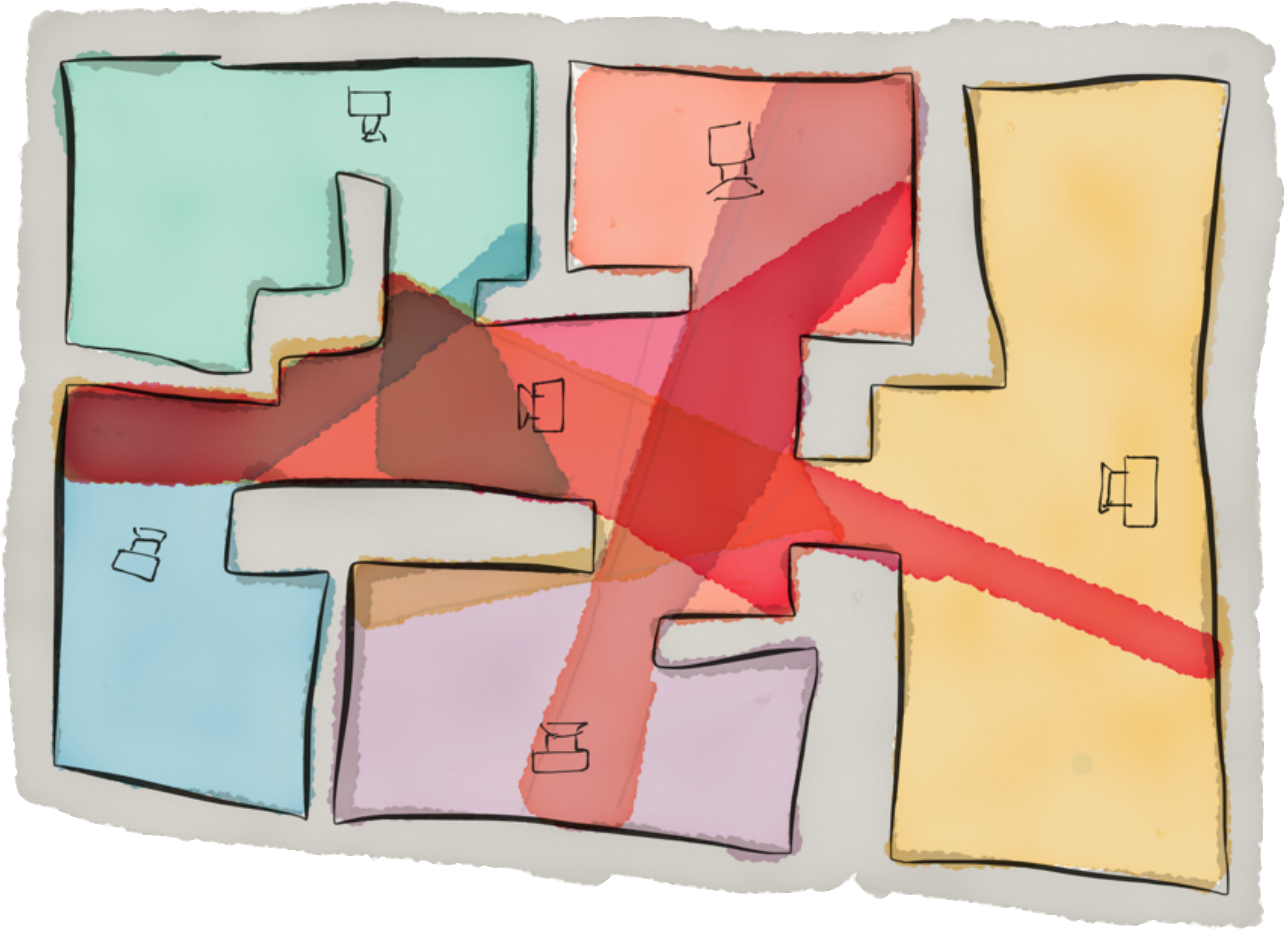
http://ilevel.biz/wp-content/uploads/2013/07/Ricco-maresca-outsider-art-gallery-1024x576.png

Triangulación de Polígonos: Problema de la Galería de Arte.

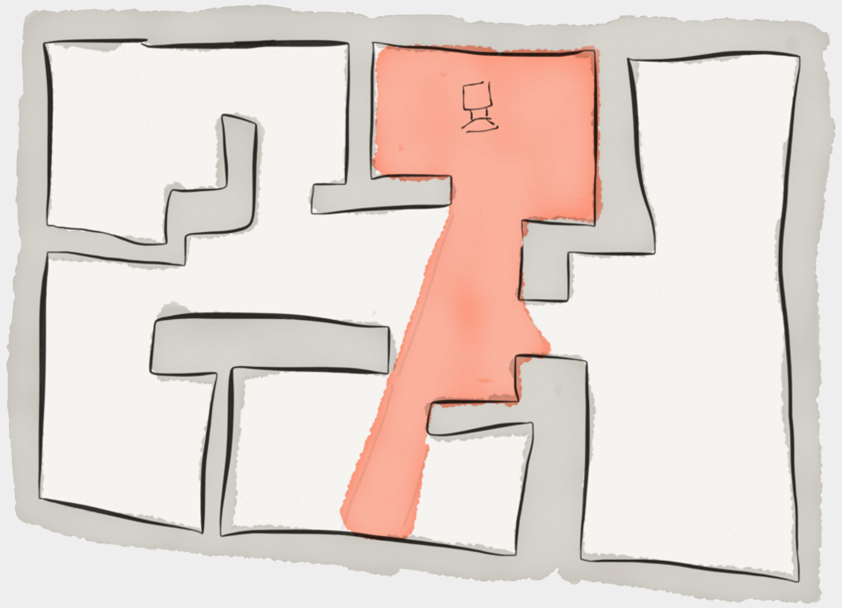
Geometría Computacional , MAT-125



- ¿Cuántas cámaras necesitamos para vigilar una galería y cómo decidimos dónde ponerlas?

