$\mathcal{M}_3 = \{\pi M^3 \mid M^3$ es una 3-variedad orientable cerrada$\}$

$= \{ \| x_1, \dots, x_n : r_1, \dots, r_n \| \mid r_1 x_1 r_1^{-1} \cdots r_n x_n r_n^{-1} = x_1 \cdots x_n$ en $\| x_1, \dots, x_n : \| \}$

$\mathcal{S}_n = \{\pi(S^{n+2} - M^n) \mid M^n$ subvariedad cerrada orientable de $S^{n+2}\}$

Se tiene $\mathcal{S}_1 \subsetneq \mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_3 = \mathcal{S}_4 = \cdots =$

$= \{ G \approx \| x_1, \dots, x_n : r_1, \dots, r_m \| \mid$ cada r_p es de la forma $x_i^{-1} x_j x_i x_k^{-1}$

y $G/G' \approx \mathbb{Z} \}$

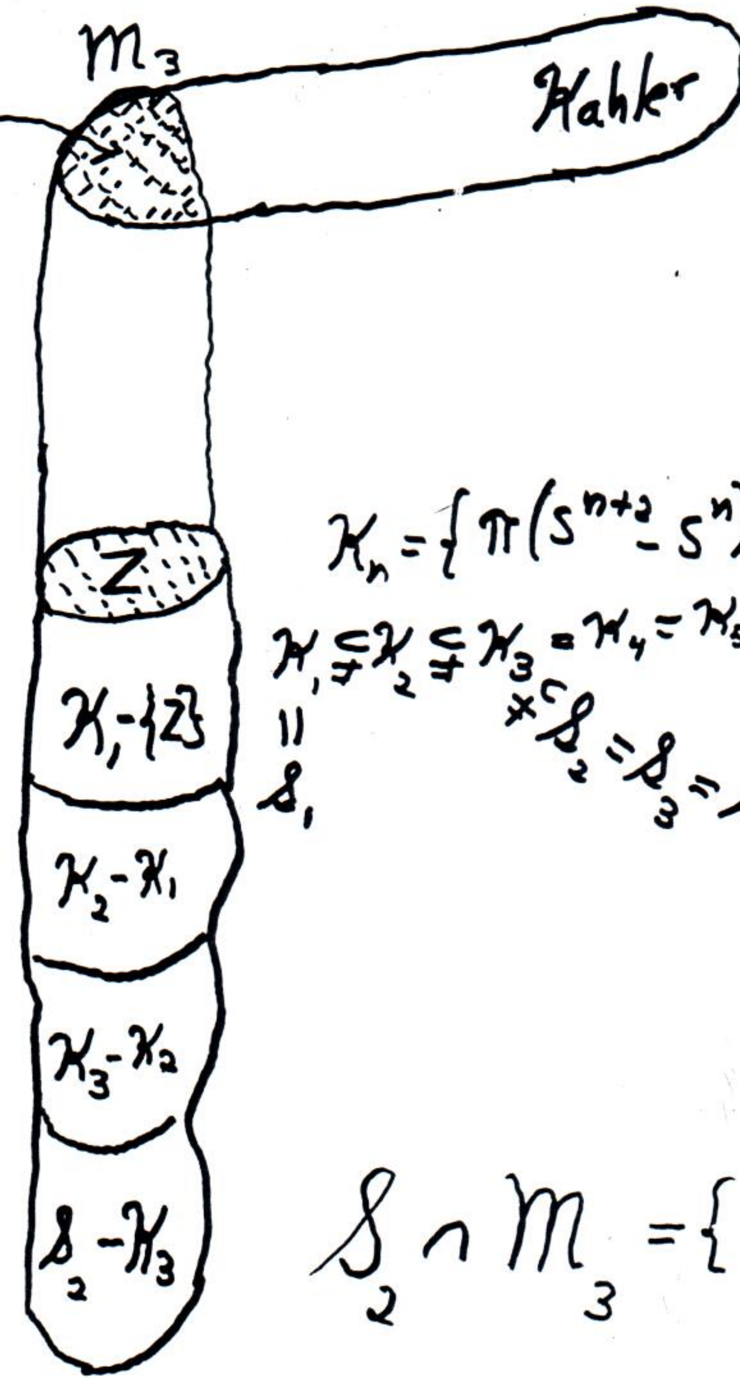
Teorema. $\mathcal{S}_2 \cap \mathcal{M}_3 = \{\mathbb{Z}\}$

②

Pregunta (J. Simon). Si M^3 es una variedad cerrada de la forma $E_k \underset{S^1 \times S^1}{\cup} (S^1 \times D^2)$, ¿es posible que $\pi M^3 \in \mathcal{S}_2$?

