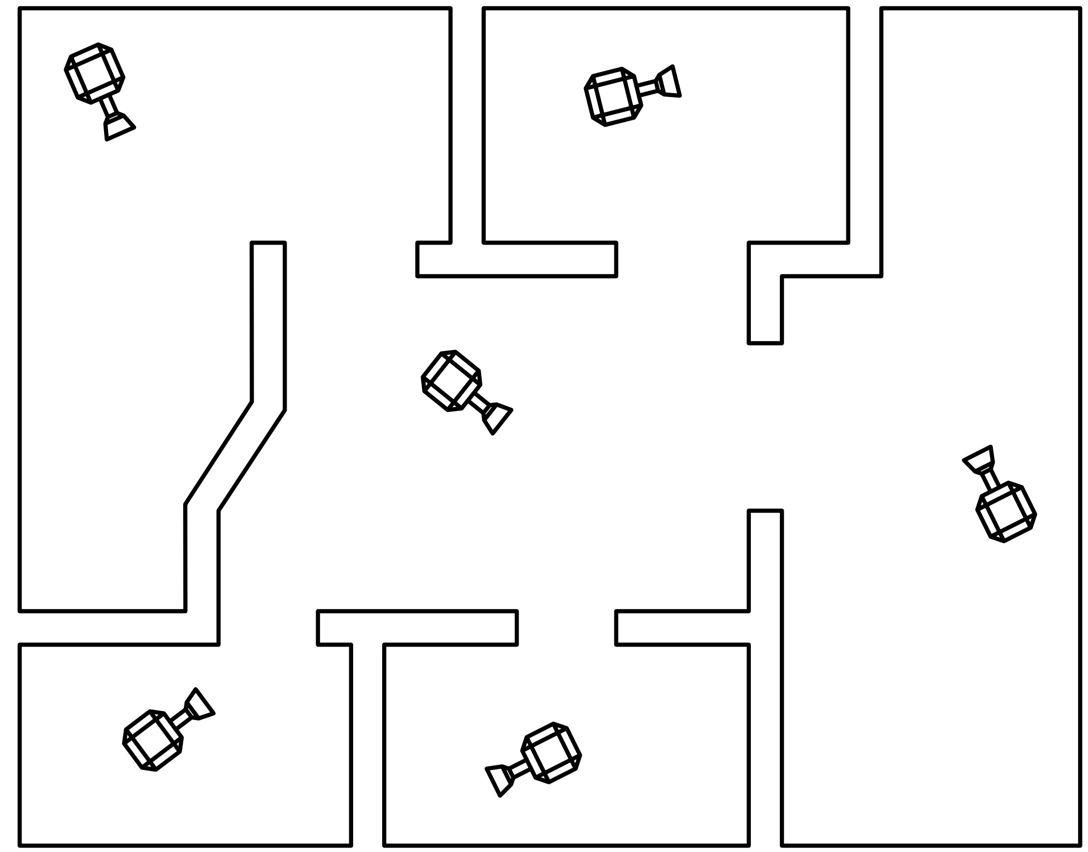
Art Gallery Problem

comp-420



¿Cuántas cámaras se necesitan para vigilar una galería de arte y donde deben ser colocadas?

