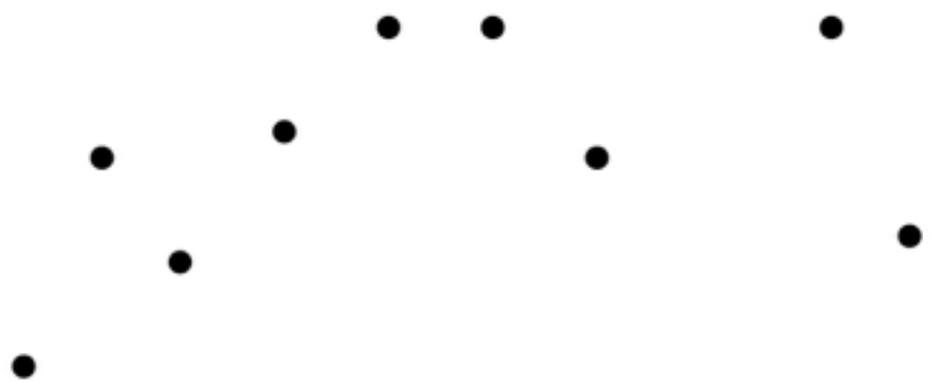
- Agregamos los puntos uno a uno, actualizando la solución después de cada adición.
- Los puntos se agregan de izquierda a derecha por lo que primero se ordenan de acuerdo a su coordenada x, obteniendo una secuencia ordenada $p_1, p_2, \ldots, p_n$ que establece el orden en que son añadidos.
- Al estar trabajando de izquierda a derecha sería también conveniente tener los puntos de la envolvente convexa ordenados de izquierda a derecha. Como esto no es el caso encontramos primero la parte superior de la envolvente (upper hull - que va de izquierda a derecha) y luego el lower hull.





Algoritmo iterativo

- Observación: de izquierda a derecha, solo hay vueltas a la derecha en el envolvente superior (upper hull)



http://www.cs.uu.nl/docs/vakken/ga/slides1.pdf

Algoritmo iterativo

- Inicializar insertando los puntos más a la izquierda.

http://www.cs.uu.nl/docs/vakken/ga/slides1.pdf

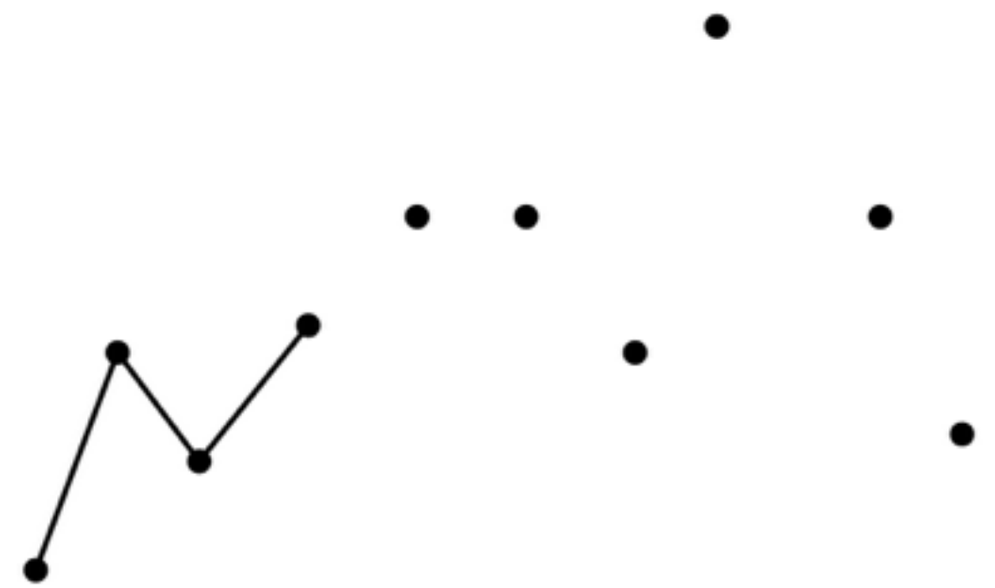
Algoritmo iterativo

- Si agregamos un tercer punto, habrá una vuelta a la derecha con el punto anterior. Agregarlo.