Respuesta. No. (porque $\pi M^3 \not\cong Z$ (Gabai))

(E_k es el exterior de un nudo no trivial k en S^3)



subgrupos finitos de $O(4)$ que actúan libremente en S^3

$$\mathcal{K}_n = \{\pi(S^{n+2} - S^n)\}$$

$$\mathcal{K}_1 \subsetneq \mathcal{K}_2 \subsetneq \mathcal{K}_3 = \mathcal{K}_4 = \mathcal{K}_5 = \cdots$$

$$\mathcal{K}_1 = \mathcal{S}_1$$

$$\mathcal{K}_3 \subsetneq \mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_3 = \mathcal{S}_4 = \cdots$$

$$\mathcal{S}_2 \cap \mathcal{M}_3 = \{Z\}$$

SUMAS ACTIVAS

Sean G un grupo y $\mathcal{F} = \{F_i\}_{i \in I}$ una familia de subgrupos distintos de G que genera G y es cerrada bajo conjugación. Construiremos un grupo $S = \boxplus \mathcal{F}$, la <u>suma activa</u> (discreta) de $\mathcal{F}$, y un epimorfismo $\varphi : S \longrightarrow G$.

Si $i \in I$, sea $\hat{F}_i = F_i \times \{i\}$ donde $\{i\}$ es grupo trivial.

Si $x = (g, i) \in \hat{F}_i$ y $y = (h, j) \in \hat{F}_j$ sea $x^y = (h^{-1} g h, k) \in \hat{F}_k := (h^{-1} F_i h, k)$

Sea $$S = \frac{\underset{i \in I}{*} \hat{F}_i}{\langle\langle y^{-1} x^{-1} y \, x^y : x \in \hat{F}_i ,\ y \in \hat{F}_j \rangle\rangle}$$

Se define el epimorfismo $\varphi : S \longrightarrow G$ por $\varphi([g, i]) = g$.

Nótese que $\hat{F}_i \longrightarrow S \xrightarrow{\varphi} G$ es inyectiva así que $\hat{F}_i \leq S$

Prop. $\varphi^{-1}(\text{Centro}(G)) = \text{centro}(S)$

Prop. Se tiene una sucesión exacta

$$H_2(S) \xrightarrow{\varphi_*} H_2(G) \to \ker\varphi \to H_1(S) \xrightarrow{\varphi_*} H_1(G) \to 0$$

Nota: $H_1(G) = G/G'$; $H_2(G) = \dfrac{F' \cap R}{[F, R]}$ si $G = \dfrac{F}{R}$ y F es libre)

Def. Si φ es isomorfismo decimos que G es la suma activa de $\mathcal{J}$

Nótese que esto ocurre sii φ_* es monomorfismo en H_1 y epimorfismo en H_2.

Ejercicio: Si todos los grupos en $\mathcal{J}$ son conjugados e intersecan trivialmente a G' entonces $H_1(S) \xrightarrow{\varphi_*} H_1(G)$ es isomorfismo. Si, además, $H_2(G) = 0$ entonces G es la suma activa de $\mathcal{J}$.

PRODUCTO DE PONTRJAGIN

Si g_1 y g_2 son elementos de G que conmutan entonces $g_1 \wedge g_2$, el <u>producto de Pontrjagin</u>, es un elemento de $H_2(G)$ definido como sigue:

Fijemos un generador μ de $H_2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$.

Sea $\psi : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to G$ el homomorfismo definido por $\psi(1,0)=g_1$, $\psi(0,1)=g_2$.