Problema de la Galería de Arte

- Galería: Región poligonal en R^2.
  - consideramos solamente polígonos simples (no auto-intersecciones, no hoyos).
- Posición de la cámara:
  - Punto en el polígono.
  - No hay restricciones de rango en la cámara.
  - ¿Cuándo ve una cámara a un punto del polígono?
    - Cuando el segmento de recta entre la posición de la cámara y el punto del polígono es un segmento abierto completamente contenido en el polígono.

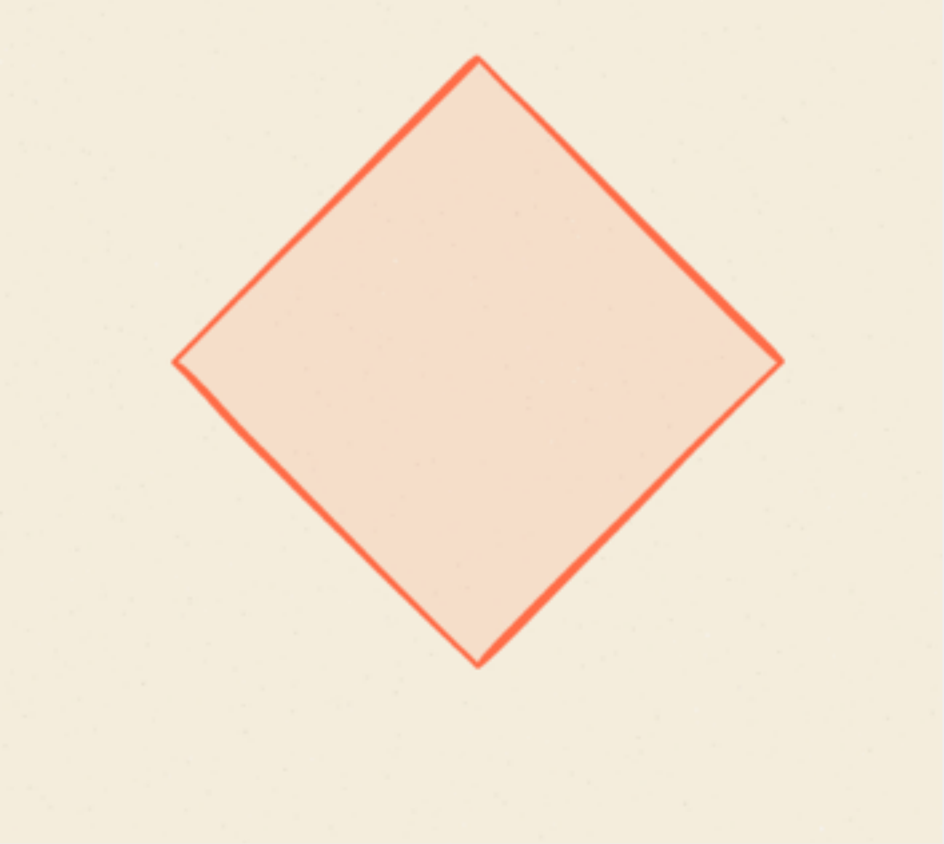


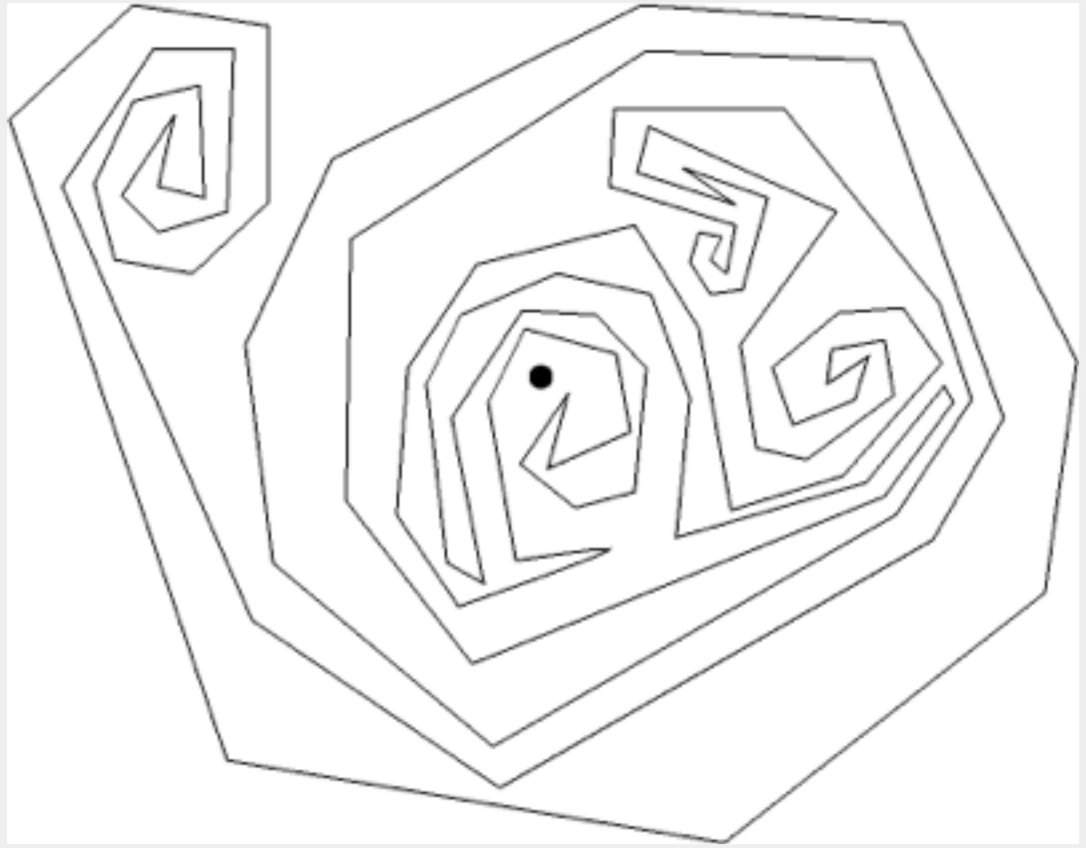
Polígono

- Un polígono (simple) P es la región cerrada del plano, acotada por una colección finita de segmentos de recta que forman una curva cerrada que no se auto-interseca.