http://www.cs.uu.nl/docs/vakken/ga/slides1.pdf

Algoritmo iterativo

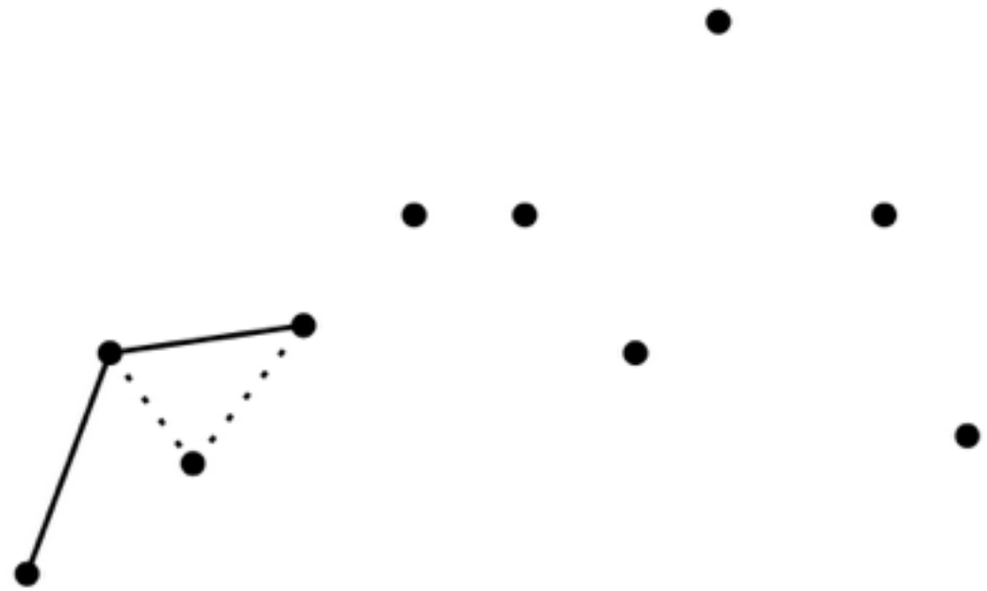
- Si agregamos un cuarto punto, tenemos una vuelta a la izquierda en el tercer punto.



http://www.cs.uu.nl/docs/vakken/ga/slides1.pdf

Algoritmo iterativo

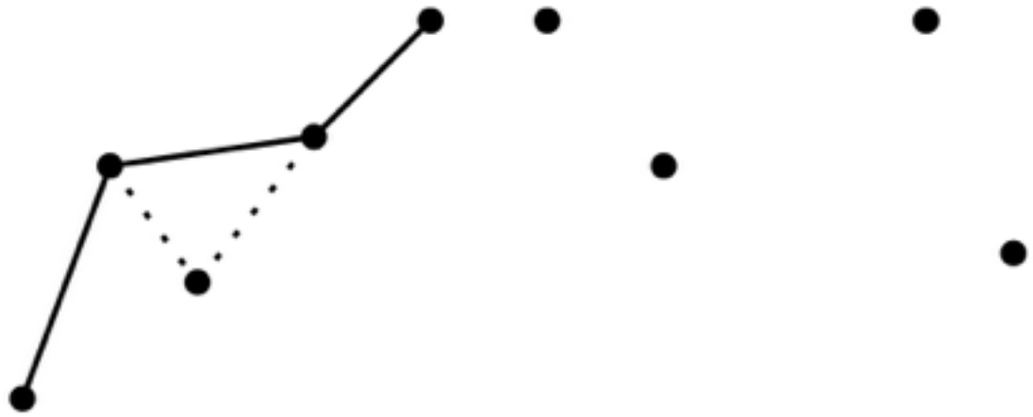
- Entonces removemos el tercer punto del envolvente superior y agregamos el cuarto punto.