Entonces $g_1 \wedge g_2$ es la imagen de μ bajo $\psi_* : H_2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}) \longrightarrow H_2(G)$.

Propiedades: $(fg)\wedge h = f\wedge h + g\wedge h$ si $[f,h]=[g,h]=1$

$$g\wedge g = 0$$

$$g_1\wedge g_2 = -g_2\wedge g_1$$

$$g_1\wedge g_2 = 0 \quad \text{si} \quad g_1 \in G'(g_2)$$

Si $\varphi : S \to G$ es homomorfismo $s_1, s_2 \in S$ y $[s_1,s_2]=1$ entonces

$$\varphi_*(s_1\wedge s_2) = \varphi_*(s_1)\wedge\varphi_*(s_2)$$

Prop. Si $G = \pi(S^4 - F^2)$ donde F^2 es una superficie cerrada orientable y $m \in G$ is un meridiano entonces

$$H_2(G) = C_G(m) \wedge m := \{c \wedge m : c \in C_G(m)\}$$

Dem. Sea $F^2 \times S^1 = \partial(\text{vecindad tubular de } F^2)$ donde m está representado por $\{\text{punto}\} \times S^1$.

$H_2(F^2 \times S^1) \longrightarrow H_2(S^4 - F^2)$ es sobre y, por tanto,

$$H_2(\pi(F^2) \times \pi(S^1)) = H_2(\pi(F^2 \times S^1)) \longrightarrow H_2(\pi(S^4 - F^2)) = H_2(G)$$

es sobre.

Las imágenes de $\pi(S^1)$ y de $\pi(F^2)$ bajo $\pi(F^2 \times S^1) \to G$ son $\langle m \rangle$ y un subgrupo de $C_G(m)$. Luego, la imagen del epimorfismo $H_2(\pi(F^2 \times S^1)) \to H_2(G)$ es $C_G(m) \wedge m$. $\square$

Teorema. Sean G un grupo finitamente presentable y $m \in G$

Son equivalentes:

i) G es el grupo fundamental del complement de una superficie cerrada diferenciable orientable de S^4 con m como meridiano.

ii) $\langle\langle m \rangle\rangle = G$, $H_1(G) \approx \mathbb{Z}$ y $H_2(G) = C_G(m) \wedge m$.

iii) $\langle\langle m \rangle\rangle = G$, $H_1(G) \approx \mathbb{Z}$ y G es la suma activa de

