Tarea 2

En esta tarea, vas a calcular la recta tangente a varias curvas en el plano. Después durante el curso aprenderemos a hacerlo utilizando el concepto de **derivada**, pero por ahora debes hacerlo como se indica.

1.- Considera la parábola $y = x^2$ en el plano, y un punto (x_0, y_0) sobre esta curva (es decir, $y_0 = x_0^2$). (Si no logras hacer el problema, para obtener crédito parcial, hazlo tomando $(x_0, y_0) = (-3, 9)$.

a) Existen dos rectas, que pasan por (x_0, y_0), y cuya única intersección con la parábola $y = x^2$ es exactamente este punto. Una de ellas es la recta vertical $x = x_0$. La otra recta es la **recta tangente** a la parábola. Encuentra la pendiente de la recta tangente a la parábola [Pista: la pendiente es $2x_0$].

b) Encuentra una ecuación de la recta tangente.

c) Haz un (buen) dibujo, poniendo la parábola $y = x^2$, y las rectas tangentes en distintos puntos. Digamos, en cinco puntos distintos.

2.- Considera la elipse $x^2 + 2y^2 = 1$, y un punto (x_0, y_0) sobre ella. (Si no logras hacer este problema, para obtener crédito parcial, hazlo tomando $(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$).

a) Existe una única recta, la **recta tangente** a la elipse, que pasa por (x_0, y_0), y no intersecta a la elipse en ningún otro punto. Encuentra la pendiente de esta recta [Pista: la pendiente es $-x_0/2y_0$].

b) Encuentra una ecuación de la recta tangente.

c) Haz un (muy, muy buen) dibujo.

3.- Considera la hipérbola $xy = 1$, y un punto (x_0, y_0) sobre ella. (Si no logras hacer este problema, para obtener crédito parcial, hazlo tomando $(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{6}, 6\right)$).

a) Existen tres rectas que pasan por el punto (x_0, y_0), y que no intersectan a la hipérbola en ningún otro punto. Dos de ellas son las rectas $x = x_0$ y $y = y_0$ (nota que estas rectas son paralelas a las asíntotas de la parábola). La otra recta es (¡adivinaste!) la **recta tangente** a la hipérbola. Encuentra la pendiente de esta recta tangente [Pista: la pendiente es $-y_0/x_0$].

b) Encuentra una ecuación de la recta tangente.

c) Haz un (excelente) dibujo.

4.- Considera la curva $y = x^3$, y un punto (x_0, y_0) sobre ella. (Si no logras hacer este problema, para obtener crédito parcial, hazlo tomando $(x_0, y_0) = (3, 27)$).

a) Demuestra que cualquier recta vertical intersecta a esta curva en un único punto. Haz un dibujo para convencerte de que ninguna recta vertical merece ser llamada la **"recta tangente a la curva"** en ningún punto.

b) Considera la recta que pasa por (x_0, y_0) y tiene pendiente m. Sustituye $y = x^3$ en la ecuación de esta recta. Observa que obtienes un polinomio de grado 3 en la variable x.

Ya sabemos una solución a este polinomio: $x = x_0$. Encuentra el único valor de m para el cual la solución $x = x_0$ es una **solución doble**.

Como podrás imaginarte ya, este valor m es la pendiente de la recta tangente a $y = x^3$ en el punto (x_0, y_0) [Pista: la pendiente es $3x_0^2$]. Observa que, en general, la recta tangente a un punto intersecta a la curva $y = x^3$ en **más de un punto**.

c) Encuentra una ecuación de la recta tangente.

d) Haz un dibujo (el mejor dibujo que hayas hehco en tu vida).

5.- **Problema extra**. Considera la curva $y^2 = x^2 + x^3$, y un punto (x_0, y_0) sobre ella.

a) Considera la recta con pendiente m que pasa por el punto (x_0, y_0), y despeja y. Sustituye el valor de y en la ecuacón $y^2 = x^2 + x^3$. Observa que obtienes una ecuación de grado 3 en la variable x. Si (x_0, y_0) es un punto distinto al origen, existe un único valor de m para el cual $x = x_0$ es una solución doble de este polinomio. Encuéntralo. ¿Que pasa si $(x_0, y_0) = (0, 0)$? ¿cuántos valores de m cumplen que $x = 0$ es una solución doble? ¿cuáles?.

b) Encuentra una ecuación para la recta tangente a $y^2 = x^2 + x^3$ en el punto (x_0, y_0). Nota que, para el origen, vas a encontrar más de una recta.

c) Haz un dibujo (maravilloso, sublime, cuya belleza conmueva al más insensible de los seres humanos).