http://www.cs.uu.nl/docs/vakken/ga/slides1.pdf

Algoritmo iterativo

- Si agregamos el quinto punto, tenemos una vuelta a la izquierda en el cuarto punto.



http://www.cs.uu.nl/docs/vakken/ga/slides1.pdf

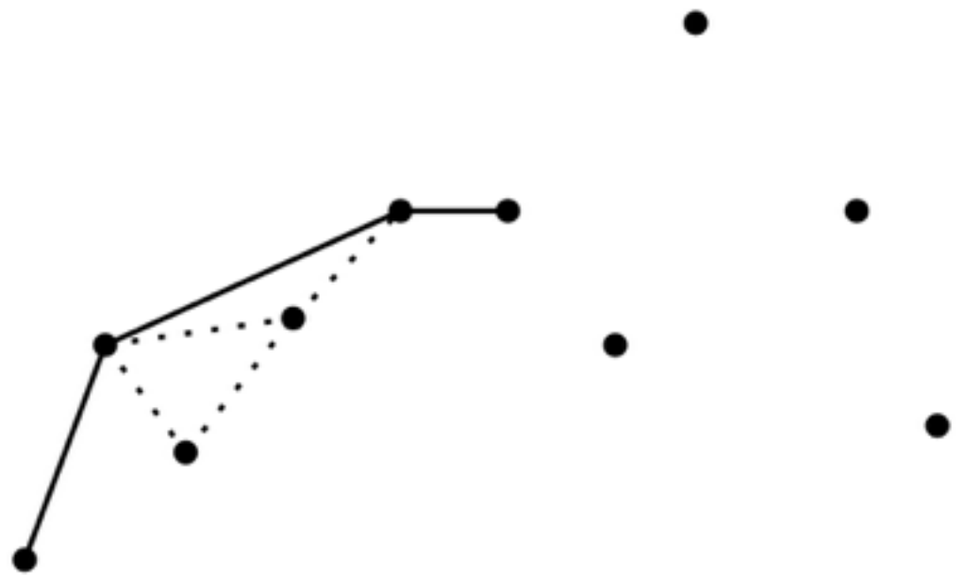
Algoritmo iterativo

- Entonces quitamos el cuarto punto y agregamos el quinto.

http://www.cs.uu.nl/docs/vakken/ga/slides1.pdf

Algoritmo iterativo

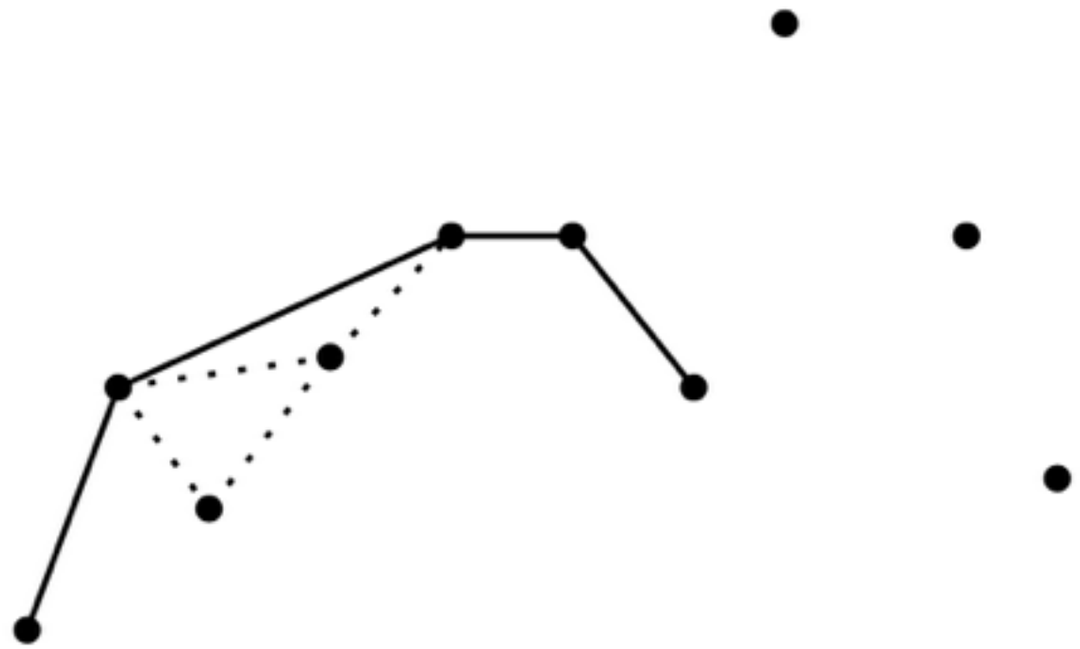
- Si agregamos el sexto punto, tenemos una vuelta a la derecha en el quinto punto así que agregamos al sexto punto.