$\mathcal{H} = \{$ conjugados de $\langle m \rangle \}$

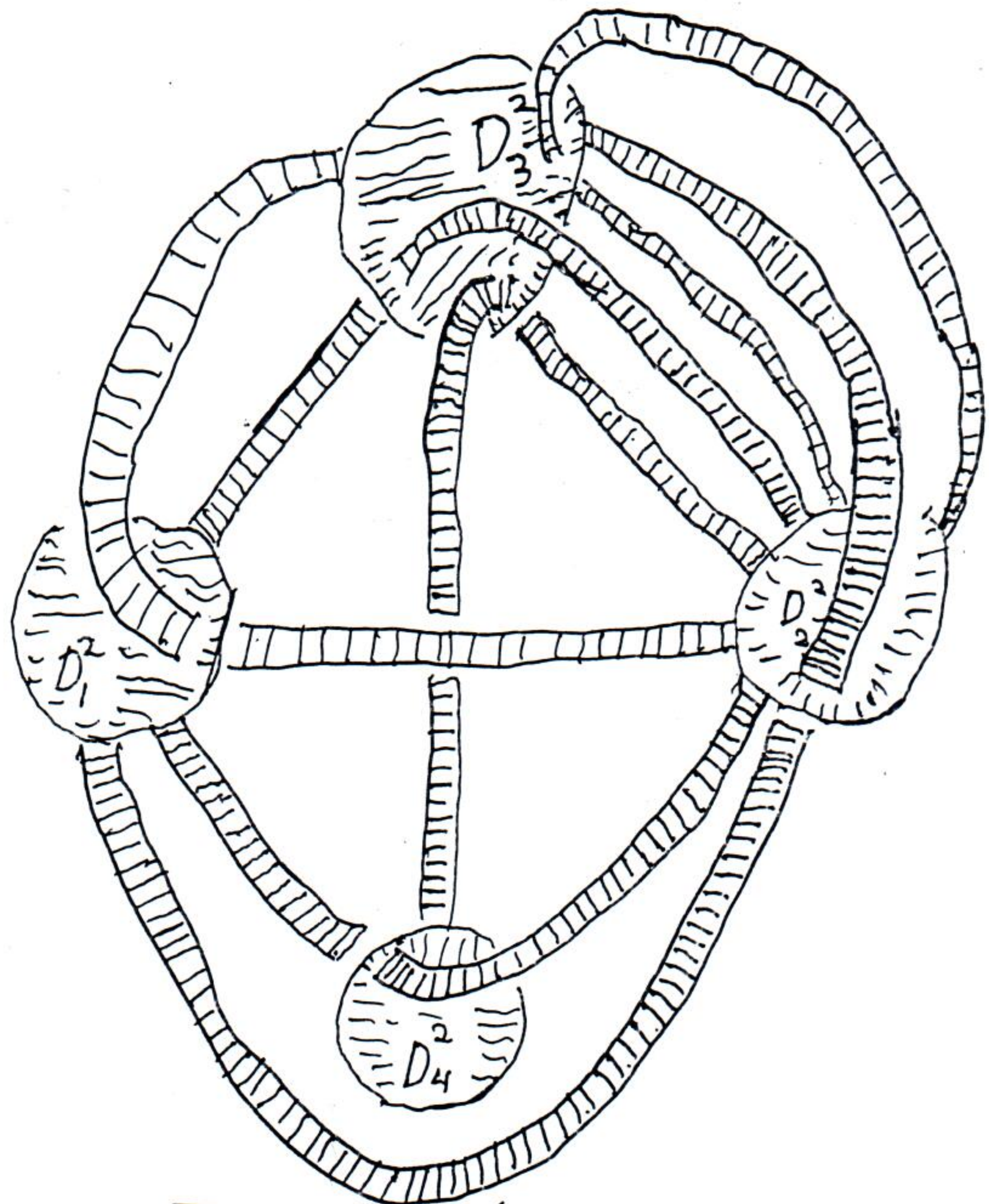
iv) G tiene una presentación finita $(f_1, \dots, f_n : r_1, \dots, r_p)$ donde todas las relaciones son de la forma $f_i^{-1} f_j f_i f_k^{-1}$, y $H_1(G) \approx \mathbb{Z}$.

Dem. $i \Rightarrow ii$ es la proposición anterior

$ii \Rightarrow iii$ $H_1(\boxplus \mathcal{F}) \longrightarrow H_1(G)$ es isomorfismo porque $\langle m \rangle \cap G' = \{1\}$ y todos los miembros de $\mathcal{F}$ son conjugados. Como $H_2(G) = C_G(m) \wedge m$, que está contenido en la imagen de $H_2(\boxplus \mathcal{F}) \longrightarrow H_2(G)$, este homomorfismo es sobre. Luego $\ker(\varphi : \boxplus \mathcal{F} \longrightarrow G) = \{1\}$.

iii $\Rightarrow$ iv Nótese que, en este caso, $\boxed{+}\,\mathcal{J}$ ($\approx G$) tiene una presentación (posiblemente infinita) $(f_1, \ldots : r_1, \ldots)$ en la que cada relación tiene la forma $f_i^{-1} f_j f_i f_k^{-1}$. Usando jugadas de Tietze y el hecho de que G es finitamente presentable puede cambiarse la presentación a una finita del mismo tipo.

iv $\Rightarrow$ i El truco de Yajima (Osaka J. Math. 6 (1969)) produce un par (D^4, W^2) con $\pi(D^4 - W^2) \approx G$ y $\pi(\partial D^4 - \partial W^2) \longrightarrow \pi(D^4 - W^2)$ suprayectiva. Entonces, $\pi(S^4 - F^2) \approx G$, si (S^4, F^2) es el doble de (D^4, W^2).



