Curso de Cálculo Diferencial OMCDI-9 ENMS de Guanajuato
Para entregar en clase el jueves 5 de septiembre, 2019

Tarea 4. Cálculo Diferencial.

Operaciones con funciones

1. Lee la Sección 0.6 de Operaciones con Funciones (págs. 35 y 36 del libro de Purcell, Varberg y Rigdon) para ayudarte a responder los siguientes ejercicios. Para los siguientes tres incisos, considera que $f(x) = x+3$, $g(x) = x^2$. Indica cuáles son los conjuntos que constituyen el dominio de estas dos funciones y su rango. Para cada inciso, evalúa la función h en el valor que se te indique y **también indica cuál es el dominio y el rango de** $h(x)$. (Ve la Figura 1 del libro en la pág 35 para comprender mejor cómo se calcula el dominio y rango de h).

   (a) La función $h(x)$ es la suma de f y g. Se denota como
   $$h(x) = (f+g)(x) = f(x) + g(x).$$
   Calcula $h(2)$.

   (b) La función $h(x)$ es el producto de f y g. Se denota como
   $$h(x) = (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$
   Calcula $h(3)$.

   (c) La función $h(x)$ es la división de g entre f. Se denota como
   $$h(x) = \left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)}.$$
   Nota que el dominio de h debe excluir $x = 3$. Explica la razón de ello. Calcula $h(6)$.

   (d) Nuevamente h es la suma de f y g donde $f(x) = x^3 + 2x$, $g(x) = x^{1/2}$. Evalúa $h(x)$ en $x = 9$ y también en $x = t+1$. Indica si hay alguna restricción para los valores que puede tomar t.

2. En la tarea anterior se definió la función indicadora de un conjunto A como
   $$I_A(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \text{si } x \in A, \\ 0, & \text{si } x \notin A. \end{array} \right\}.$$
   Nota que el producto de dos funciones indicadoras es a su vez una función indicadora pero de un nuevo conjunto C,
   $$I_C(x) = I_A(x)\, I_B(x).$$
   Esta función indicadora de C valdrá uno cuando x esté tanto en A como en B. Vale cero en otro caso. Indica para los siguientes incisos cuál es el nuevo conjunto C y cuál es el dominio y rango de $I_C(x)$.

   (a) $A = (-\infty, 3)$, $B = [1, 8)$.

   (b) $A = (-4, 3)$, $B = [-1, 5)$.

   (c) $A = (-\infty, 3)$, $B = [3, 8)$.

3. Calcula la función $h(x)$ en los valores que se indican, notando que h es la función que resulta de componer g con f, lo cual se denota como

$$h(x) = g \circ f(x) = g[f(x)].$$

Nota que primero se aplica f y luego se aplica al resultado la función g. Indica en cada inciso cuál es el dominio y el contradominio de f, g y h.

   (a) $f(x) = x + 3, g(x) = x^2$.
   (b) $f(x) = x^2, g(x) = x + 3$. Nota que el orden en el que se aplican las funciones sí importa y no se llega al mismo resultado.
   (c) $f(x) = x + 4,\ g(x) = x^3$.
   (d) $f(x) = x^2,\ g(x) = \sqrt{x-4}$.

4. RETO: Si se sabe que para tres números reales x, y, z siempre ocurre que siguen el orden $x < y < z$, demuestra que

$$I_{(0,\infty)}(x) = I_{(0,\infty)}(x) \cdot I_{(0,\infty)}(y) \cdot I_{(0,\infty)}(z).$$

En palabras esto quiere decir que para identificar si las tres cantidades son positivas simultáneamente, basta con fijarse en la más chica de ellas.