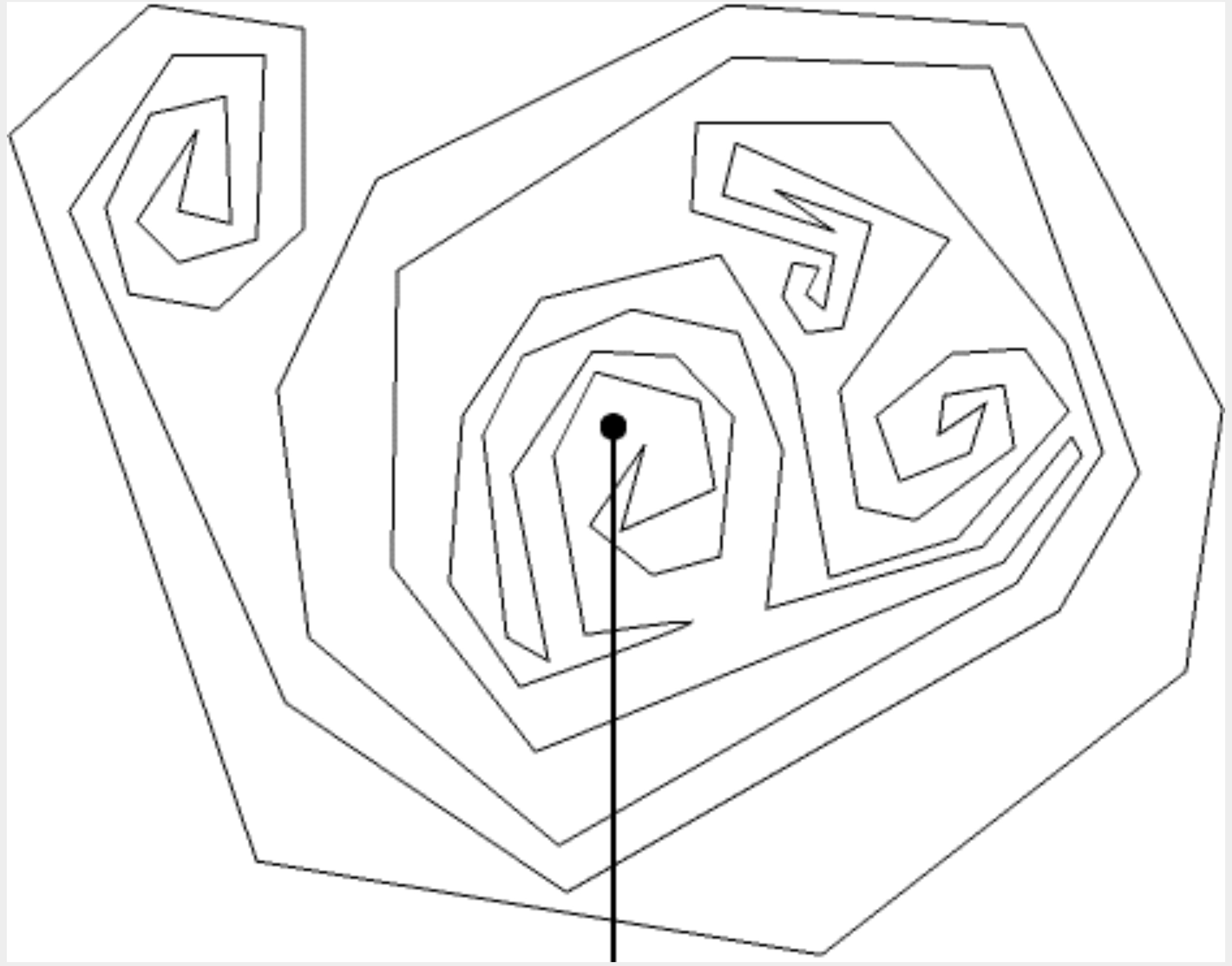
Teorema de curvas (polígonos) de Jordan

La frontera ∂P de un polígono P particiona el plano en dos partes. En particular, los dos componentes de $\mathbb{R}^2 \setminus \partial P$ son el interior acotado y el exterior no acotado.





