Descomposiciones de Heegaard

Jair Remigio Juárez

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco

09-12 de diciembre de 2013

Introducción

Definición

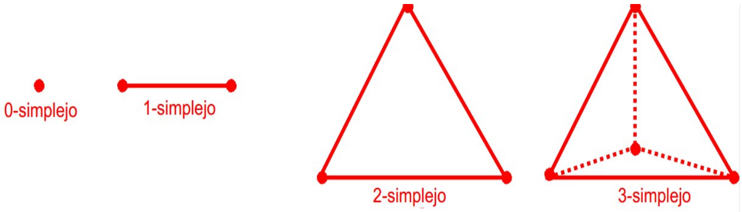
Una $n-$variedad M es un espacio topológico Hausdorff en el cual cada punto tiene una vecindad homeomorfa a $\mathbb{R}^n$ o a $\mathbb{R}^n_+ := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_n \geq 0\}$.

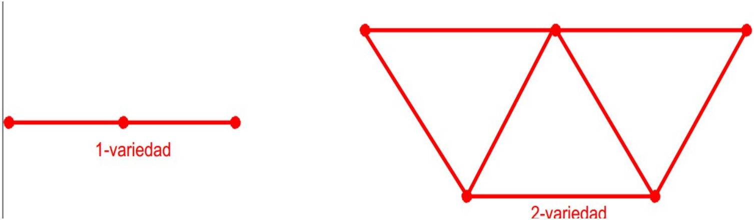
- Una $n-$variedad M es compacta si M es compacto como espacio topológico.
- $\partial M := \{x \in M | x \text{ no tiene vecindades homeomorfas a } \mathbb{R}^n\}$
- Decimos que M es cerrada si M es compacta y $\partial M = \emptyset$.

En nuestro estudio de $n-$variedades podemos elegir entre usar un enfoque PL o un enfoque diferenciable.

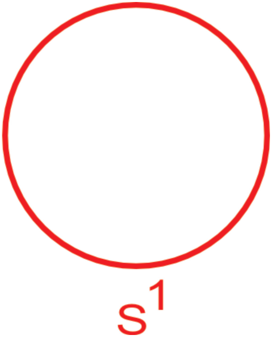
Nuestras $n-$variedades serán **n−variedades PL**.

$n-$simplejos

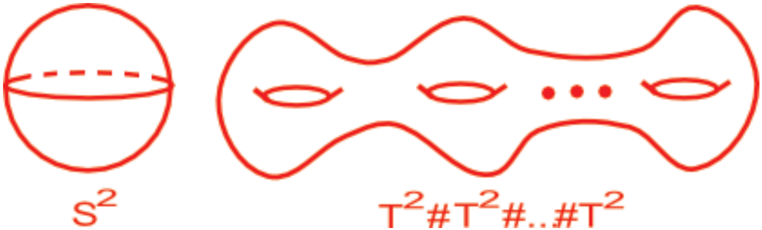



1-variedad
2-variedad

1 − variedades compactas



2−variedades cerradas orientables



2−variedades cerradas no-orientables

$$\mathbb{R}P^2 \# \cdots \# \mathbb{R}P^2$$

Las $2-$variedades compactas, orientables o no, se obtienen de las superficies cerradas al remover una cantidad finita de discos abiertos de ellas.

¿Y las 3-variedades? ¿cómo son? ¿están clasificadas?

¡Desafortunadamente no tenemos un teorema de clasificación para 3-variedades!

Pero no hay que desanimarnos…

¡Desafortunadamente no tenemos un teorema de clasificación para 3-variedades!

Pero no hay que desanimarnos...

El problema a vencer ahora es el siguiente:

Dadas dos 3-variedades M_1 y M_2, ¿pueden decirme si M_1 y M_2 son la misma 3-variedad o no?

Inmediatamente todos los que hemos llevado un curso básico de Topología Algebraica nos emocionamos, nos ponemos de pie y decimos:

¡Pues si! Precisamente ese es el tipo de problema para el que se usa *el grupo fundamental, los grupos de homología, etc.*

Sólo que eso conlleva a un problema más... las herramientas más poderosas que tenemos para eso son:

- El Teorema de Seifert-Van Kampen
- La sucesión de Mayer-Vietoris

Ambas herramientas involucran el descomponer el espacio en “pedazos más sencillos”

¿Y cómo lo hacemos?

Pues para las cerradas, una forma es con Descomposiciones de Heegaard.

Por otro lado, las Descomposiciones de Heegaard también son útiles para darnos información acerca de la topología de las 3-variedades (reducibilidad de la 3-variedad, existencia de superficies incompresibles, etc).

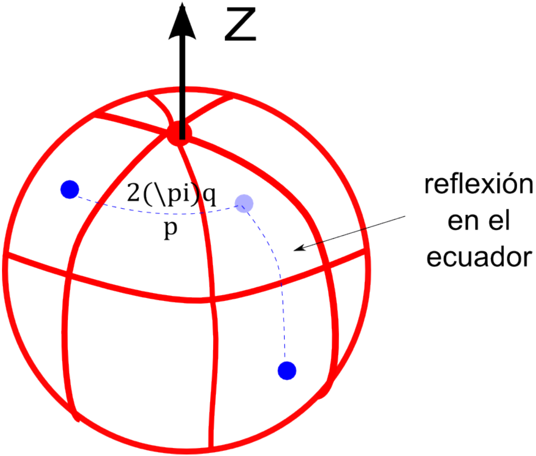
En este minicurso, vamos a estudiar la teoría básica de las Descomposiciones de Heegaard.

