Resumen de reglas de operaciones con números y manipulación de fracciones

- *Multiplicación.* El símbolo $\times$ casi no se usa para la multiplicación (se confunde con la letra x). Se usa en su lugar un punto $\cdot$, o a veces nada (si no causa confusión). Por ejemplo, escribimos $2 \cdot 3 = 6$ (en lugar de $2 \times 3 = 6$), $2(3+5) = 2 \cdot (3+5) = 2 \cdot 8 = 16$.
- *División.* Se denota por a/b, $\frac{a}{b}$, $a \div b$ (el último se usa muy poco). Cada notación tiene su ventaja.

$$(2 - 1/2)/(1 - 1/3) = (2 - 1/2) \div (1 - 1/3) = \frac{2 - 1/2}{1 - 1/3} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{3}}.$$

- *Resta y negativo.* El símbolo $-$ se usa para la resta, como en $7 - 3 = 4$, pero también se usa para la operación de tomar el negativo de un número, como en -3. Para evitar confusión, utilizamos paréntesis para indicar el segundo uso, como en $-(2-3) = -(-1) = 1$, $2 \cdot (-3) = -6$ (y no $2 \cdot -3 = 6$). A veces, si no hay confusión, omitimos los paréntesis, $(-2) + 3 = -2 + 3$.
- *Conmutatividad de adición y multiplicación*:

  $$a + b = b + a, \quad a \cdot b = b \cdot a.$$

  Por ejemplo, $3 + 5 = 5 + 3 = 8$, $3 \cdot 5 = 5 \cdot 3 = 15$.

  Ojo: la resta y la división *no* son conmutativas, $5 - 3 = 2$, $3 - 5 = -2$, $4/2 = 2$, $2/4 = 1/2$.
- *La ley distributiva de la multiplicación y división sobre la adición y resta* (la ley de 'quitar paréntesis')

  $$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \qquad \frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

  (en la segunda fórmula $c \neq 0$).

  Por ejemplo, $2(3+5) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5 = 6 + 10 = 16$, $(18 - 27)/3 = 18/3 - 27/3 = 6 - 9 = -3$.

  Ojo: también es importante saber cuál ley *no* es correcta. Por ejemplo, $(6+4)/2 \neq 6+4/2$, $-(3+4) \neq -3+4$, $(-3)^2 \neq -3^2$.
- *Orden de las operaciones:* multiplicación y división tienen prioridad sobre suma y resta. Potencia tiene prioridad sobre multiplicación y división.

  Por ejemplo, $2 + 3 \cdot 2 = 2 + 6 = 8$ (primero se multiplica, despues se suma), $9 \div 3 - 10 \div 5 = 3 - 2 = 1$ (primero se hace las divisiones, despues la resta), $-3^2 = -9$ (primero se toma el cuadrado, después se toma el negativo).

  Entre suma y resta el orden de las operaciones no importa: $2 + 6 - 3 = (2+6) - 3 = 2 + (6-3) = 5$. Entre multiplicaciones tampoco importa el orden: $2 \cdot 6 \cdot 3 = (2 \cdot 6) \cdot 3 = 2 \cdot (6 \cdot 3) = 36$. Con multiplicación seguida por división tampoco: $2 \cdot 6/3 = (2 \cdot 6)/3 = 2 \cdot (6/3) = 4$. Pero con división seguida por multiplicación sí importa el orden: $(8/4) \cdot 2 = 2 \cdot 2 = 4$, $8/(4 \cdot 2) = 8/8 = 1$.

  Ojo: en muchos casos, aun si da el mismo resultado, al hacerlo en un orden es más facil que el otro. Por ejemplo: cuánto es $12 \cdot 34/17$? Podemos hacerlo así: $(12 \cdot 34)/17 = 408/17 = 24$, pero es más fácil hacer la división primero: $12 \cdot (34/17) = 12 \cdot 2 = 24$. ¿Cómo saber? Experiencia.
- Si queremos romper estas reglas de prioridad usamos paréntesis: $(2+3) \cdot 2 = 5 \cdot 2 = 10$, $(6/3 - 10)/5 = (2 - 10)/5 = (-8)/5 = -\frac{8}{5}$, $(-3)^2 = 9$.
- Una regla *muy útil* para la manipulación de fraciones: *al multiplicar o dividir el numerador y el denominador de una fracción por el mismo número (distinto de 0), no cambia el valor de la fracción* (da una fracción "equivalente"):

  $$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{10}{15}, \qquad \frac{14}{21} = \frac{14/7}{21/7} = \frac{2}{3}, \qquad \frac{1.01}{0.1} = \frac{1.01 \cdot 10}{0.1 \cdot 10} = \frac{10.1}{1} = 10.1$$

