Curso de Cálculo Diferencial OMCDI-9 ENMS de Guanajuato
Para entregar en clase el jueves 5 de septiembre, 2019

Tarea 5. Cálculo Diferencial.

Sucesiones

Lee la página 79 del libro de Purcell, Varberg y Rigdon, donde definen una sucesión y su límite. Recuerda que una sucesión es una función f con dominio en los números naturales $\mathbb{N}$ y contradominio en los reales. Un ejemplo de sucesión es el siguiente:

$$f\ (n) = f_n = \frac{1}{n}, \tag{1}$$

donde se resalta que el dominio es sólo los naturales al expresar el término enésimo como f_n. La sucesión se puede representar en una tabla de dos columnas

n	$f\,(n)$
1	1
2	0.5
3	0.333

, (2)

con tantos renglones como se desee. La primera columna da valores en el dominio de la sucesión y la segunda indica los valores de la sucesión asociados a dichos valores. Interesa saber si al tender n a infinito, la función converge (se acerca cada vez más al aumentar n) a un valor fijo particular, al cual se llamará el límite L o si no lo hace y diverge. Cuando converge a un valor fijo, se denota como

$$\lim_{n\to\infty} f\,(n) = L.$$

En el caso de la sucesión (1), el límite es $L = 0$. En la siguiente clase se verá con mayor detalle cómo encontrar L cuando exista, una manera precisa de definir al límite y sus propiedades. Para esta tarea se te pide realices los siguientes ejercicios con sucesiones para irte preparando para dominar este tema

1. Para las siguientes sucesiones calcula sus valores para los valores de n que se indican. Da tus resultados en una tabla como la (2). Antes de calcular explícitamente los valores, simplifica lo más que puedas la expresión de $f\,(n)$. Los valores $f\,(n)$ calcúlalos explícitamente, como números reales, para que puedas explorar y deducir si la sucesión converge a algún límite L o si diverge. Grafica también los puntos $[n,\ f\,(n)]$ en el plano Cartesiano, en una escala que veas conveniente. (Se sugiere usar hojas de cuadritos para tus gráficas).

   (a) $f\,(n) = 5/n$, para n en $\{k, 2k, 3k, 4k, ..., 10k\}$, donde $k = 100$.

   (b) $f\,(n) = \sqrt{\frac{n+1}{n+2}}$, para las mismas n que el inciso anterior.

   (c) $f\,(n) = \left(\frac{2n+1}{n+5}\right)^{1/3}$, para las mismas n que el inciso anterior.

   (d) $f\,(n) = \frac{4n+2}{n+8}$. para las mismas n que el inciso anterior.

   (e) $f\,(n) = n!$, para n en $\{1, 2, 3, 4, 5, ..., 10\}$.

   (f) $f\,(n) = \ln(n)$, para n en $\{k, 2k, 3k, 4k, ..., 10k\}$, donde $k = 1000$. Recuerda que ln es el logaritmo natural (cuya base es la constante de Euler $e = 2.7183$).

(g) $f(n) = 4 + (2/n)$, para n en $\{k, 2k, 3k, 4k, ..., 10k\}$, donde $k = 10$.

(h) $f(n) = \frac{n^2}{2n+5}$, para n en $\{k, 2k, 3k, 4k, ..., 10k\}$, donde $k = 10$.

(i) $f(n) = \frac{n}{2n+5}$, para n en $\{k, 2k, 3k, 4k, ..., 10k\}$, donde $k = 10$.

(j) $f(n) = \sqrt{n}$, para n en $\{k, 2k, 3k, 4k, ..., 10k\}$, donde $k = 100$.

2. Con base en tus tablas y gráficas, indica para cada inciso de la pregunta anterior si crees que la serie converge a un valor fijo o si diverge.

3. En los casos que hayas dicho que sí hubiese un límite fijo L al cual convergiera la sucesión, responde lo siguiente. Para una cantidad pequeña positiva $\varepsilon = 0.01$, indica a partir de cuál número natural M se tiene que si $n > M$ ocurre que la distancia entre la sucesión y el límite L sea menor que esta cantidad ε. Es decir, da un valor de M para el cual se cumpla que si $n > M$, entonces

$$|\, f(n) - L| < \varepsilon,$$

con $\varepsilon = 0.01$.
Por ejemplo, para la sucesión $f(n) = 1/n$, se tiene que converge a $L = 0$. Para $\varepsilon = 0.01$, se necesita considerar a los términos de la sucesión con $n > M$, donde ocurra que

$$|\, f(n) - L| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \left| \frac{1}{n} \right| < \varepsilon. \tag{3}$$

Nótese que si $M = 999$, se tiene que si $n > M$, ya se cumple esta condición. Por ejemplo para $n = 1000$, se tiene que $n > M$ y se cumple que

$$\left| \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n} = \frac{1}{1000} = 0.001$$

sea más chico que $\varepsilon = 0.01$. Se vale dar este valor M como respuesta. Sin embargo, se suele buscar el valor M más chico que satisfaga la condición pedida, para una ε dada. Así, se busca el menor entero positivo M que cumpla que

$$M > \frac{1}{\varepsilon}, \text{ o equivalentemente, } M > \frac{1}{0.01} = 100.$$

Por lo anterior se puede dar $M = 101$. Con esta M se garantiza que si $n > M$ se cumplirá la condición (3) que depende de ε.