http://www.cs.uu.nl/docs/vakken/ga/slides1.pdf

Algoritmo iterativo

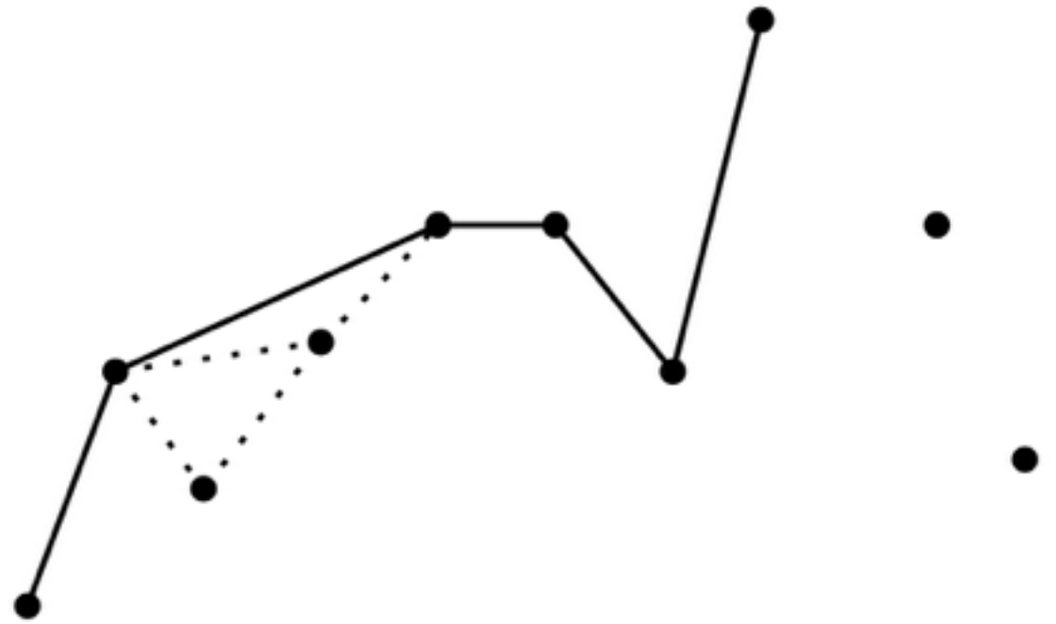
- Agregamos el séptimo punto...