Truco de Yajima para $G =$

$\|x_1, x_2, x_3, x_4 : x_4^{-1}x_1x_4x_2^{-1},\ x_2^{-1}x_1x_2x_3^{-1},\ x_1^{-1}x_2x_1x_3^{-1},\ x_3^{-1}x_2x_3x_4^{-1},\ x_3^{-1}x_1x_3x_2^{-1},\ x_3^{-1}x_2x_3x_2^{-1}\|$

$W^2 = D\times\{\tfrac{1}{3}\} \cup \partial D\times[\tfrac{1}{3},\tfrac{2}{3}] \cup B\times\{\tfrac{2}{3}\} \cup L\times[\tfrac{2}{3},1] \subset S^3\times[\tfrac{1}{3},1] \subset D^4$

donde $D = \bigcup_{i=1}^{4} D_i^2$, B es la unión de las bandas azules $L = \overline{\partial D \cup \partial B - \partial D \cap \partial B}$

y $S^3\times\{1\} = \partial D^4$. Sea (S^4, F^2) el doble de (D^4, W^2).

Entonces $\pi(S^4 - F^2) \approx \pi(D^4 - W^2) \approx G$

Lema 1. Sea $G = \pi M^3$, M^3 cerrada orientable, $G/G' \simeq \mathbb{Z}$ y G normalmente generado por un elemento. Entonces M^3 es prima.

Dem. Si M^3 no es prima, entonces $M^3 = M_1^3 \# \Sigma_1^3 \# \cdots \# \Sigma_n^3$ $(n \geq 1)$ con $H_1 M_1^3 \simeq \mathbb{Z}$ y $\Sigma_1^3, \dots, \Sigma_n^3$ son esferas homológicas primas con $\pi\Sigma_i^3 \neq 1$. $\pi\Sigma_i^3$ es finito o libre de torsión. Nótese que $H_1 M^3 * \pi\Sigma_1^3$ es cociente de G así que se puede generar normalmente por un elemento. Esto es imposible si $\pi\Sigma_1^3$ es finito por Gerstenhaber y Rothaus y también es imposible si $\pi\Sigma_1^3$ es libre de torsión por Klyachko. Luego M^3 es prima.

Def: M^3 (compacta, orientable, conexa) es <u>de Seifert</u> con <u>Fibración</u> $\mathcal{S} = \{S_t\}_{t\in B}$ si $\mathcal{S}$ es una familia de círculos ajenos, llamadas <u>Fibras</u>, tales que $M^3 = \bigcup_{t\in B} S_t$ y, para todo $x \in M$, existen V, vecindad de x, y $h: D^2 \times I \xrightarrow{\approx} V$ tal que, para todo $p \in D^2$,

$h(\{p\}\times I) = V \cap S_t$ para alguna $t \in B$.