Algunas $3-$***variedades***

(1) $S^3 := \{x \in \mathbb{R}^4 : ||x|| = 1\}$

(2) $F \times S^1$, donde F es una superficie cerrada.

(3) Sean $p, q \in \mathbb{Z}$ primos relativos entre sí. Definimos el espacio lente $L(p, q)$ como la variedad que se obtiene al realizar la siguiente identificación en la $3-$bola B^3.



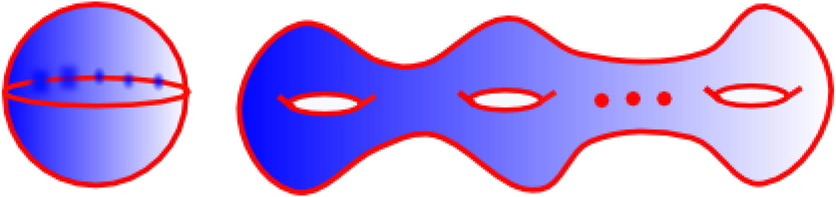
Ejercicio

Demostrar que

(a) $\mathbb{R}P^3 := S^3/(x \sim -x)$ *es homeomorfo a* $L(2,1)$.

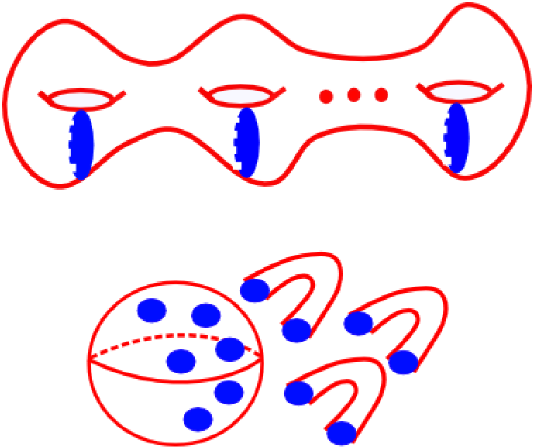
(b) S^3 *es homeomorfo a* $L(1,0)$

(4) Cubo con asas género g



Nótese que ∂M es una superficie orientable cerrada de género g.

Discos meridianos



¿Qué tienen de especial los cubos con asas?

Al parecer tienen “pinta”de ser “fáciles de entender”.

¿Me creerían si les dijera que hay variedades que se pueden descomponer como unión de cubos con asas del mismo género pegados a lo largo de su frontera?

Descomponiendo $3-$***variedades***

Ejemplo:

- S^3 puede ser vista como la unión de dos 3-bolas cerradas pegadas mediante el homeomorfismo $Id : S^2 \to S^2$.

Esto es mas o menos fácil de observar tomando las 3-bolas cerradas

$$A_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in S^3 : x_4 \geq 0\}$$

y

$$A_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in S^3 : x_4 \leq 0\}.$$

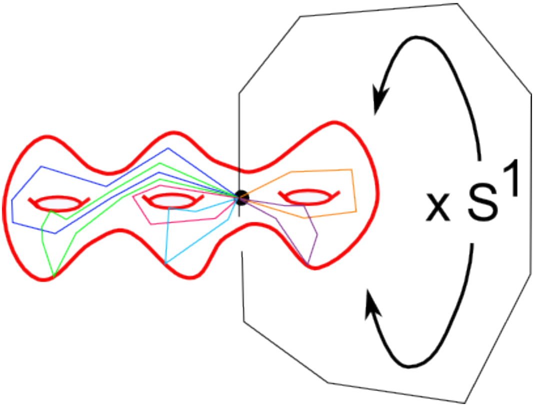
De hecho,

Ejercicio

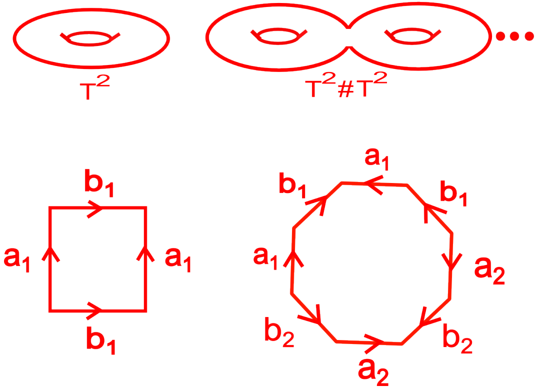
Sean B_1^3 y B_2^3 dos $3-$bolas y $f : \partial B_1^3 \to \partial B_2^3$ un homeomorfismo que preserva la orientación, entonces $M = B_1^3 \cup_f B_2^3$ es homeomorfa a S^3.