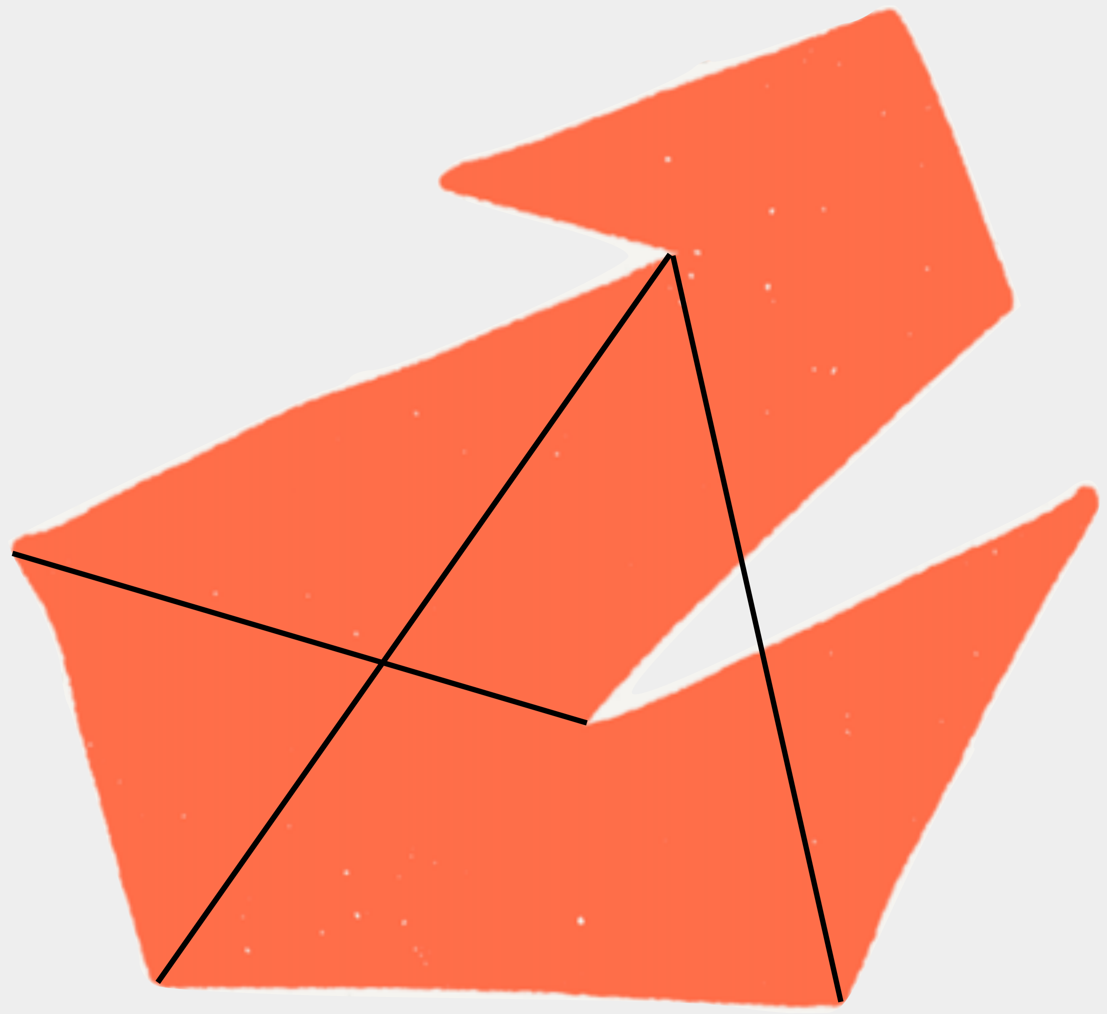
https://www.ics.uci.edu/~eppstein/161/960307.html



https://www.ics.uci.edu/~eppstein/161/960307.html

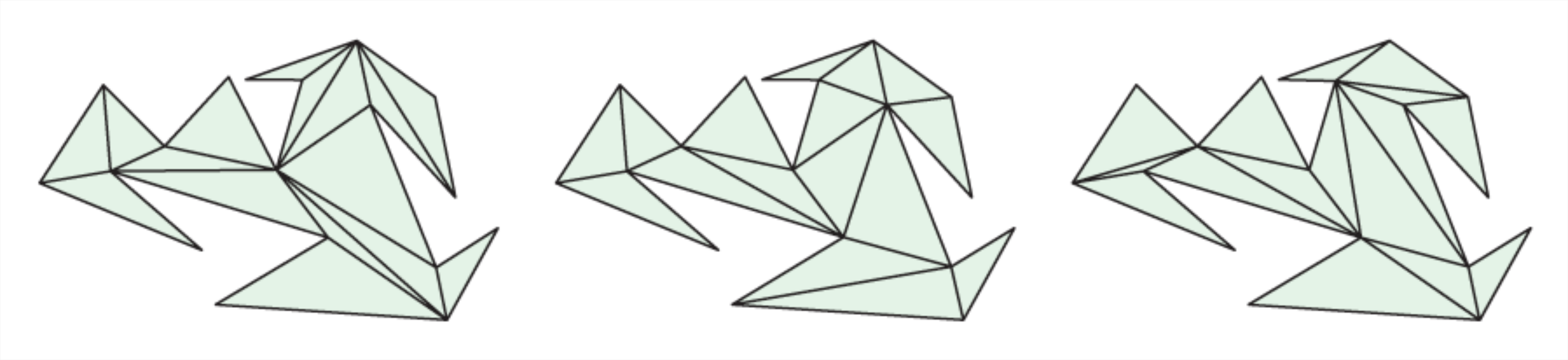
- Todos los puntos en un segmento de recta que no intersequen a ∂P deben estar en el mismo conjunto.
  - los conjuntos pares y los conjuntos impares están conectados.
- Si hay un camino entre puntos de diferentes conjuntos, entonces el camino debe intersecar a ∂P.

- Podemos obtener una descomposición de un polygono P en pedazos más simples por medio de **diagonales**.
- Una **diagonal** de un polígono, es un segmento de recta que conecta dos vértices de P y que está en el interior de P, sin tocar ∂P excepto en sus puntos extremos.
- Decimos que dos diagonales **no se cruzan** si no comparten ningún punto interior.



Triangulación de un polígono

- Una triangulación de un polígono P es la descomposición de P en triángulos por un conjunto maximal de diagonales sin cruces.