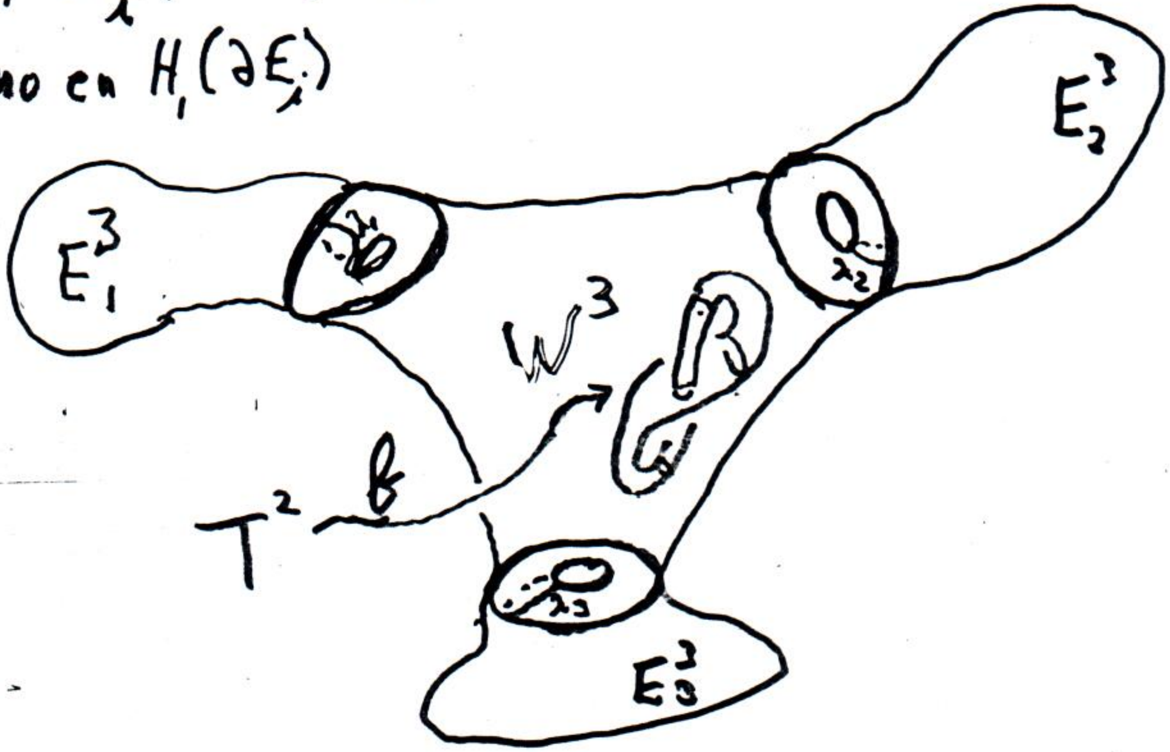
Si S_{t_0} tiene una vecindad "saturada" $N = \bigcup_{t\in U} S_t \approx S^1 \times D^2$ tal que $(N, S_t) \approx (N, S_{t_0})$ $\forall t \in U$ decimos que S_{t_0} es <u>ordinaria</u>; si no es <u>excepcional</u>.

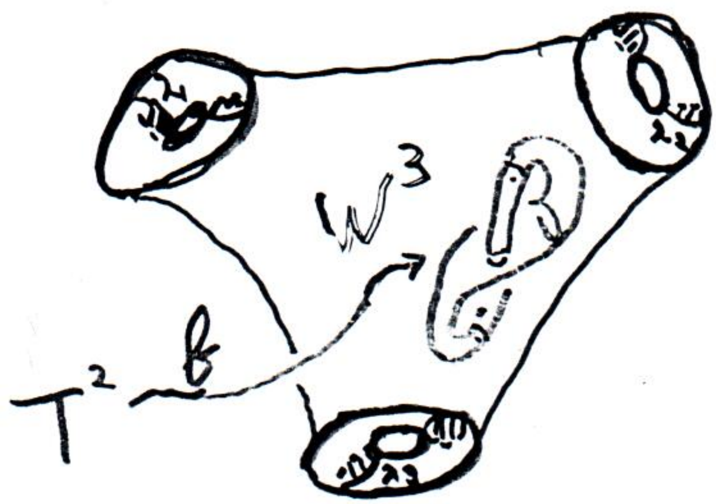
Sea $\rho : M^3 \to B$ definida por $\rho(S_t) = \{t\}$. Dotamos a B, la <u>base</u> de la fibración, con la topología tal que ρ es mapeo cociente. B es una 2-variedad compacta conexa.

Si B es orientable ($\mathcal{S}$ es de tipo $O\sigma$) $M^3 - \bigcup_{t\in K} S_t \approx (B-K)\times S^1$ si $K \neq \emptyset$ y $\bigcup_{t\in K} S_t$ contiene a las fibras excepcionales.