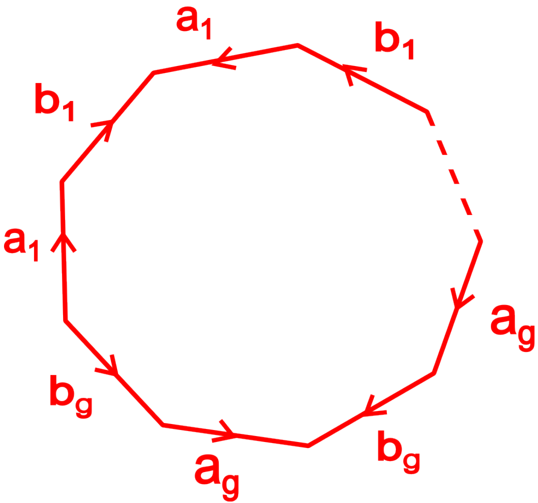
- Si F es una superficie orientable y cerrada de género g, entonces $F \times S^1$ se puede obtener pegando dos cubos con asas de género $2g + 1$ a lo largo de su frontera.

Sea Γ la gráfica que se obtiene al unir un conjunto generador de $\pi_1(F, x_0)$ con la circunferencia del factor S^1 que pasa por x_0. Sean $V_1 := \eta(\Gamma)$ una vecindad regular pequeña de Γ en M y $V_2 := \overline{M - V_1}$.

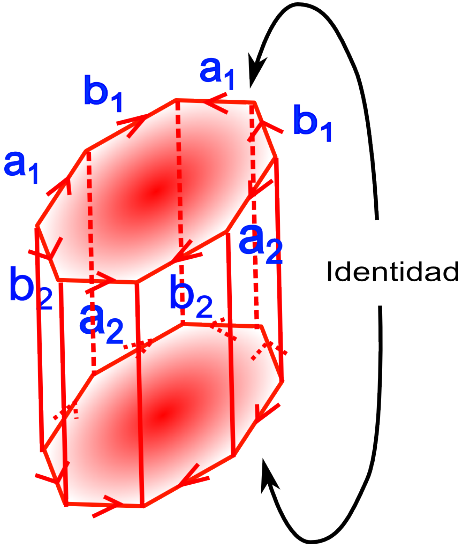


Otra forma...

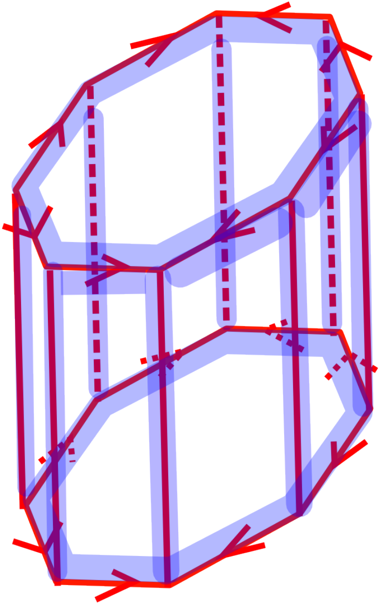


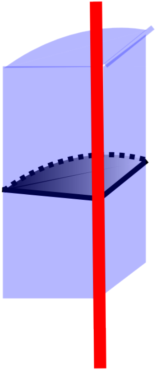


Superficie cerrada y orientable de género g

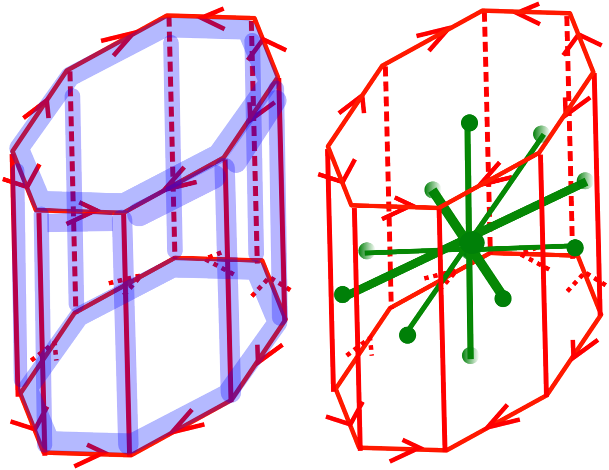


$F \times S^1$

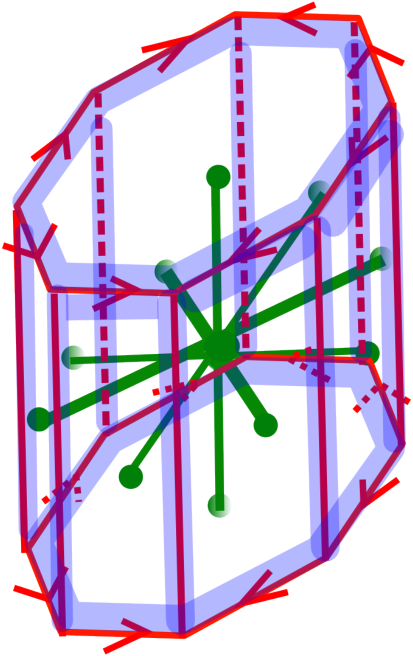




Un cubo con asas



El otro cubo con asas se obtiene al tomar una vecindad regular adecuada de la gráfica verde



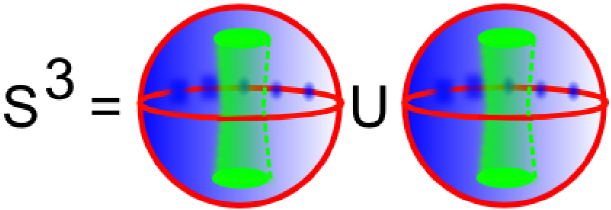
La pregunta, tal vez obligada, en esta situación es si esas descomposiciones son únicas.