Usando esta regla, se puede simplificar (o 'reducir') cualquier fracción a su forma más simple, dividiendo el númerador y denominador entre sus factores comunes (se puede hacerlo sucesivamente, varias veces, hasta que no tienen factores comunes):

$$\frac{336}{480} = \frac{336/4}{480/4} = \frac{84}{120} = \frac{84/4}{120/4} = \frac{21}{30} = \frac{21/3}{30/3} = \frac{7}{10}.$$

- Para *sumar o restar fracciones* las llevamos primero a un denominador comun, y después usamos la ley de distribición:
$$\frac{5}{6} - \frac{7}{8} = \frac{5 \cdot 4}{6 \cdot 4} - \frac{7 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{20}{24} - \frac{21}{24} = \frac{20 - 21}{24} = \frac{-1}{21} = -\frac{1}{21}.$$
$$2 - \frac{17}{7} = \frac{14}{7} - \frac{17}{7} = \frac{14 - 17}{7} = \frac{-3}{7} = -\frac{3}{7}.$$
- *Multiplicar fracciones* es fácil:
$$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{10}{21}.$$
- *División de fracciones* es un poco más complicado:
$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 5} = \frac{14}{15}.$$
En palabras: "se multiplica el númerador por el *recíproco* del denumerador" (el recíproco de un número x es $1/x$; el recíproco de a/b es b/a).
En fórmula:
$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$
Ojo: esta regla se llama a veces "voltear la tortilla"; es mucha mejor que la famosa "ley de sanwich" que se enseña en muchas escuelas.
- Casi nunca usamos "fracciones mixtas". Por ejemplo, escribimos $\frac{5}{2}$ en lugar de $2\frac{1}{2}$.
- Una fracción negativa la escribimos como el negativo de una fracción positiva. Por ejemplo, escribimos $-\frac{3}{5}$ en lugar de $\frac{-3}{5}$.
- Fracciones decimales, como 2.5, 0.034, hay que pensarlas simplemente como notación para fracciones cuyo denominador es una potencia de 10, sobre todo cuando se mezcla con fracciones normales. Por ejemplo,
$$2.5 = \frac{25}{10}, \quad 0.034 = \frac{34}{1000}, \quad 3.5 - \frac{3}{7} = \frac{35}{10} - \frac{3}{7} = \frac{7}{2} - \frac{3}{7} = \frac{7 \cdot 7 - 3 \cdot 2}{14} = \frac{49 - 6}{14} = \frac{35}{14}.$$
Así que convertir una fracción decimal a una fracción ordinaria es facil.

  Ojo: Al reves es más complicado, porque típicamente resulta en una fracción decimal *infinita*, *eventualmente periódica*. Por ejemplo,
$$\frac{1}{3} = 0.333\ldots = 0.\overline{3}, \quad \frac{5}{6} = 0.8333\ldots = 0.8\overline{3}, \quad \frac{31}{13} = 2.13846153846153846\ldots = 2.1\overline{384615}.$$
(la barra superior marca la parte que se repite infinitamente.) Luego, para convertir una fracción decimal inifinita *eventualmente periódica*, digamos $1.2\overline{345}$, a una fracción ordinario hay un truco que aprenderemos más adelante en el curso.
- Cuando se hace cuentas con fracciones es muy importante mantener claro los 'ejes'. Por ejemplo
$$1 + \frac{1}{1 + \frac{2}{3}} = 1 + \frac{1}{\frac{3}{3} + \frac{2}{3}} = 1 + \frac{1}{\frac{3+2}{3}} = 1 + \frac{1}{\frac{5}{3}} = 1 + \frac{3}{5} = \frac{5}{5} + \frac{3}{5} = \frac{5+3}{5} = \frac{8}{5}.$$