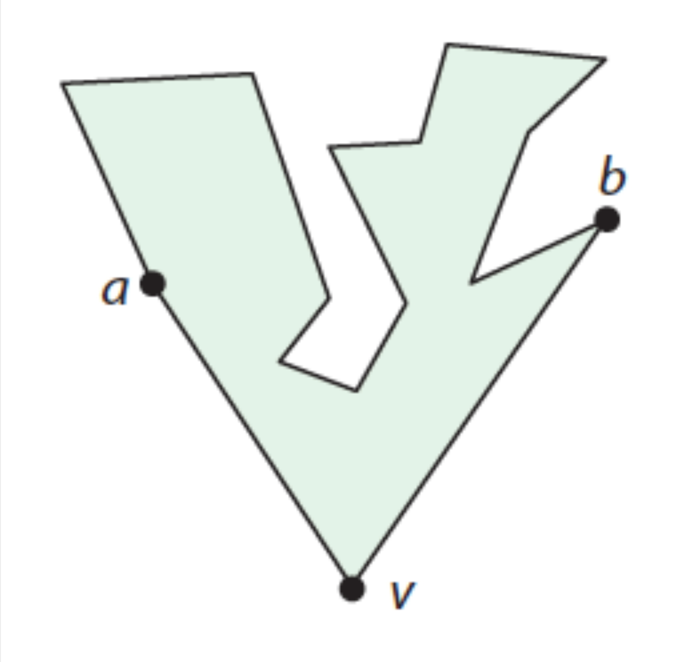


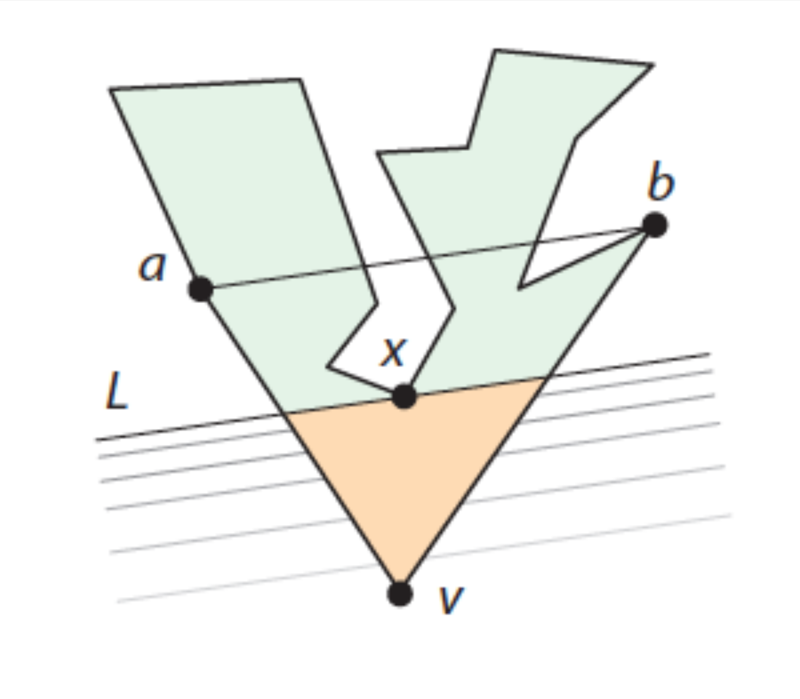
Devadoss, O´Rourke. Discrete and Computational Geometry.

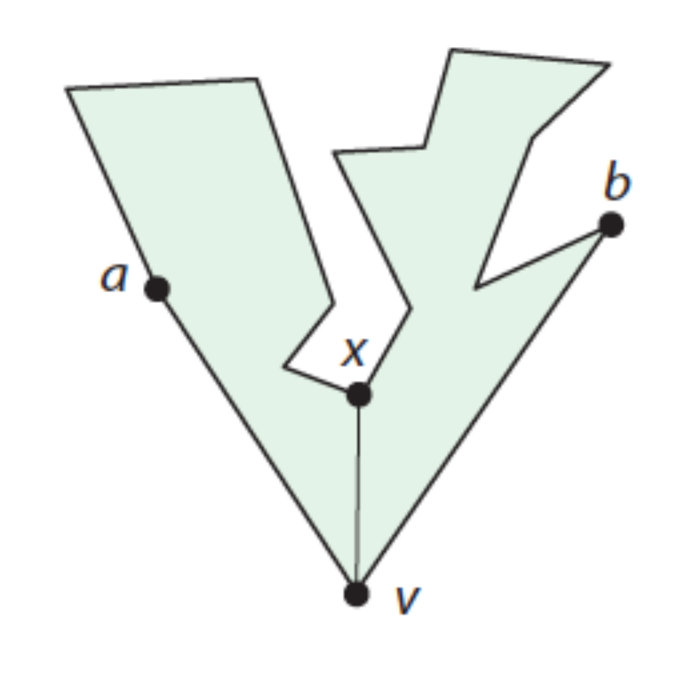
Triangulaciones

- ¿Cuántas triangulaciones diferentes tiene un polígono?
- ¿Cuántos triángulos hay en cada triangulación de un polígono dado?
- ¿Es cierto que todo polígono tiene una triangulación?
- **¿Tiene que tener todo polígono al menos una diagonal?**

Todo polígono con más de tres vértices tiene una diagonal.







Devadoss, O´Rourke. Discrete and Computational Geometry.

- Como podemos descomponer cualquier polígono (con más de 3 vértices) en dos polígonos más pequeños usando una diagonal, por inducción vemos que existe una triangulación.

- Todo polígono tiene una triangulación.

Ejercicio:

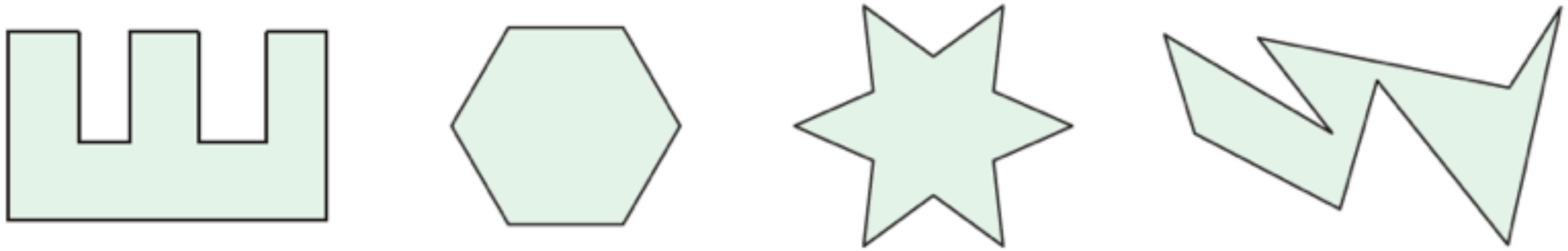
- Probar que toda región poligonal con hoyos poligonales admite una triangulación de su interior.

Número de triángulos en una triangulación.

- Toda triangulación de un polígono **P** con **n** vértices tiene **n-2** triángulos y **n-3** diagonales.