http://www.cs.uu.nl/docs/vakken/ga/slides1.pdf

Algoritmo iterativo

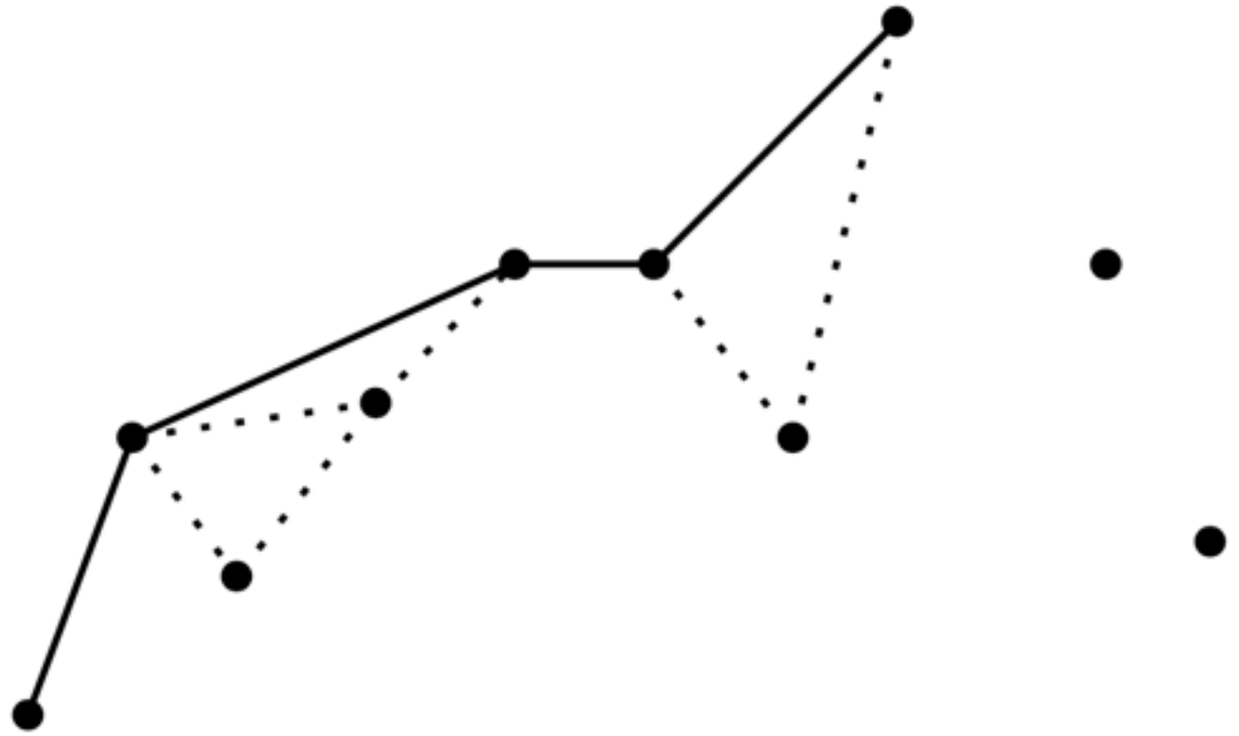
- Cuando agregamos el octavo punto ...
  - tenemos que quitar el séptimo