¿Únicas en que sentido?

Bueno...

Sabemos, por ejemplo, que a S^3 la podemos describir como unión de dos cubos con asas de género 0 (dos $3-$bolas). ¿Lo podremos representar como unión de cubos con asas de género mayor que 0?

Veamos…



S^3 también es una unión de dos cubos con asas de género 1.

Ejercicio

Dado un entero $g > 2$, demuestre que S^3 se puede ver como la unión de dos cubos con asas de género g pegados a lo largo de sus fronteras.

Y regresando a lo que nos atañe…

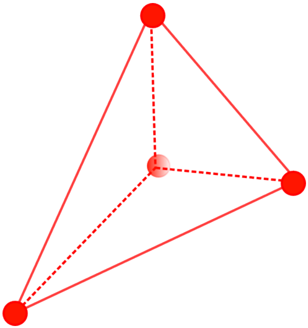
¿Podemos representar a cualquier $3-$variedad M como unión de cubos con asas pegados a lo largo de sus fronteras?

Descomposiciones de Heegaard

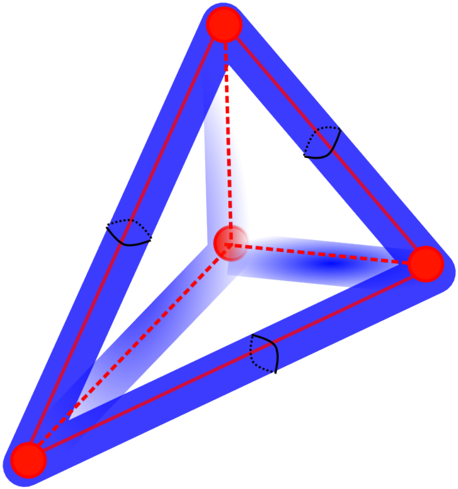
Teorema de Heegaard

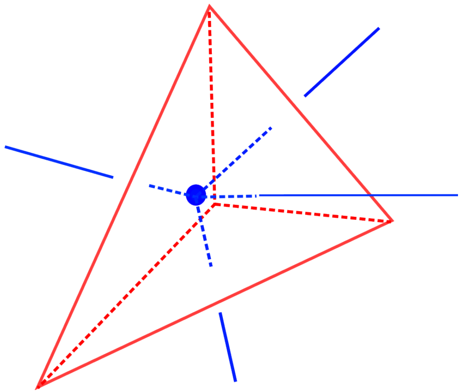
Toda $3-$variedad cerrada, conexa y orientable M se puede descomponer como la unión de dos cubos con asas pegados a lo largo de sus fronteras.

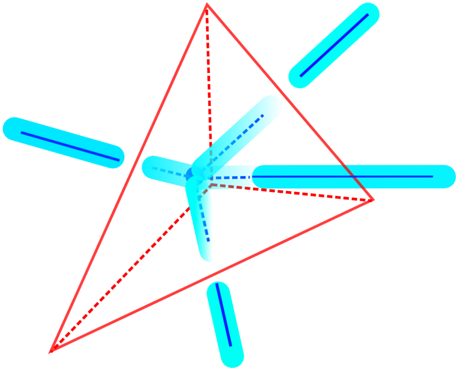
Demostración. Sea τ una triangulación para M y sea $K^{(1)}$ el conjunto de simplejos de τ que tiene dimensión menor o igual que 1.



Sea $V := \overline{\eta(K^{(1)})}$ una vecindad regular de $K^{(1)}$ en M y sea $W := \overline{M \setminus V}$. Entonces V y W son cubos con asas.







Definición

*Sean M una $3-$variedad cerrrada, conexa y orientable y $F \subset M$ una superficie cerrada, conexa y orientable. Si la cerradura de cada una de las componentes de $M \setminus F$ es un cubo con asas de género g decimos que (M, F) es una **descomposición de Heegaard de** M **de género** g.*

La superficie F es una **superficie de Heegaard para M.**

Ejemplos:

- S^2 es una superficie de Heegaard para S^3.
- La superficie cerrada y orientable de género $2g + 1$ es una superficie de Heegaard para $F \times S^1$, donde F es una superficie orientable y cerrada de género g.
- T^2 es una superficie de Heegaard para S^3.