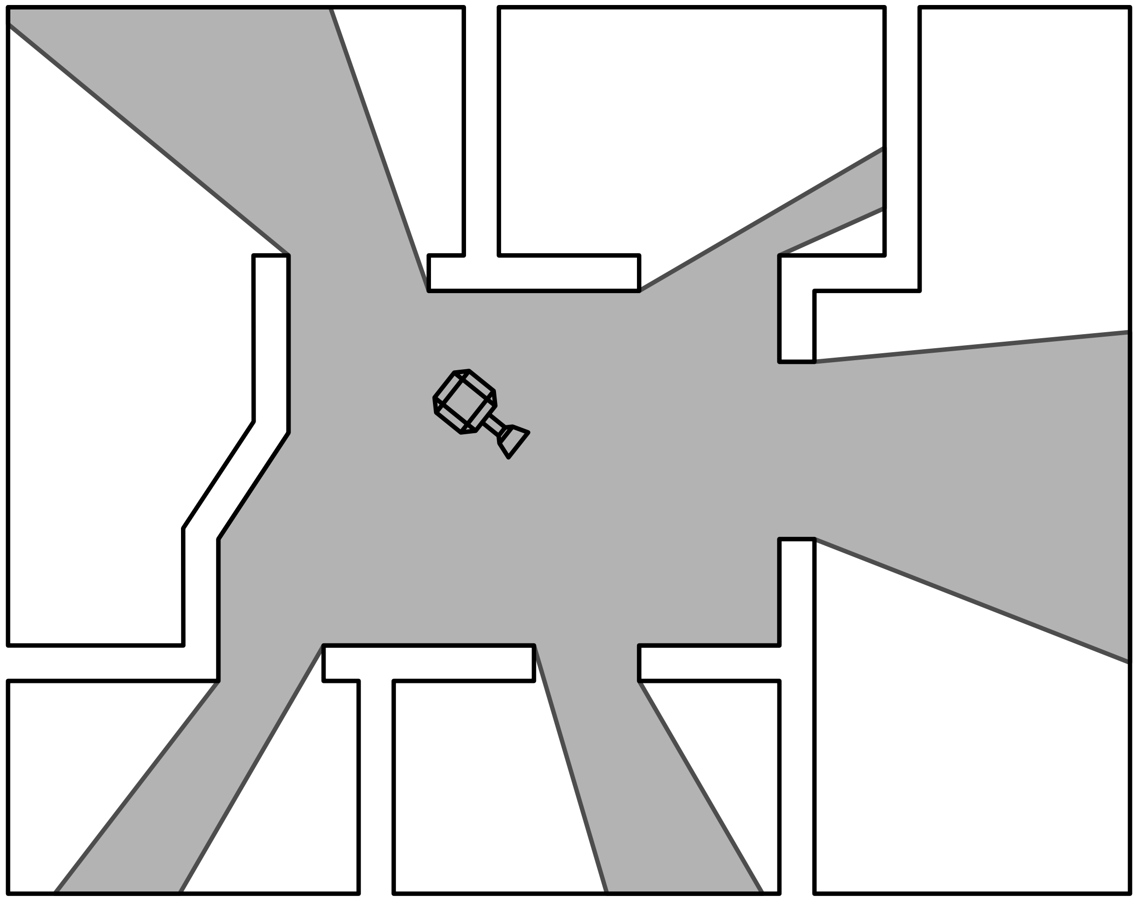
Problema de la galería de arte

Problema de la Galería de Arte

- V. Klee durante un congreso en Stanford en Agosto de 1976 hizo la pregunta:
  - ¿Cuántos guardias son siempre suficientes para vigilar cualquier polígono con n vértices?
- Poco después, V. Chvátal estableció lo que se conoce como el Teorema de la Galería de Arte de Chvátal.
  - Se necesitan