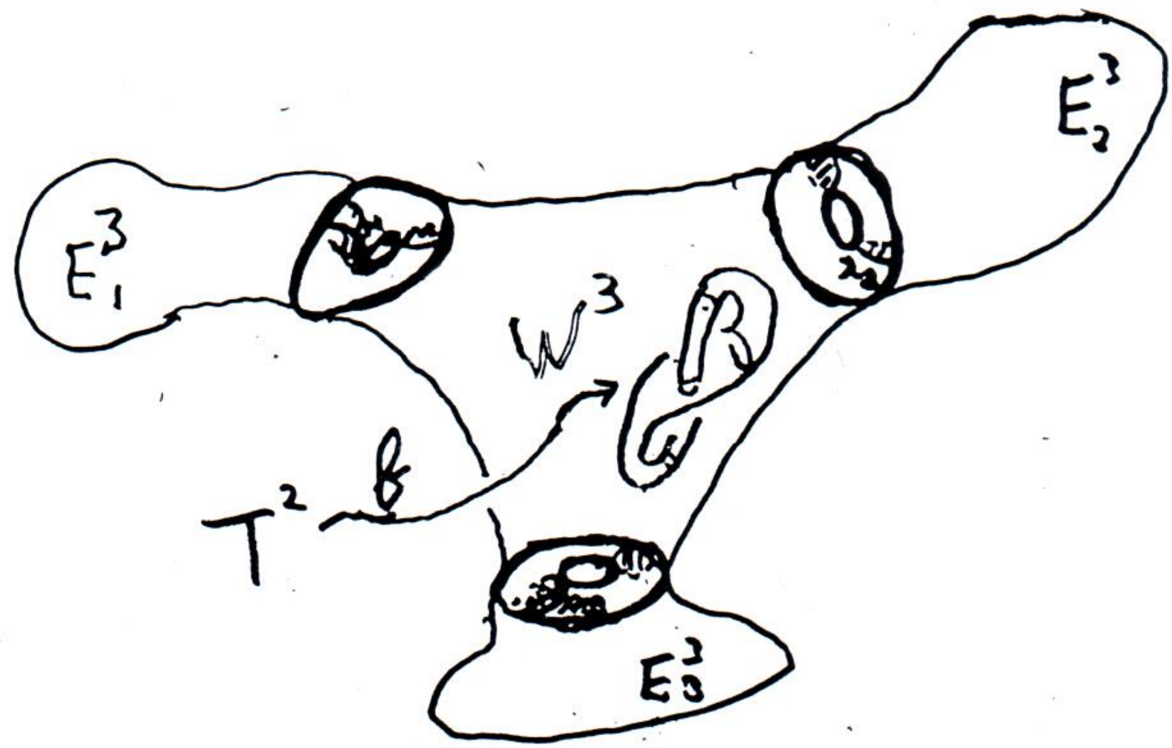
Lema 2. Sea $f: T^2 \longrightarrow M^3$ un mapeo del toro T^2 en una 3-variedad cerrada, orientable, irreducible (toda 2-esfera es frontera de una 3-bola en M^3) tal que $H_1 M^3 \approx \mathbb{Z}$. Si $f_*: H_1(T^2) \to H_1(M^3)$ es sobre entonces $f_*: H_2(T^2) \to H_2 M^3$ es cero.

Dem. Por JSJ puede suponerse que $f(T^2) \subset W^3 \subset M^3$ donde W^3 es de Seifert. Sea $E^3 = M^3 - W^3$. Cálculos homológicos dan que cada componente E_i^3 de E^3 tiene frontera conexa, $H_j(E_i^3) \approx H_j(S^1)$ $\forall j$ y $\partial E_i^3 (\approx S^1 \times S^1)$ tiene una curva simple nulhomóloga en $H_1(E_i)$ mas no en $H_1(\partial E_i)$





$\hat{M}^3$



$M^3 \cup \hat{M}^3$ $\quad$ $M^3 \cap \hat{M}^3 = W^3$

Sea $g: T^2 \to W^3$ tal que $ig = f$.

En el diagrama.

$$\begin{tikzcd} & H_2(T^2) \arrow[d, "g_*"] \arrow[dr, "f_*"] & \\ H_2(W^3) \arrow[r, "j_*"] & H_2(W^3) \arrow[r, "i_*"'] & H_2(M^3) \end{tikzcd}$$

$i_* j_* = 0$ así que,

si $\operatorname{im} g_* \subset \operatorname{im} j_*$, $f_* = 0$.