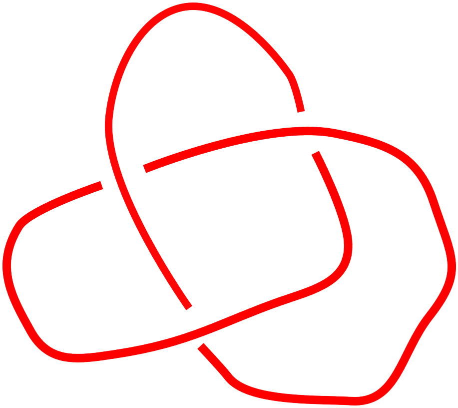
Ejercicio

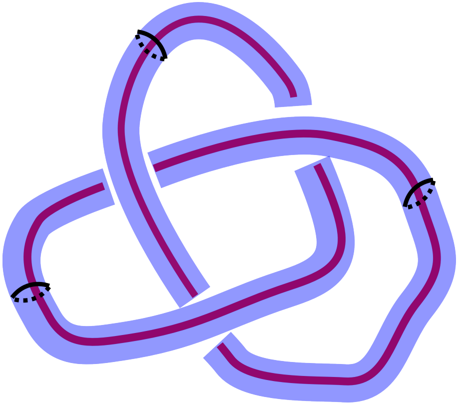
Encontrar una descomposición de Heegaard (género uno) para $L(p, q)$.

¡Aguas!

Cualquier S^2 “bonita” en S^3 es una superficie de Heegaard para S^3 pero no cualquier toro T^2 es una superficie de Heegaard para S^3

Ejemplo:





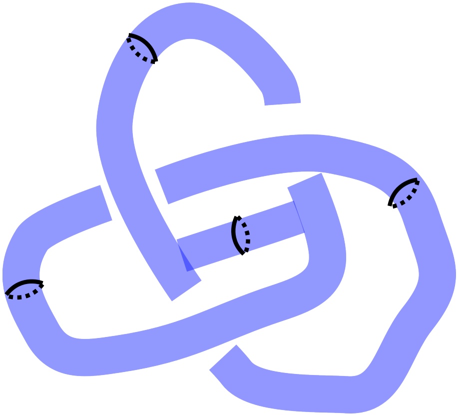
Este toro no es una superficie de Heegaard para S^3.

Ejercicio

Sea K el nudo trébol en S^3 y sea $\eta(K)$ una vecindad regular de K en S^3. Demostrar que $\overline{S^3 - \eta(K)}$ no es un cubo con asas de género uno.

Ejercicio

Demuestre que la superficie mostrada en la figura es una superficie de Heegaard de género 2 para S^3.



Usualmente, denotamos también a las Descomposiciones de Heegaard de M como $M = V \cup_f W$, donde V y W son cubos con asas del mismo género y $f : \partial V \to \partial W$ es un homeomorfismo de "pegado".

Diagramas de Heegaard

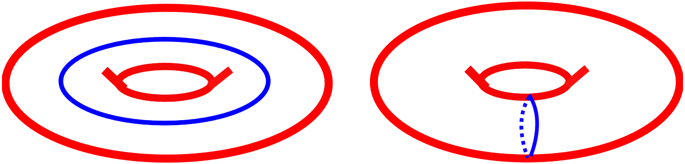
Sean V y W cubos con asas de género g y sea $\{D_i\}_{i=1}^{g}$ un sistema de discos meridianos en V (es decir, $V \setminus \cup D_i$ es una 3-bola cerrada). Sea $f : \partial V \to \partial W$ un homeomorfismo y consideremos $c_i = f(\partial D_i) \subset \partial W$ entonces

(a) $\{c_i\}$ tiene exactamente g componentes.

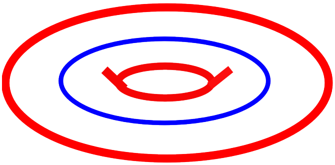
(b) $c_i \cap c_j$, si $i \neq j$.

(c) Si cortamos a ∂W por $\{c_i\}$ obtenemos una esfera a la que le fueron removidos $2g$ discos.

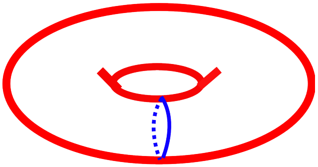
Ejemplos:



Ejemplos:



S^3

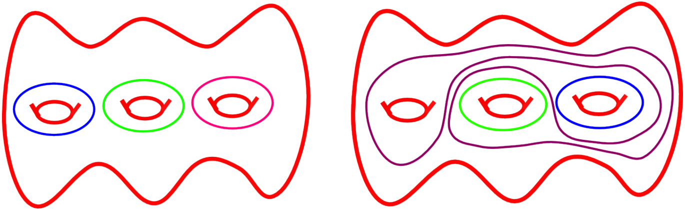


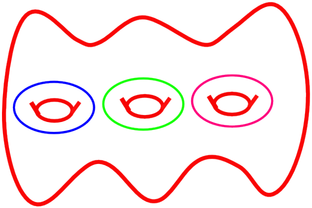
S^2XS^1

Ejercicio

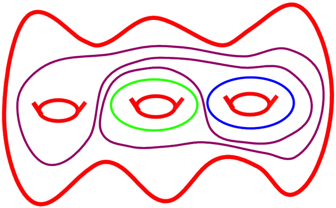
- *Encontrar un diagrama de Heegaard para* $L(5,1)$ *y un diagrama de Heegaard para* $L(5,2)$. *¿Son* $L(5,1)$ *y* $L(5,2)$ *homeomorfos?*
- *Describa cómo es en general un diagrama de Heegaard para* $L(p,q)$.