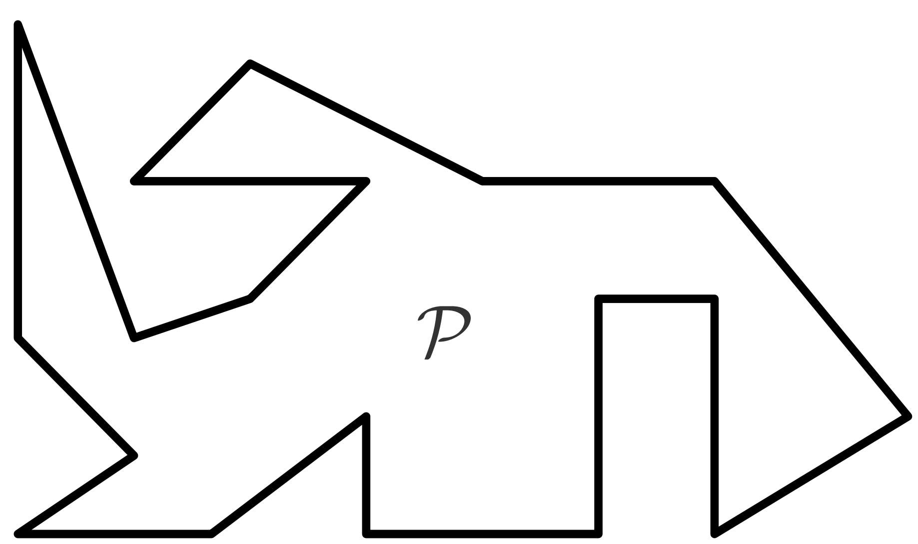
Problema de la Galería de Arte

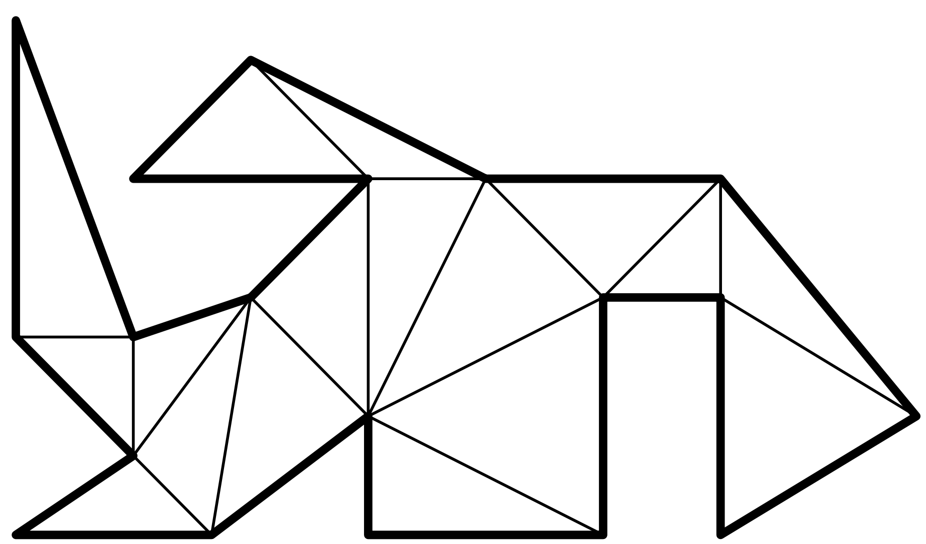
- Galería: región *poligonal* en el plano.
  - *polígonos simples*: rodeado de una cadena cerrada de segmentos que no intersectan a si mismos (sin hoyos).
- Cámara: punto dentro del polígono.
  - la cámara ve aquellos puntos en el polígono que se pueden conectar con un segmento abierto en el interior del polígono.
  - el número de cámaras necesarias para vigilar toda la galería estará acotada por el número n de vértices del polígono.