Se prueba que, si $W^3 = D_0^2 \times S^1$ donde D_0^2 es un disco con agujeros, $\operatorname{im} g_* \subset \operatorname{im} j_*$ y, por tanto, $f_* = 0$. Podemos suponer entonces $W^3 \neq D_0^2 \times S^1$.

4) Sea $\hat{M}^3 = \coprod_{i=1}^{m} (S^1 \times D_i^2) \cup_{\psi} W^3$ donde $\psi : \coprod_{i=1}^{m} (S^1 \times \partial D_i^2) \xrightarrow{\approx} \partial W$ manda a $\{1\} \times \partial D_i^2$ en λ_i. Se verifica que $\hat{M}^3$ es una variedad de Seifert irreducible, con S^2 como base, que fibra sobre S^1, que existe $\phi : M^3 \longrightarrow \hat{M}^3$ tal que $\phi | W = id_W$ y $H_j(M^3) \xrightarrow[\approx]{\phi_*} H_j(\hat{M}^3)$

Sea $\hat{f}: T^2 \longrightarrow \hat{M}^3$ la composición $T^2 \xrightarrow{g} W^3 \longrightarrow \hat{M}^3$

Se puede probar que $\hat{f}$ es homotópica a $\hat{f}'$ donde $\hat{f}'(T^2)$ no interseca fibras excepcionales de $\hat{M}^3$ así que $\rho \hat{f}'(T^2) \neq B^2$ donde $\rho: \hat{M}^3 \longrightarrow B^2$ es la proyección natural sobre la base de la fibración por lo que $\rho_* \hat{f}_* = \rho_* \hat{f}'_* = (\rho \hat{f}')_*: H_2(T^2) \to H_2(\hat{M}^3)$ es cero.

~~Dado~~ Sea F^2 fibra de la fibración $\hat{M}^3 \longrightarrow S^1$ $\rho | F^2$ es un cubrimiento ramificado c, así que en el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \approx H_2(F^2) \arrow[rr, "\approx"] \arrow[dr, "c_*"'] & & H_2(M^3) \approx \mathbb{Z} \arrow[dl, "\rho_*"] \\ & H_2(B^2) & \end{tikzcd}$$

c_*, y por tanto ρ_*, es inyectiva.

Luego $\phi_* f_* = \hat{f}_*: H_2(T) \longrightarrow H_2(\hat{M}^3)$ es cero y $f_* = 0$.

Teorema. Sea $G = \pi M^3$, M^3 cerrada y orientable. Supóngase $G \simeq \pi(S^4 - F^2)$ donde F^2 es una 2-subvariedad cerrada, orientable, diferenciable de S^4. Entonces $G \approx \mathbb{Z}$.

Dem. Supóngase $\pi M^3 \not\approx \mathbb{Z}$. Obtendremos contradicción.

Sea $m \in G$ tal que $\langle\langle m \rangle\rangle = G$ y $\mathcal{C}(m) \wedge m = H_2(G)$ donde $\mathcal{C}(m) = \{g \in G : [g, m] = 1\}$; m genera $H_1(G)$ $(\approx H_1(M^3) \approx \mathbb{Z})$.

Por el Lema 1 M^3 es asférica así que $H_i(G) = H_i(M^3)$ $\forall i$.

Afirmación: $\mathcal{C}(m) \wedge m = \{0\} \subset H_2(G) \approx \mathbb{Z}$

Sea $c \in \mathcal{C}(m)$. Sea φ el homomorfismo de $\mathbb{Z}^2$ $(= \pi(S^1 \times S^1))$ a G $(= \pi M^3)$ tal que $\varphi(1,0) = c$ y $\varphi(0,1) = m$. Sea $f : S^1 \times S^1 \to M^3$ mapeo tal que $f_\# = \varphi$. Como $[\varphi(0,1)]$ genera $H_1(M^3)$, por el Lema 2 se tiene $f_*([S^1 \times S^1]) = 0 \in H_2(M^3)$, es decir, $c \wedge m = 0$. Esto prueba la afirmación.

Luego $\mathcal{C}(m) \wedge m \neq H_2(G)$; contradicción.

Por tanto $\pi M^3 \simeq \mathbb{Z}$. $\square$