Más ejemplos. . .

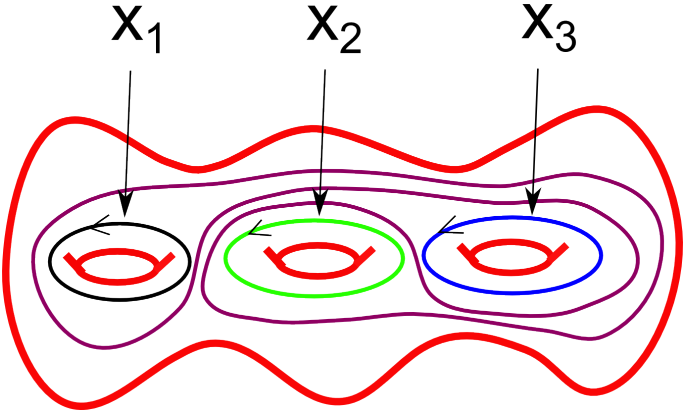




S^3



¿?



Una presentación para el grupo fundamental de la variedad M dada por este diagrama de Heegaard es

$$\pi_1(M) = \langle x_1, x_2, x_3 : x_1 x_3^{-1} x_2 x_3 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1 \rangle$$

Es decir, $\pi_1(M)$ es trivial.

Del ejemplo anterior y lo que hemos platicado hasta ahora tenemos lo siguiente:

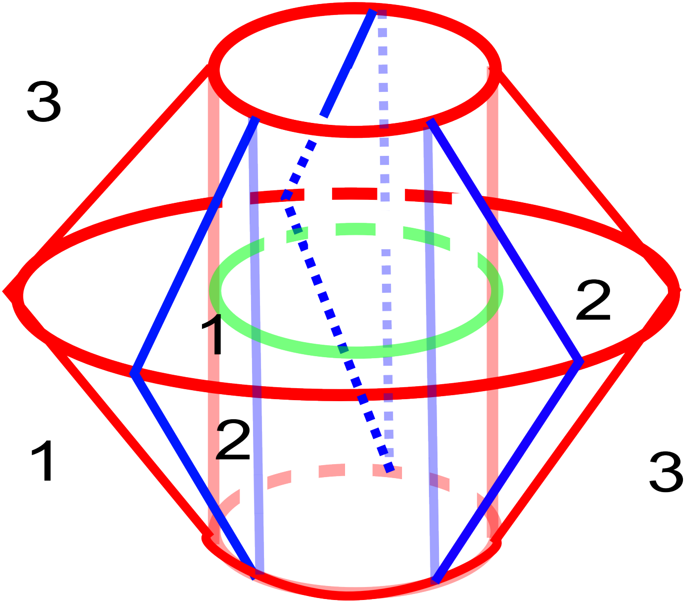
(1) Podemos aprender a calcular una presentación de $\pi_1(M)$ a partir del diagrama de Heegaard.

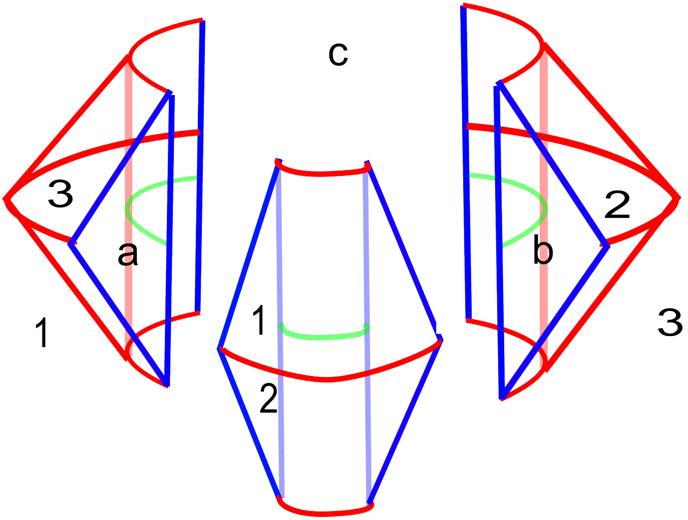
(2) Una variedad M puede tener descomposiciones de Heegaard del mismo género, por lo cual, tal vez deberíamos considerar nuevos problemas:

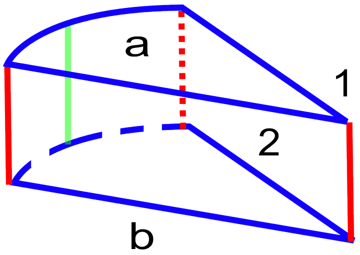
- ¿cuál es nuestra noción de equivalencia entre descomposiciones de Heegaard?
- ¿Cuántos descomposiciones de Heegaard tiene una $3-$variedad M?