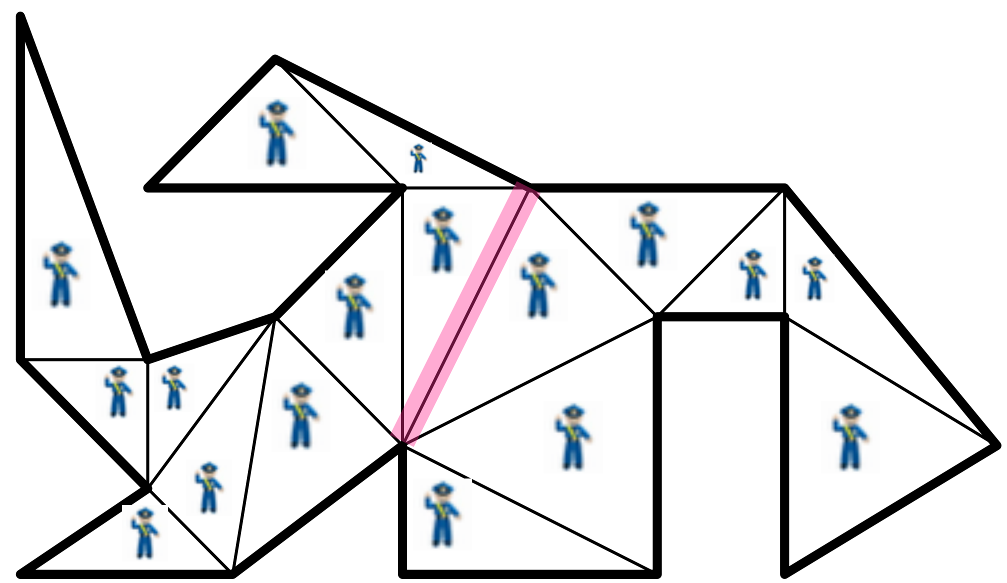
Problema de la Galería de Arte

- Estudiaremos el peor caso para encontrar una cota superior para cualquier polígono simple con n vértices.
- El problema de encontrar el número mínimo de cámaras para un polígono dado es *NP-hard*.
- Sea $\mathcal{P}$ un polígono simple con n vértices.
- Descomponemos $\mathcal{P}$ en partes fácilmente vigilables: *triángulos*



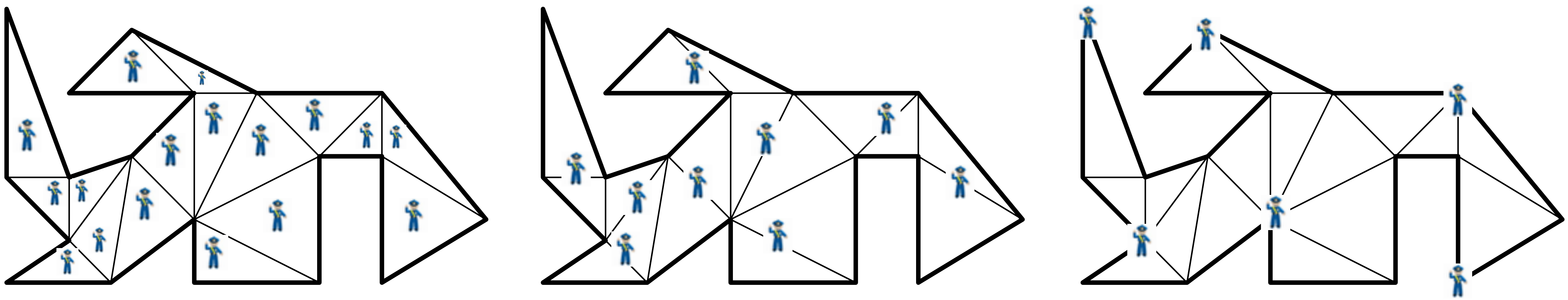


Problema de la Galería de Arte



- Una diagonal es un segmento de recta abierto que conecta a dos vértices de $\mathcal{P}$ y está en el interior de $\mathcal{P}$.
- Podemos vigilar enteramente $\mathcal{P}$ poniendo un guardia o cámara en cada triángulo de la triangulación $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ de $\mathcal{P}$.
- ¿Existe siempre una triangulación para $\mathcal{P}$?
- ¿Cuántos triángulos pueden haber en una triangulación $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ de $\mathcal{P}$?