http://www.cs.uu.nl/docs/vakken/ga/slides1.pdf

Algoritmo iterativo

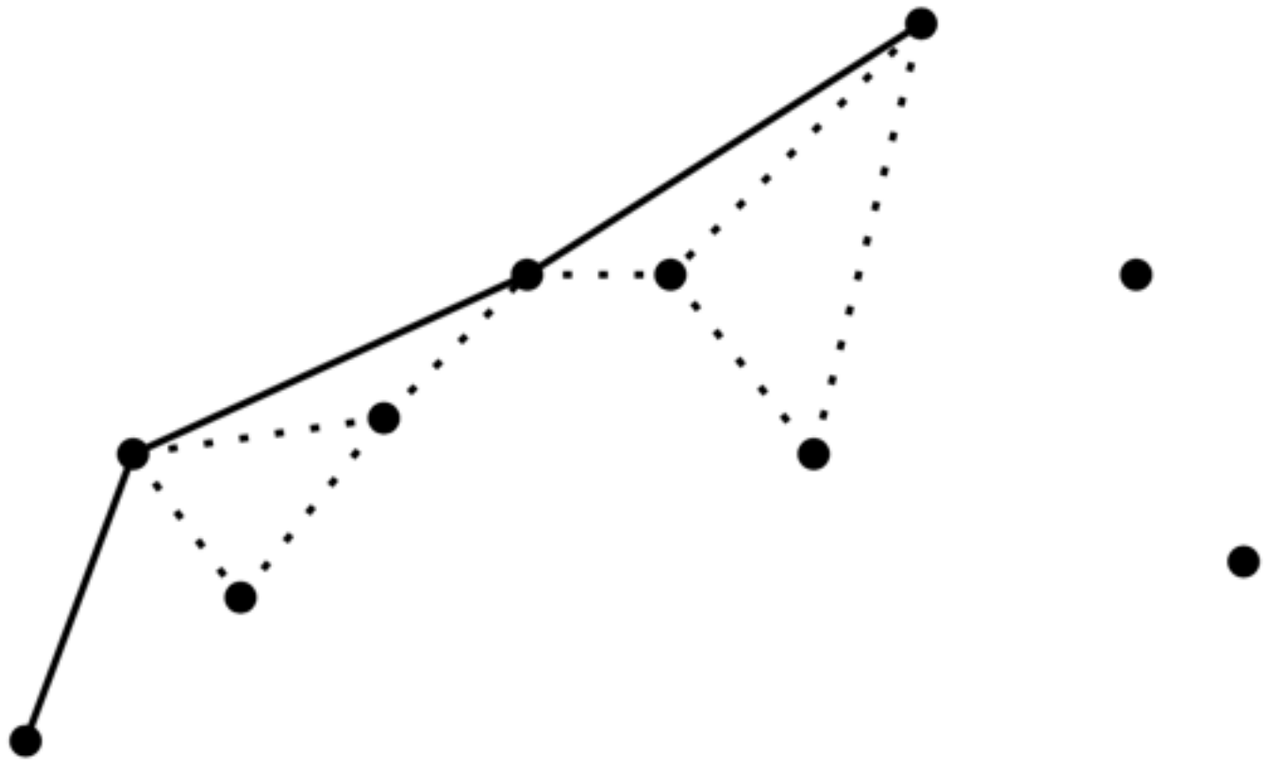
- y el sexto ...