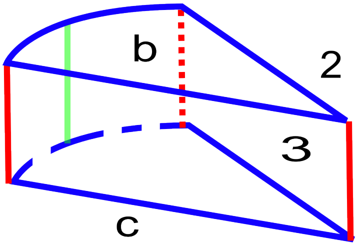
(3) ¿ Cómo reconocer si dos diagramas de Heegaard del mismo género representan a la misma 3-variedad?

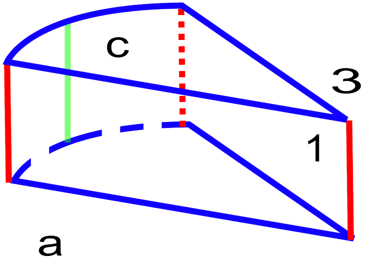
Diagrama de Heegaard para $L(3,2)$

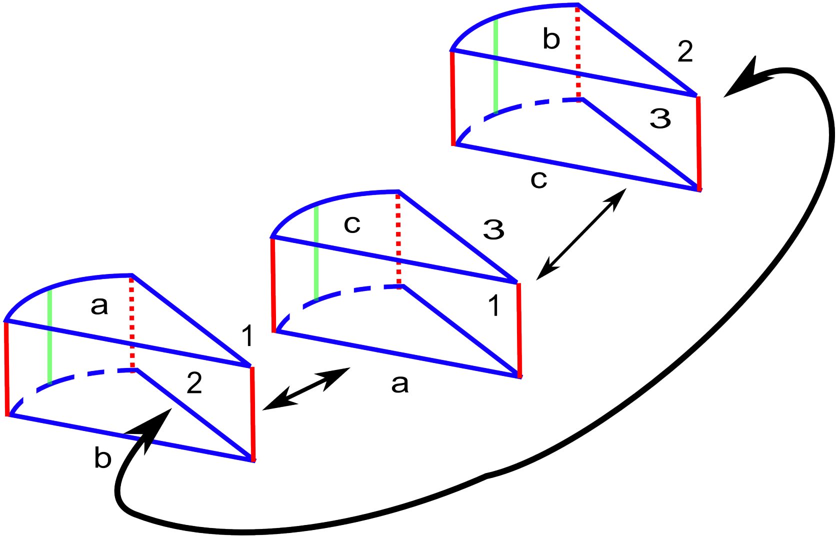

3
2
1
2
1
3

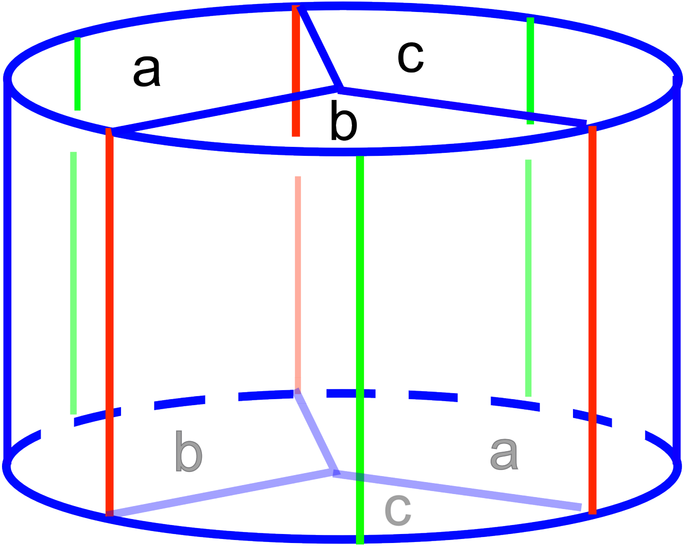

c
3
a
1
1
2
2
b
3

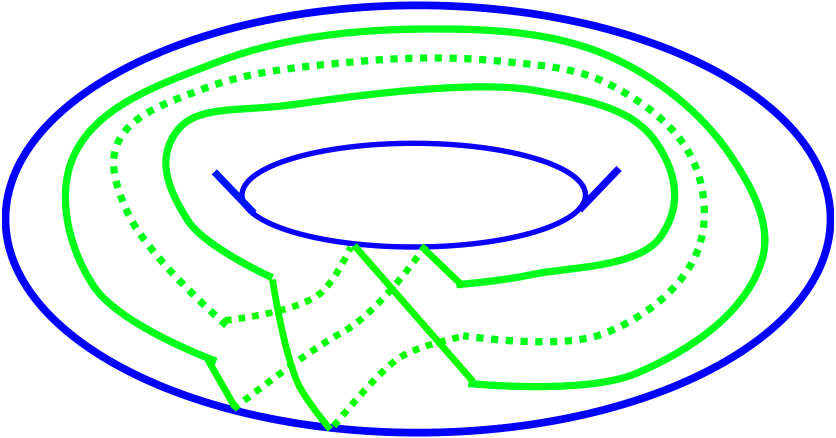

a
1
2
b


b
2
3
c


c
3
1
a


b
2
3
c
c
3
1
a
a
1
2
b

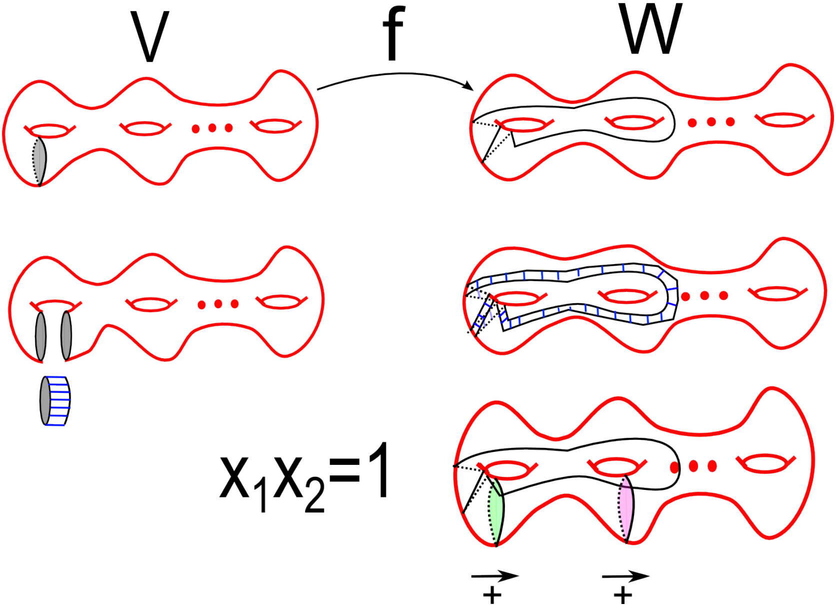

a
c
b
b
a
c



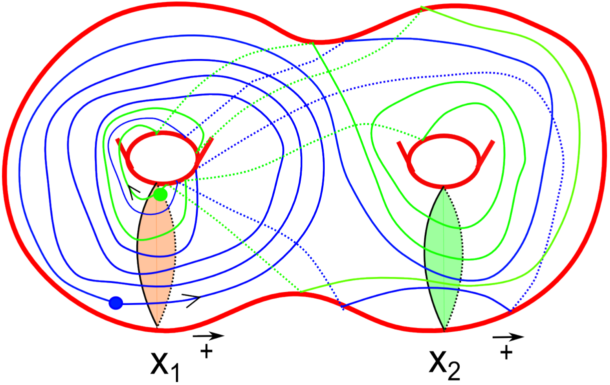
La frontera del disco meridiano de V, bajo el homeomorfismo de pegado se identifica con la curva $\mu^2\lambda^3 \subset \partial W$

En general, para $L(p, q)$ tenemos que el disco meridiano del toro sólido se identifica con la curva $\mu^q \lambda^p \subset \partial W$

Calculando el grupo fundamental de M


V
f
W
$x_1x_2=1$
+
+

Ejemplo:



$$\pi_1(M) \cong \langle x_1, x_2 : x_1^4 x_2^{-1} x_1^{-1} x_2^{-1} = 1, x_1^{-1} x_2^2 x_1^{-1} x_2^{-1} = 1 \rangle$$

¡ Esta es la famosa Variedad de Poincaré!

$\pi_1(M)$ no es trivial.

$H_1(M;\mathbb{Z})$ es trivial.

Ejercicio

Calcule el grupo fundamental de $L(p, q)$

Observemos que *rango*$(\pi_1(M)) \leq g$, donde g es el género de la descomposición de Heegaard y *rango*$(\pi_1(M))$ es el mínimo número de elementos que se necesitan para generar a $\pi_1(M)$.