Problema de la Galería de Arte

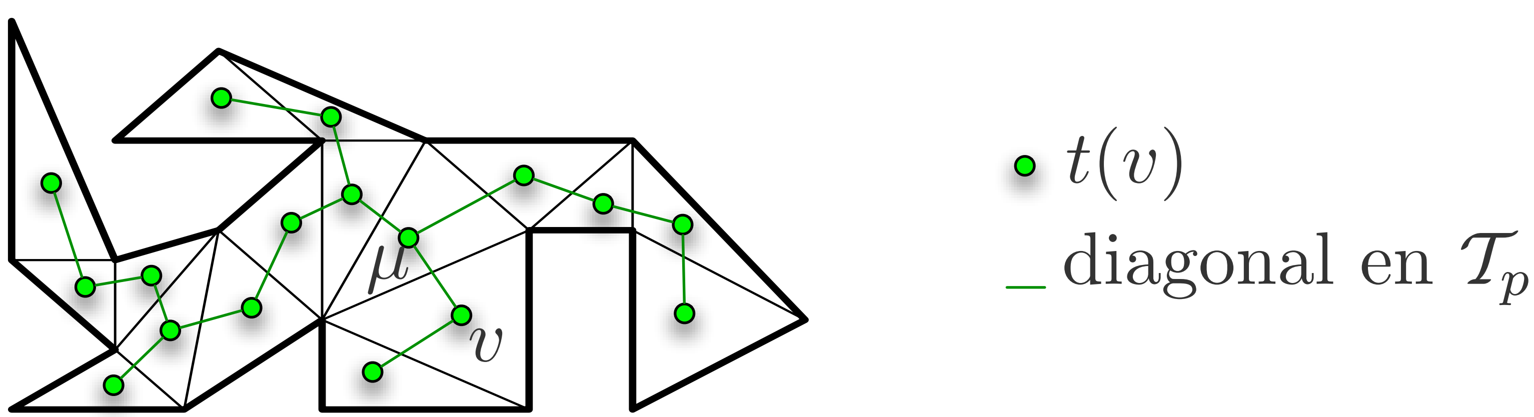


- Sea $\mathcal{T}_p$ una triangulación de $\mathcal{P}$.
- Elegir un subconjunto de vértices de $\mathcal{P}$ tal que cualquier triángulo de $\mathcal{T}_p$ tenga al menos un vértice seleccionado. Los guardias serán puestos en estos vértices.
- Para encontrar estos vértices asignamos a cada vértice de $\mathcal{P}$ un color: gris, blanco o negro.
- El color es asignado de tal manera que dos vértices conectados por una arista o una diagonal tendrán diferente color.

Coloreado de un polígono triangulado

- Cada vértice del triángulo tiene un color diferente.
- Eligiendo el conjunto más pequeño de vértices del mismo color podemos vigilar $\mathcal{P}$ usando a lo más $\lfloor n/3 \rfloor$ guardias.
- ¿Existe siempre tal coloración?
- Para probar esto miramos la estructura llamada grafo dual *(dual graph)* de $\mathcal{T}_p$