http://www.cs.uu.nl/docs/vakken/ga/slides1.pdf

Algoritmo iterativo

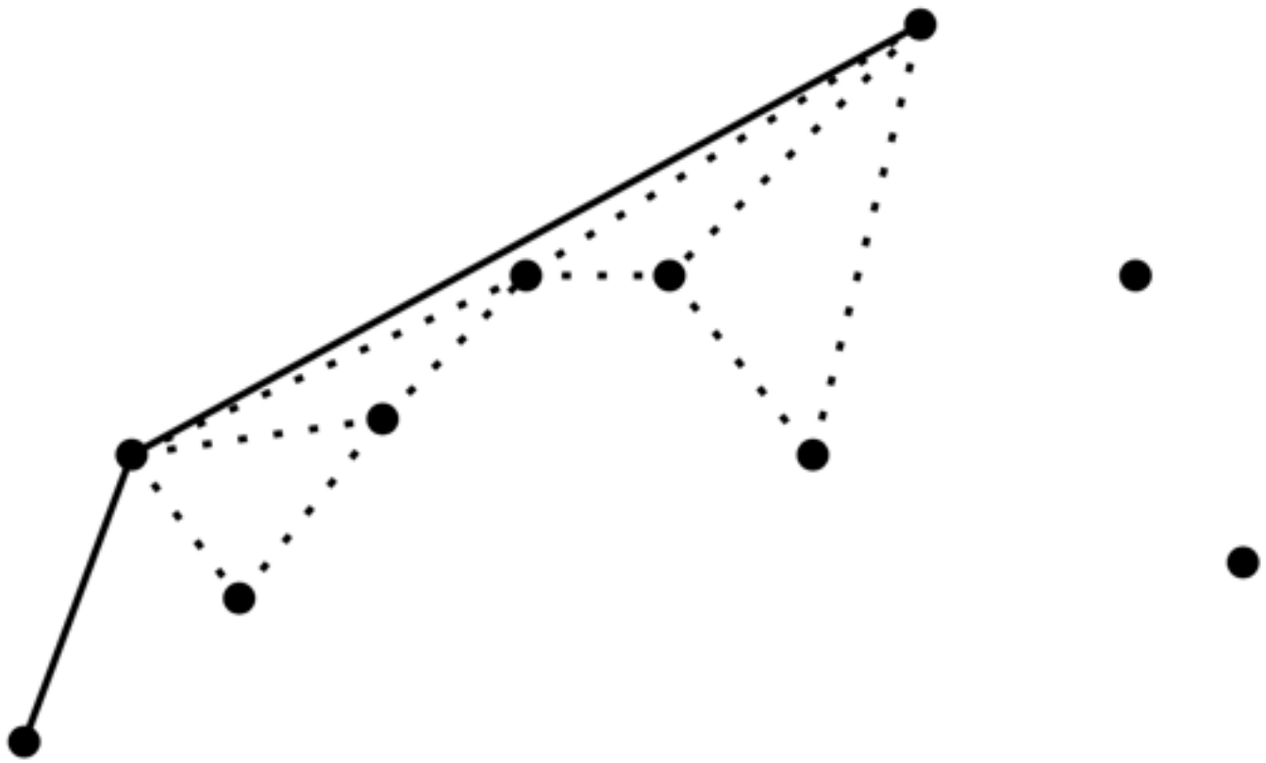
- y el sexto ...



http://www.cs.uu.nl/docs/vakken/ga/slides1.pdf

Algoritmo iterativo

- y el quinto ...



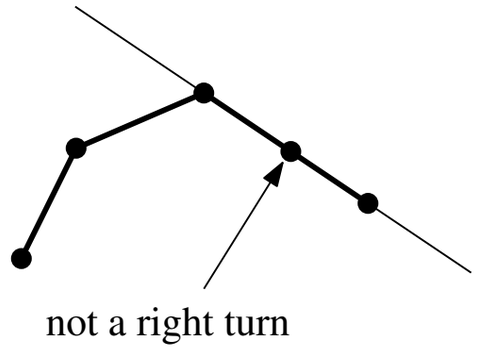
http://www.cs.uu.nl/docs/vakken/ga/slides1.pdf

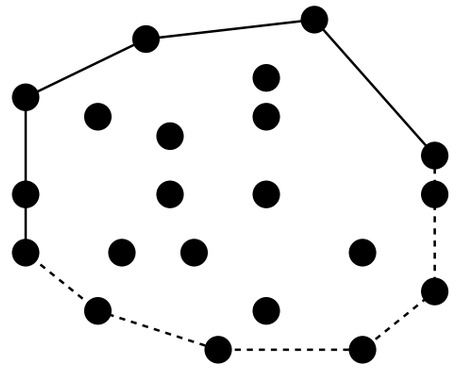
Algoritmo

Algorithm CONVEXHULL(P)
Input. A set P of points in the plane.
Output. A list containing the vertices of $\mathcal{CH}(P)$ in clockwise order.