Por lo cual, si quisieramos obtener una "mejor" cota para *rango*$(\pi_1(M))$ tendríamos que considerar una descomposición de Heegaard para M de **género mínimo.**

Definición

Decimos que M tiene género de Heegaard $h(M)$, si M admite una descomposición de Heegaard de género $h(M)$ pero no admite descomposiciones de género menor a $h(M)$.

Es decir,
$h(M) := min\{g \in \mathbb{Z}_{\geq 0} |\ g \text{ es el género de una descomposición de } M\}$.

De esta forma, $rango(\pi_1(M)) \leq h(M)$.

$h(M)$ es un invariante topológico.

Si $h(M) = 0$, entonces $M =?$

Si $h(M) = 1$, entonces $M =?$

Si $h(M) \geq 2$, entonces $M =?$

$h(M)$ es un invariante topológico.

Si $h(M) = 0$, entonces $M = S^3$

Si $h(M) = 1$, entonces $M = L(p, q)$ o $M = S^2 \times S^1$

Si $h(M) \geq 2$, entonces $M =?$

Ejercicio

Demostrar que $h(F \times S^1) = 2g + 1$, *si* F *es una superficie orientable de género* g.

Un par de teoremas famosos

Teorema

Toda 3-variedad M cerrada, orientable y conexa se obtiene mediante cirugía de Dehn en un enlace $L \subset S^3$.

Teorema

Toda 3-variedad M cerrada, orientable y conexa es una cubierta simple de 3 hojas de S^3 ramificada en un enlace $L \subset S^3$.

Para finalizar...

Gracias