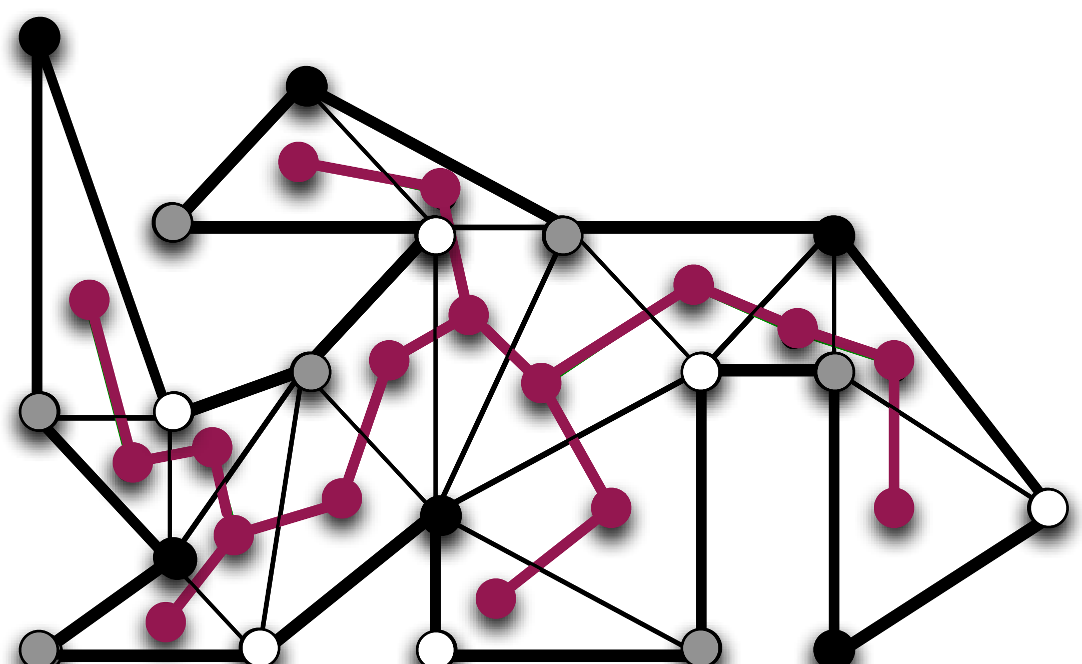
$\mathcal{G}(\mathcal{T}_p)$



- Cualquier diagonal corta a $\mathcal{P}$ en dos, entonces la eliminación de una arista de $\mathcal{G}(\mathcal{T}_p)$ divide el grafo en dos: es un árbol.

Coloreado de un polígono triangulado

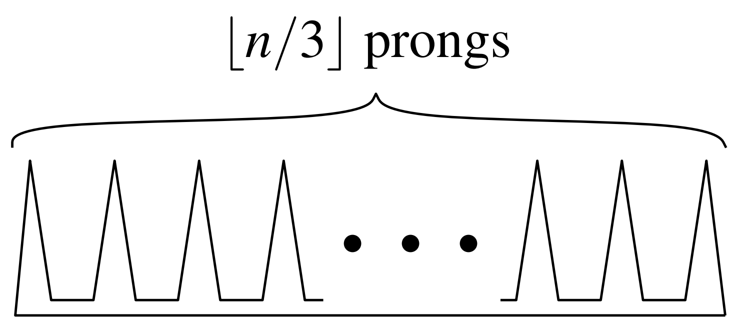
- Esto significa que podemos encontrar una coloración usando un recorrido simple en un grafo, tal como *depth-first search*.
- Mientras hacemos el recorrido se mantiene la siguiente invariante:
  - todos los vértices visitados tienen un color (blanco, gris o negro) asignado.
  - ningún par de vértices conectados ha recibido el mismo color.



- Un poligono simple se puede colorear con 3 colores: se puede vigilar con $\lfloor n/3 \rfloor$ guardias.

Problema de la Galería de Arte

- El coloreado de polígonos da el resultado óptimo de guardias en el peor caso.



Teorema 2 (de la galería de arte)

Para un polígono simple con n vértices, $\lfloor n/3 \rfloor$guardias son ocasionalmente necesarios y siempre suficientes para poder ver cualquier punto del polígono por al menos unos de los guardias.

Problema de la Galería de Arte

- Para implementar un algoritmo eficiente necesitamos:
  - método para calcular la triangulación de un polígono simple *O(n log n)*.
  - uso de depth-first search en el grafo dual para calcular la coloración.
  - encontrar el conjunto más pequeño con vértices del mismo color.
  - poner un guardia en cada uno de estos vértices.

Teorema 3:

Sea $\mathcal{P}$ un polígono simple con n vértices. Se puede calcular un conjunto de $\lfloor n/3 \rfloor$ posiciones de guardias en $\mathcal{P}$ tal que cualquier punto dentro de $\mathcal{P}$ sea visible por al menos un guardia en un tiempo $O(n \log n)$.