- Muchas pruebas y algoritmos de triangulaciones de polígonos requieren de un triángulo particular para iniciar la inducción o la recursión.
- Triángulos "**oreja**" : Tres vértices consecutivos a, b, c forman una oreja de un polígono si ac es una diagonal del polígono. El vértice b se llama punta de la oreja.

- El número de triangulaciones que tenga un polígono dado P dependerá de la "forma" del polígono.
- Una medida crucial de la forma son los ángulos internos en sus vértices.
- Un vértice de P se llama **reflex** si su ángulo es mayor a π.
- Un vértice de P se llama **convex** si su ángulo es menos o igual a π.
- Algunas veces distinguiremos a los vértices **flat** cuyo ángulo es exactamente π.
- Un vértices es **estrictamente convex** si su ángulo es estrictamente menor a π.
- Un **polígono** P es **convexo** si todos sus vértices son convex.



(a) (b) (c) (d)

Figure 1.8. Find the number of distinct triangulations for each of the polygons given.

Devadoss, O´Rourke. Discrete and Computational

- Existe una diagonal entre cualquiera dos vértices no adyacentes de un polígono P si y solo si, P es un polígono convexo.

- Para un polígono convexo P, donde cada par de vértices no adyacentes determina una diagonal, es posible contar el **número de triangulaciones** de P usando solamente el número de vértices.
- El resultado es el **número de Catalan** (por el matemático belga Eugène Catalan).

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

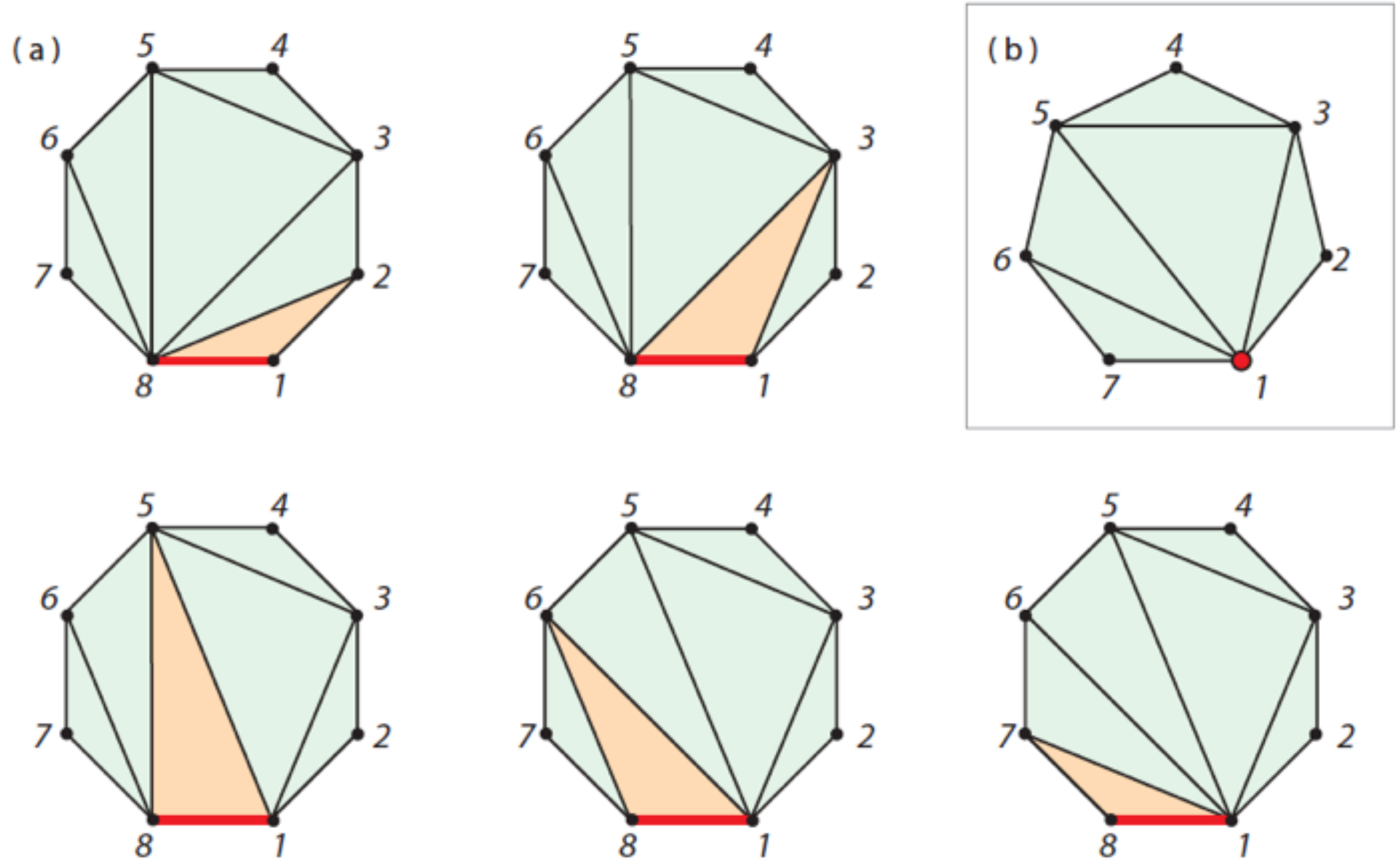


Figure 1.9. The five polygons in (a) all map to the same polygon in (b) under contraction of edge $\{1, 8\}$.

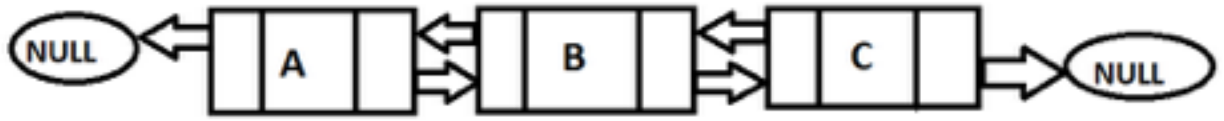
Devadoss, O´Rourke. Discrete and Computational Geometry.