1. Sort the points by x-coordinate, resulting in a sequence $p_1, \ldots, p_n$.
2. Put the points p_1 and p_2 in a list $\mathcal{L}_{\text{upper}}$, with p_1 as the first point.
3. **for** $i \leftarrow 3$ **to** n
4. **do** Append p_i to $\mathcal{L}_{\text{upper}}$.
5. **while** $\mathcal{L}_{\text{upper}}$ contains more than two points **and** the last three points in $\mathcal{L}_{\text{upper}}$ do not make a right turn
6. **do** Delete the middle of the last three points from $\mathcal{L}_{\text{upper}}$.
7. Put the points p_n and p_{n-1} in a list $\mathcal{L}_{\text{lower}}$, with p_n as the first point.
8. **for** $i \leftarrow n-2$ **downto** 1
9. **do** Append p_i to $\mathcal{L}_{\text{lower}}$.
10. **while** $\mathcal{L}_{\text{lower}}$ contains more than 2 points **and** the last three points in $\mathcal{L}_{\text{lower}}$ do not make a right turn
11. **do** Delete the middle of the last three points from $\mathcal{L}_{\text{lower}}$.
12. Remove the first and the last point from $\mathcal{L}_{\text{lower}}$ to avoid duplication of the points where the upper and lower hull meet.
13. Append $\mathcal{L}_{\text{lower}}$ to $\mathcal{L}_{\text{upper}}$, and call the resulting list $\mathcal{L}$.
14. **return** $\mathcal{L}$

Algoritmo incremental: casos degenerados





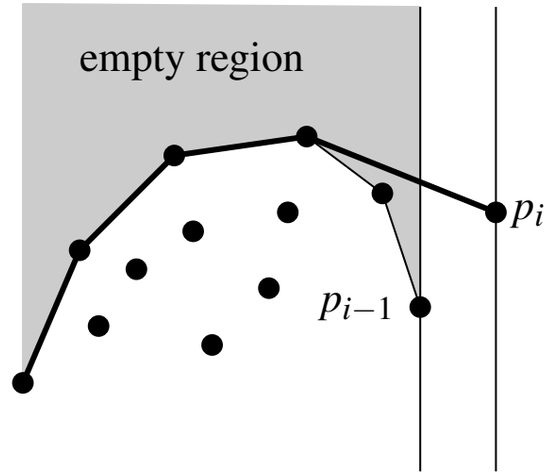
- Un punto tiene la *misma coordenada x* que otro punto. En este caso podemos ordenarles primero respecto a *x* y luego respecto a *y*.
- Los tres últimos puntos pueden ser co-lineares. En este caso, el punto intermedio no debería ocurrir en el envolvente convexo. Estos casos se tratan como si fueran vuelta a la izquierda.
- Errores de redondeo o de punto flotante resultarán en un polígono convexo pero no necesariamente el correcto.

Envolvente convexo (convex hull)

- El envolvente convexo de un conjunto de puntos *n* en el plano se puede calcular en tiempo $O(n \lg n)$.
- Prueba por inducción: antes del ciclo for, la lista $\mathcal{L}_{\text{upper}}$ contiene a los puntos p_1 y p_2, que trivialmente forma el envolvente superior de $\{p_1, p_2\}$.
- Supongamos que $\mathcal{L}_{\text{upper}}$ contiene los vértices del envolvente superior de $\{p_1, \ldots, p_{i-1}\}$ y vamos a agregar p_i. Después de ejecutar el ciclo while, sabemos que tendremos una cadena con solamente vueltas a la derecha.
- Además sabemos que esta cadena empieza en el punto extremo izquierdo y termina en el punto extremo derecho de $\{p_1, \ldots, p_i\}$.
- Si probamos que todos los puntos de $\{p_1, \ldots, p_i\}$ que no estén en $\mathcal{L}_{\text{upper}}$ están debajo de la cadena, entonces $\mathcal{L}_{\text{upper}}$ es correcta.

Envolvente convexo (convex hull)

- Por inducción sabemos que no había punto más arriba de la cadena antes que p_i fuera añadido.



- Ordenamiento: $O(n \lg n)$
- Ciclo for: $O(n)$
- Ciclo while: $O(n)$

Algoritmo incremental: casos degenerados

- Primera etapa: Entender la geometría del problema, ignorar los casos degenerados.
- Segunda etapa: Ajustar el algoritmo a los casos degenerados. Tratar de generalizar y no resolver caso por caso.
- Tercera etapa: Implementación, especial atención a redondeos y puntos flotantes.