Ear clipping triangulation

- Una oreja de un polígono es un triángulo formado por tres vertices consecutivos dentro del cual no hay otro vértice del polígono.
- El segmento de recta entre v_{i-1} e v_{i+1} se llama diagonal.
- El vértice v_i se llama punta de la oreja.
- Un triángulo consiste en una sola oreja aunque se puede poner como punta de la oreja cualquiera de los tres vértices.
- Un polígono de cuatro o más lados siempre tiene al menos dos orejas que no traslapan (probado por *G.H. Meisters, Polygons have ears, Amer. Math. Monthly*). Esto sugiere un algoritmo recursivo para la triangulación.
- Si podemos encontrar una oreja en un polígono con $n \geq 4$ vertices y removerla, tendremos un polígono de n-1 vertices y podemos repetir el proceso.
- Una implementación inmediata tomaría $O(n^3)$.

D. Eberly. Geometric Tools. (www.geometrictools.com)

Ear clipping triangulation

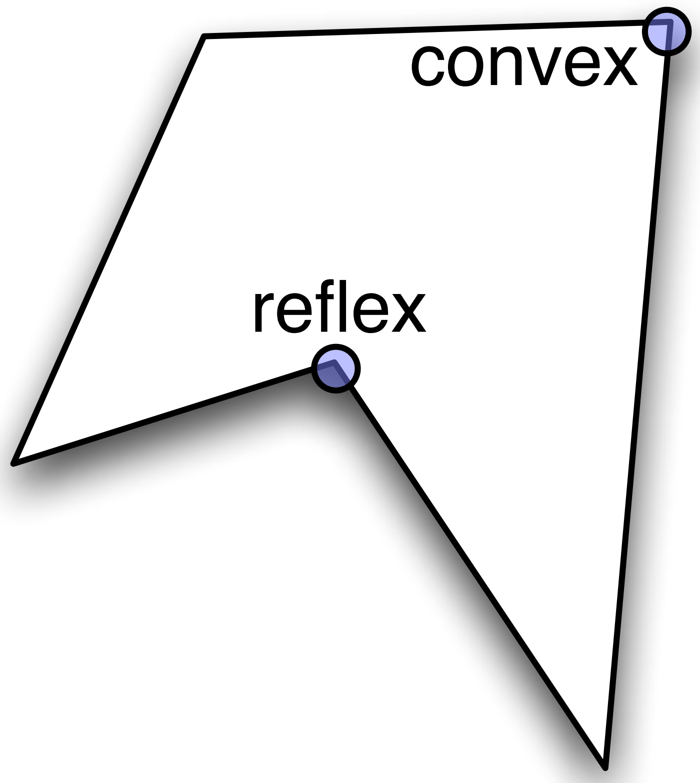


Doubly Linked List (Idlebrains.org)

- Almacenar el polígono como una lista doblemente ligada de manera a poder eliminar rápidamente las puntas de las orejas:
    - construir la lista toma O(n).
- Iterar sobre los vértices para encontrar orejas.
    - para cada vértice v_i y su triángulo correspondiente (v_{i-1}, v_i, v_{i+1}) (el indexado es módulo n por lo que $v_n=v_0$ y $v_{-1} = v_{n-1}$) probar todos los otros vértices para ver si hay alguno dentro del triángulo.
    - Si no hay ninguno dentro del triángulo es una oreja, si hay al menos uno no lo es.

D. Eberly. Geometric Tools. (www.geometrictools.com)

- Es suficiente considerar solamente los vértices reflex para ver si están contenidos en el triángulo.
    - vértice reflex - el ángulo interior formado entre las dos aristas que lo comparten es mayor a 180 grados.
    - vertex convex - el ángulo interior formado entre las dos aristas que lo comparten es menor a 180 grados.
- La estructura de datos de polígono mantiene 4 listas doblemente ligadas simultáneamente:
    - los vertices del polígono en una lista ligada cíclica,
    - los vertices convex en una lista lineal,
    - los vertices reflex en una lista lineal,
    - las puntas de orejas en una lista ligada cíclica.

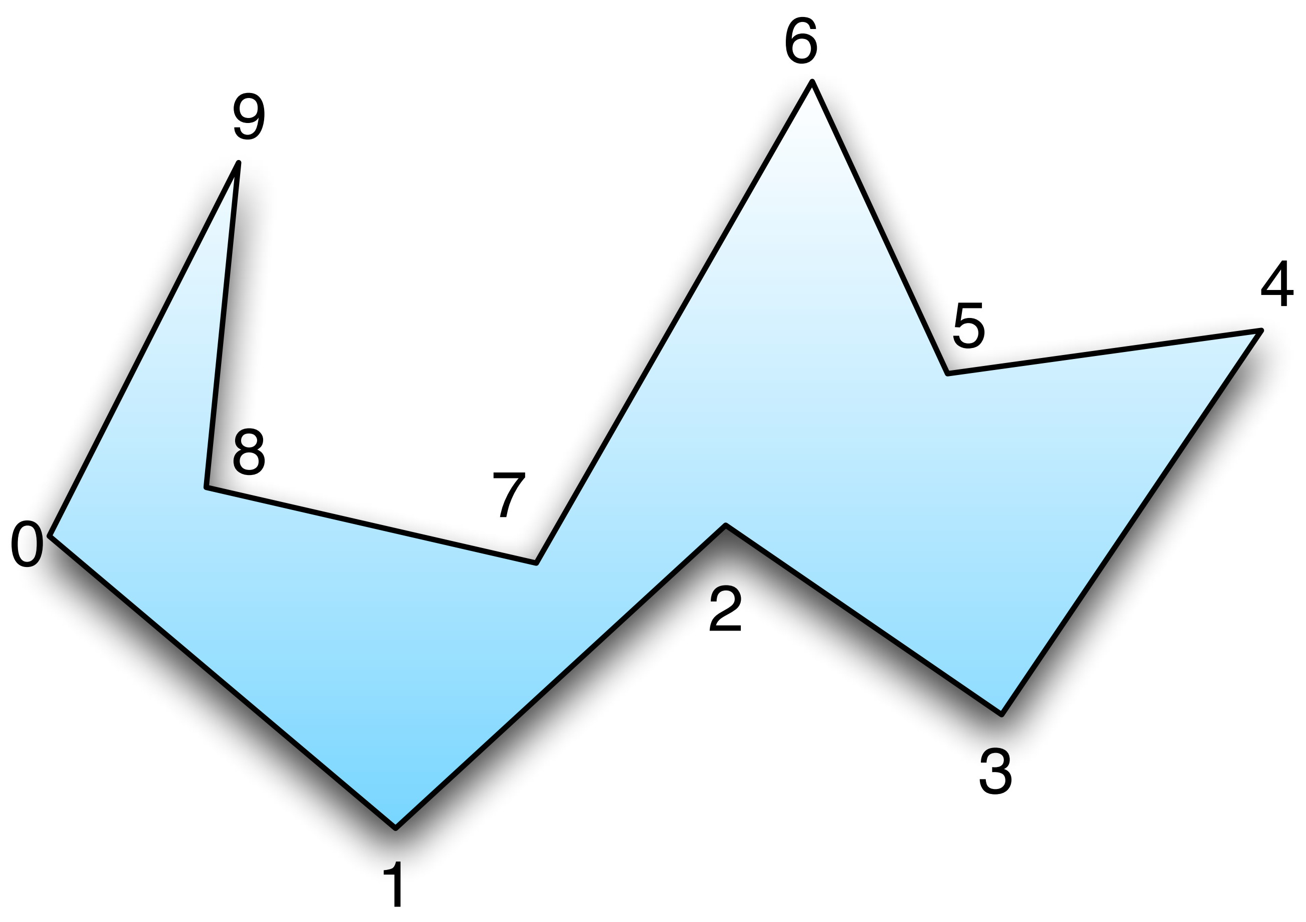


D. Eberly. Geometric Tools. (www.geometrictools.com)

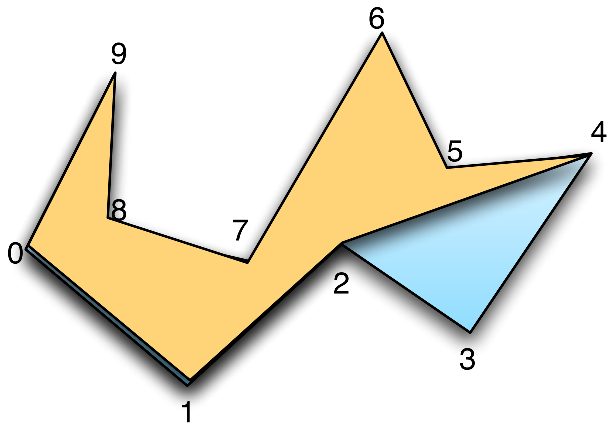
- Una vez construida la lista inicial de vertices reflex y orejas, se eliminan las orejas una a una.
- si v_i es una oreja que se elimina, la configuración de la arista en los vertices adyacentes puede cambiar. Si el vertice adyacente es…
  - convexo es fácil convencerse que va a seguir siendo convexo.
  - oreja, no se queda oreja necesariamente después de eliminar a v_i.
  - reflex, es posible que se vuelva convex o posiblemente oreja después de eliminar a v_i.
- Después de eliminar a vi, si un vértice adyacente es convex, probar si es una oreja iterando sobre los vértices reflex y probando si están contenidos en el triángulo de ese vertex. Hay O(n) orejas, hay que verificar O(n) veces por oreja. El proceso total de eliminación de orejas toma $O(n^2)$.

D. Eberly. Geometric Tools. (www.geometrictools.com)

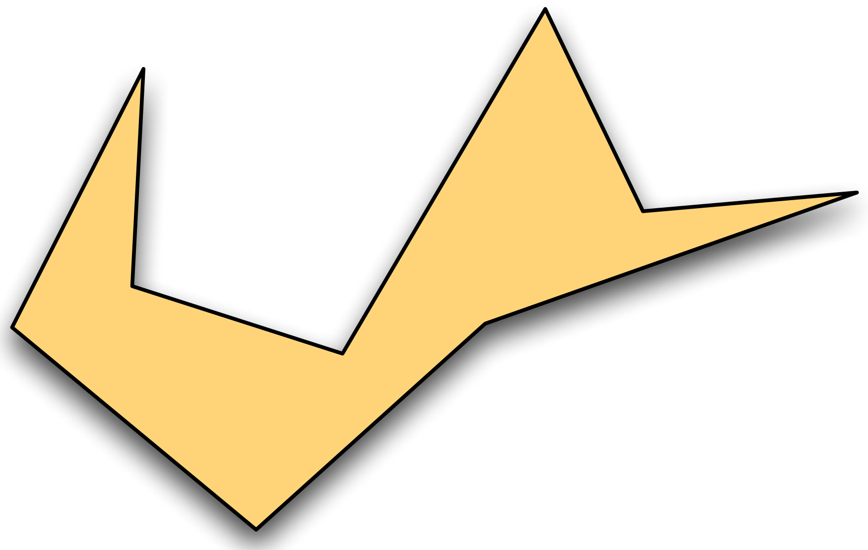
Ejemplo



- Vertices convex C = { 0, 1, 3, 4, 6, 9 }
- Vertices reflex R = { 2, 5, 7, 8 }
- Vertices oreja E = { 3, 4, 6, 9 }



- Vertices convex C = { 0, 1, 3, 4, 6, 9 }
- Vertices reflex R = { 2, 5, 7, 8 }
- Vertices oreja E = { 3, 4, 6, 9 }



- Eliminar oreja 3 :
- Primer triángulo en la triangulación T0 = 〈 2, 3, 4〉.

D. Eberly. Geometric Tools. (www.geometrictools.com)